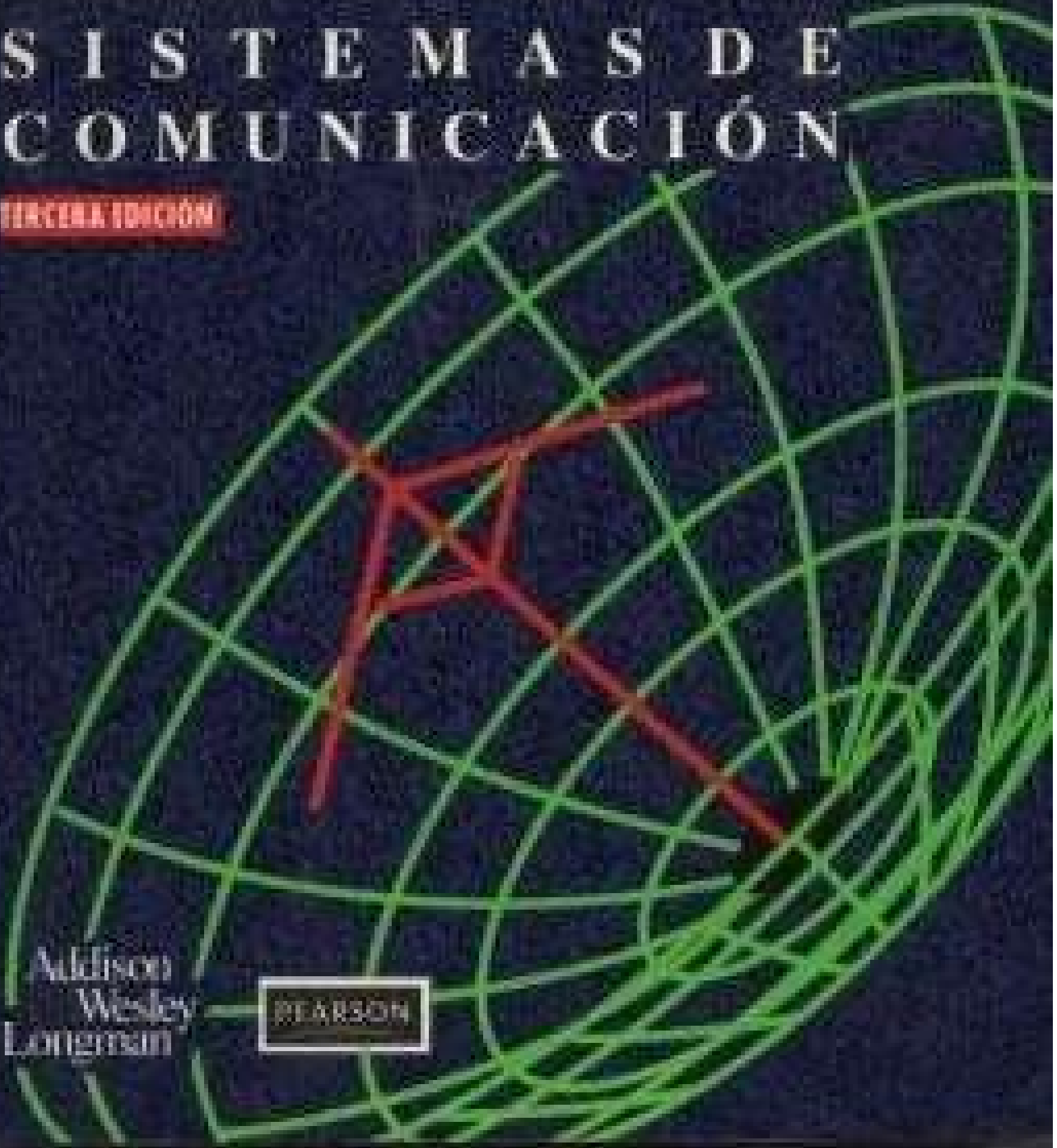
F.G. STREMLER

INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE COMUNICACIÓN

TERCERA EDICIÓN



Addison Wesley Longman

PEARSON

Categoría

- Administración
- Algebra
- Análisis Matemático
- Anatomía
- Arquitectura
- Arte
- Artículos
- Astronomía
- Atlas
- AudioLibros
- Automatización
- Base de Datos
- Biblia
- Biología
- Bioquímica
- Cálculo
- Circuitos
- Cirugía
- Cocina
- Comic
- Computer Hoy
- Contabilidad
- De Todo
- Derecho
- Dermatología
- Diarios
- Diccionario
- Diseño Grafico
- Diseño Web
- Documentales
- Dummies
- E-Books
- Ecografía
- Ecología
- Economía
- Ecuaciones diferenciales
- Educación Primaria
- Ejemplos
- Electricidad
- Electrónica
- Enciclopedia
- Estadística
- Filosofía
- Física
- Fisiología
- Ganar dinero en internet
- Geología
- Geometría
- Ginecología y Obstetricia
- Guías
- HackCrack
- Hidráulica
- Historia
- Ingeniería
- Ingeniería ambiental
- Ingeniería Civil
- Ingeniería de Materiales
- Ingeniería de Minas
- Ingeniería Industrial
- Ingeniería Petrolera
- Ingles
- Integrales
- Inv. Operaciones
- Leer Online
- Libros
- Libros Copyleft
- Libros Unicef
- Liderazgo y Motivación
- Linux
- Logística
- Maestra Infantil
- Manga
- Manual
- Manualidades
- Marketing
- Matemática Discreta
- Matemáticas
- Mecánica
- Medicina
- Metalurgia
- Mi Novela Favorita
- Multimedia
- Noticias
- Odontología
- Ofimática
- Oftalmología
- Pediatría
- Procesos Unitarios
- Programación
- Psicología
- Química
- Radiología
- Recetas
- Redes
- Religión
- Revistas
- Rincón Literario
- Robótica
- Romántica
- Salud
- Seguridad
- Sexualidad
- Sistemas Operativos
- Sobre Escribir
- Soldadura
- Solucionario
- Termodinámica
- Tésis
- Topografía
- Transferencia de Calor
- Transferencia de Masa
- Tutorial
- TuxInfo
- VideoTutoriales
- Windows
- zoología

http://libreria-universitaria.blogspot.com

INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE COMUNICACIÓN

TERCERA EDICIÓN

Ferrel G. Stremler

University of Wisconsin, Madison

Versión en español de

Gonzalo Isaac Duchén Sánchez
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa, México

Con la colaboración de

Ruy Renau Ballester
Universidad Autónoma de Puebla, México
Emilio Fajury Añez
Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia
y
Juan Carlos Sánchez
ESIME Culhuacán
Instituto Politécnico Nacional, México

ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA
Argentina · Brasil · Chile · Colombia · Ecuador · España
Estados Unidos · México · Perú · Puerto Rico · Venezuela

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Versión en español de la obra titulada *Introduction to Communication Systems, Third Edition*, de Ferrel G. Stremler, publicada originalmente en inglés por Addison-Wesley Publishing Company Inc., Reading, Massachusetts, E.U.A. © 1990.

Esta edición en español es la única autorizada.

© 1993 por **Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.**
Wilmington, Delaware, E.U.A.
Impreso en Estados Unidos. *Printed in U.S.A.*

ISBN 0-201-51878-3

2 3 4 5 6 7 8 9 10-DO-96 95 94

http://libreria-universitaria.blogspot.com

A Ruth, mi esposa

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Prefacio

Este texto presenta a los estudiantes de licenciatura una explicación introductoria de los sistemas de comunicación, destacando el diseño y la modulación de señales. Por tanto, el enfoque se orienta hacia un acucioso desarrollo de los principios matemáticos en los que se basan tales sistemas, utilizando, siempre que es posible, ejemplos de una gran variedad de sistemas de comunicación actuales, que van desde la radiodifusión comercial y los sistemas telefónicos hasta la telemetría por satélite y el radar.

Cobertura de temas ampliada

El material añadido en esta tercera edición aborda principalmente los métodos digitales, y refleja la creciente importancia de la modulación y la transmisión de señales digitales en los sistemas de comunicación. El capítulo 7 se ha ampliado con nuevo material acerca de la red digital de servicios integrados (ISDN) y la utilización de fibras ópticas en comunicaciones, así como con un tratamiento más extenso acerca de la formación de ondas de Nyquist para control de ISI. Se han incluido en el capítulo 9 los métodos de filtrado óptimo para su utilización con ISI. El capítulo 10 presenta un amplio tratamiento de FSK y MSK tanto en paralelo como en serie, al igual que dos secciones nuevas sobre sistemas de espectro expandido. Por tanto, la presentación en este último capítulo incluye métodos de modulación digital que son tema de investigación actual para nuevos diseños de sistemas de comunicación.

Método y características pedagógicas

Dado que este libro se destina a alumnos de licenciatura, el contenido está escrito en la forma más explícita posible y claramente ilustrado. Se utilizan con frecuencia *ejemplos* (117) y *ejercicios* (133) con respuestas que, cuando es posible, reflejan problemas prácticos actuales que permiten al estudiante participar activamente en el proceso de aprendizaje.

Con los problemas de ejemplo resueltos en el texto, seguidos por ejercicios con respuestas, el libro se presta para la instrucción autodidacta o dirigida individualmente. Cada capítulo termina con un resumen y una amplia selección de problemas, de modo que el instructor de un curso normal puede ajustar en forma considerable el nivel asignando problemas adecuados al curso específico. Cada problema se identifica con el

http://libreria-universitaria.blogspot.com

número de la sección correspondiente; por tanto, los estudiantes pueden remitirse a las secciones adecuadas del texto si hallan dificultades.

Un cambio importante en esta edición es el *conjunto extendido de problemas* para asignación de tareas al final de cada capítulo. Estos problemas se enfocan hacia el análisis, la verificación, la síntesis, la extensión, las ilustraciones prácticas y las consideraciones en el diseño de sistemas. Debido a la imposibilidad de que cada problema incorpore todos los aspectos, existe una amplia variedad de problemas (520 en total) en esta edición; 60% son nuevos, y alrededor del 90% o son nuevos o constituyen revisiones cuidadosas de las ediciones anteriores. Espero que estos problemas estimulen el interés y demuestren su utilidad para la comprensión del material presentado.

Existen 50 *problemas de computador* distribuidos a lo largo del libro, con mayor concentración en el capítulo 3, orientados hacia el uso de los algoritmos de la DFT y la FFT. Aunque pueden escribirse los programas para la mayoría de los problemas, éstos se diseñaron para ejecutarse en software de ingeniería disponible para computadores personales.[†]

Una característica única en esta tercera edición es la inclusión de uno o dos *problemas de diseño de sistemas* al final de cada capítulo. Estos problemas se tomaron de situaciones de diseño de sistemas prácticos y su intención no sólo es ilustrar la relevancia del material cubierto, sino también mostrar a los estudiantes algunos de los problemas que podrían presentarse en el trabajo de ingeniería y específicamente en el área de sistemas de comunicación. Estos problemas son, por naturaleza, muy amplios y abiertos; los estudiantes deben aprender que, en general, no existe una respuesta única pero su trabajo será juzgado, más que nada, a partir de su método, tomando en cuenta los objetivos y utilizando un buen criterio de ingeniería para llevar a cabo las elecciones. Existe una progresión gradual en el nivel de estos problemas a lo largo del libro.

Se recomienda estimular a los estudiantes para que lean los problemas de diseño a fin de que aprendan algunos de los problemas con los cuales estarán trabajando unos cuantos años después de tomar este curso. Además, se espera que los estudiantes se vean desafiados por dichos problemas y que su interés en el material se incremente. Otro método es hacer que los estudiantes trabajen en grupos en un problema de diseño dado, tal vez alguno de su elección. En general no existen respuestas únicas, pero algunos métodos son mejores que otros, y algunos pueden ofrecer mejores compromisos. ¡El diseño es sólo eso! De lo contrario, únicamente estaremos enseñando matemáticas.

Audiencia

Básicamente, los únicos prerrequisitos para una asignatura basada en este texto son un curso de cálculo integral y un curso introductorio sobre análisis de circuitos. Sería conveniente, aunque no esencial, un curso sobre análisis de sistemas lineales.

No obstante que en principio el libro se escribió para estudiantes de ingeniería eléctrica, también puede ser usado por aquellos que en otras disciplinas, en la industria

[†] La solución a muchos de los problemas designados como de computador se ejecutaron en un computador personal utilizando la versión estudiantil de MathCAD.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

o en la práctica de telecomunicaciones estén interesados en aprender, revisar y actualizar sus conocimientos técnicos en sistemas de comunicación. Para estos grupos, el ordenamiento de los capítulos y los frecuentes ejemplos y ejercicios hacen que el texto sea apropiado para el estudio individual.

En el resumen final de cada capítulo se incluyen listas de lecturas auxiliares recomendables. Estas referencias se seleccionaron con todo cuidado y serán accesibles y legibles para los estudiantes de licenciatura. Se listan aproximadamente en orden de dificultad creciente. En pies de página se hacen referencias a temas específicos. La mayoría de las referencias a publicaciones periódicas son a la *IEEE Communication Magazine*, publicación mensual del Institute of Electrical and Electronics Engineers que se recomienda por su excelencia en los trabajos originales, por los tutoriales y los artículos de investigación en el área de sistemas de comunicación.

Organización del texto

La organización de este texto está concebida para permitir la máxima flexibilidad en la elección y presentación de los temas. Si los capítulos 2, 3 y 8 constituyen un repaso para los estudiantes de determinado curso, queda suficiente material para un curso de un semestre. En caso de que el contenido de los primeros capítulos sea nuevo para los estudiantes, puede hacerse algún ajuste suprimiendo el material opcional de cada capítulo y excluyendo lo referente a la teoría de probabilidades (Cap. 8). El material opcional se señala con una estrella (★).

El capítulo 1 es una introducción a conceptos de sistemas de comunicación y presenta un panorama del libro. Los métodos de Fourier para el análisis de sistemas lineales se revisan en los capítulos 2 y 3, destacando en especial lo que resultará de la mayor utilidad en los capítulos subsiguientes, como son el uso de la notación compleja y la interpretación en términos de fasores y representaciones espectrales. Estos temas no siempre se desarrollan en cursos de análisis de sistemas lineales. Lo concerniente al cálculo numérico de los coeficientes de Fourier y las transformadas de Fourier discreta y rápida se están utilizando de manera creciente en aplicaciones tanto a la computación como al procesamiento de señales, y se incluyen como material opcional en los capítulos 2 y 3. Los problemas que se proponen para resolverse principalmente con métodos numéricos se indican con una marca (✓) al margen.

El material de los capítulos 4 a 7 es una introducción a los principios de sistemas de comunicación. El capítulo 4 cubre los temas de correlación, densidad espectral de potencia y ruido térmico. Esto lleva directamente al diseño de sistemas basados en consideraciones de ruido. De hecho, ya en el capítulo 4 se puede comenzar a hablar sobre el diseño de sistemas de comunicación por satélite. Los capítulos 5 a 7 cubren los temas de modulación de amplitud, de ángulo y de pulso. Tal ordenamiento está influido por mi enseñanza de este material a nivel de licenciatura; los estudiantes desean ver aplicaciones del material matemático. Para mantener su interés, los conceptos de mayor abstracción se intercalan con secciones más prácticas que muestran cómo se utilizan los conceptos. Por ello, la presentación comienza con un análisis elemental del ruido y rápidamente se centra en los sistemas de comunicación y sigue con la modulación de

http://libreria-universitaria.blogspot.com

amplitud, de ángulo y de pulso. Esto evita dedicar uno o dos capítulos completos a los cálculos de señal a ruido, tema que si se prolonga, deja de interesar al estudiante de licenciatura.

La primera parte del texto no presupone el conocimiento de la teoría de probabilidades. La presentación del material básico sin probabilidad contribuye a mantener el acento en el diseño y la modulación de señales. Este enfoque termina en el capítulo 7, y un curso impartido desde un punto de vista determinista podría terminar aquí o con un poco del contenido del capítulo 10.

Los estudiantes para quienes los primeros capítulos sean de repaso tienen un semestre para cursar el contenido de los últimos tres capítulos. Si, además, los estudiantes han tenido preparación previa en teoría de probabilidades, el capítulo 8 puede omitirse o usarse como repaso. Hay un extenso material en los capítulos 9 y 10, junto con los capítulos 4 a 7, para un curso de un semestre si se cubren las secciones opcionales de cada capítulo.

El capítulo 8 constituye una introducción al tema de la probabilidad y los procesos aleatorios, y se presenta de manera tal que los estudiantes avanzan con rapidez hasta la función de densidad de probabilidad y su empleo en el análisis de sistemas de comunicación. El capítulo 9 se apoya en este conocimiento para presentar temas como el ruido de cuantificación y la probabilidad de error en la transmisión en banda base. Si hay tiempo, se pueden cubrir las secciones sobre señalización de respuesta parcial, igualación, señalización M-aria, densidades espectrales de potencia de señales de datos y codificación para comunicaciones confiables.

El capítulo 10 es un estudio bastante completo de los métodos de modulación digital, comenzando con conmutación de amplitud, de frecuencia y de fase, que prosigue con los métodos modernos de modulación digital M-aria tales como la conmutación de fase en cuadratura, la conmutación de desplazamiento mínimo y la conmutación de amplitud y fase. Se han añadido nuevas secciones sobre sistemas de espectro expandido. El capítulo termina con las representaciones geométricas de ondas digitales y una introducción a la detección de máxima similitud. Tras completar el capítulo 10, es de esperar que el estudiante se interese en tomar un curso avanzado de teoría de la comunicación que emplee más conceptos estadísticos.

En esta tercera edición se incluyen los apéndices de la segunda debido a que los instructores hallaron en ellos fuentes de referencia útiles y accesibles. Los apéndices sobre transmisiones de radio y televisión comerciales se han revisado un poco en vista del interés del estudiante en estos temas y debido a que amplían pedagógicamente los conocimientos. Se han añadido secciones nuevas sobre televisión estéreo y de alta definición.

El material de los capítulos 4 a 9 (hasta la Sec. 9.7), más las primeras cuatro secciones del capítulo 10 (omitiendo las secciones marcadas), se utilizaron en cursos de un semestre en la University of Wisconsin en Madison, en el nivel tercero-cuarto de ingeniería eléctrica. Muchos de los estudiantes de este curso no esperan graduarse en comunicaciones pero toman el curso para ampliar sus conocimientos y porque es recomendable para áreas como procesamiento de señales, fotónica, etcétera. El material restante de los capítulos 9 y 10 se cubre en un curso posterior sobre comunicaciones para estudiantes avanzados. Otra variante podría ser resumir las secciones de señal a ruido de los capítulos 4 a 7 de manera que pudiera prestarse más atención al contenido

http://libreria-universitaria.blogspot.com

de los capítulos 9 y 10. Si se cubre todo el libro, hay suficiente material para una secuencia de dos trimestres.

Agradecimientos

Estoy en deuda con muchas personas por sus consejos y asistencia en esta tercera edición. Las sugerencias y críticas de los revisores de Addison-Wesley han sido de gran ayuda. En particular, deseo agradecer al profesor S. Hossein Mousavinezhad, de la Western Michigan University, por sus útiles comentarios y sugerencias para los problemas del capítulo 9. Los comentarios y revisiones de los profesores Joseph L. LoCicero, del Illinois Institute of Technology, Sungwon Park, de la Texas A & I University, y Wesley W. Shelton, Jr., del Florida Institute of Technology, fueron útiles e instructivos. Agradezco a Don Fowley y Tom Robbins, de Addison-Wesley, por su ayuda y estímulo para escribir esta tercera edición. Aprecio los comentarios y sugerencias hechos por estudiantes graduados que han mejorado la precisión y la claridad del texto, y su trabajo sobre algunas versiones avanzadas de mis problemas de diseño. También deseo agradecer a los profesores W.P. Birkemeier, J.A. Bucklew y B.E.A. Saleh, de la University of Wisconsin, así como a Mr. W.C. Luplow, director ejecutivo de Electronic Systems R&D, Zenith Electronics Corp., por sus comentarios y sugerencias acerca de los cambios y las adiciones a porciones específicas del texto. Aprecio sinceramente el estímulo del profesor J.L. Shohet, jefe del Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computación. Mi aprecio se extiende también a aquellos que me ayudaron en las dos ediciones anteriores de este libro.

Expreso mis agradecimientos por la retroalimentación constructiva y el apoyo de mis estudiantes. Sus comentarios y su fresca intuición aún me asombran, y hacen que mi cátedra sea un placer.

También hago extensivo mi aprecio a quienes colaboraron en las dos primeras ediciones de este libro. Al respecto, encontré de gran utilidad ciertos conceptos y ejemplos ilustrativos en el libro, ya agotado, del profesor B. P. Lathi, *Communications Systems* (1968), una de las fuentes de referencia más valiosas y con autoridad en el campo.

Madison, Wisconsin F.G.S

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Índice general

CAPÍTULO 1 Introducció 1

CAPÍTULO 2 Ortogonalidad y representaciones de señales 8

2.1 Señales y sistemas 8
2.2 Clasificación de las señales 10
2.3 Clasificación de los sistemas 12
★ 2.4 Señales y vectores 13
★ 2.5 Funciones ortogonales 15
★ 2.6 Elección de un conjunto de funciones ortogonales 21
2.7 Serie exponencial de Fourier 23
2.8 Señales y representaciones complejas 26
2.9 Representación en serie de Fourier trigonométrica 29
2.10 Extensión por periodicidad 33
2.11 Teorema de Parseval para señales de potencia 36
2.12 Función de transferencia en frecuencia 38
2.13 Respuesta de estado estacionario a señales periódicas 40
2.14 Generación de armónicos 42
2.15 Espectro de Fourier y ejemplos 44
★ 2.16 Cálculo numérico de los coeficientes de Fourier 50

http://libreria-universitaria.blogspot.com

★ 2.17 Efectos de los términos alias 53
2.18 Funciones singulares 59
2.19 Respuesta al impulso 65
★ 2.20 Convergencia de la serie de Fourier 66
2.21 Resumen 69
Problemas 71

CAPÍTULO 3 La transformada de Fourier y sus aplicaciones 82

3.1 Representación de una función aperiódica sobre el eje real completo 82
3.2 Función de densidad espectral 85
★ 3.3 Existencia de la transformada de Fourier 87
3.4 Teorema de Parseval para señales de energía 88
3.5 Algunas transformadas de Fourier que incluyen funciones impulso 89
3.6 Propiedades de la transformada de Fourier 96
3.7 Algunas relaciones de convolución 109
3.8 Interpretación gráfica de la convolución 111
3.9 Características de filtro de los sistemas lineales 114
3.10 Filtros transversales 116
3.11 Ancho de banda de un sistema 118
3.12 Requisitos para la transmisión sin distorsión 119
3.13 Respuesta de los filtros en el tiempo 120
★ 3.14 Producto tiempo por ancho de banda mínimo 124
3.15 Teorema del muestreo 126
★ 3.16 Efectos alias en el muestreo 131
★ 3.17 Transformada de Fourier discreta 135
★ 3.18 Transformada de Fourier rápida 141
3.19 Resumen 145
Problemas 147

http://libreria-universitaria.blogspot.com

CAPÍTULO 4 Densidad espectral y correlación 163

4.1 Densidad espectral de energía 163
4.2 Densidad espectral de potencia 168
4.3 Representaciones del ruido promediado en el tiempo 176
4.4 Funciones de correlación 179
4.5 Algunas propiedades de las funciones de correlación 184
4.6 Funciones de correlación para señales de energía finita 187
4.7 Ruido blanco de banda limitada 188
4.8 Resumen 208
Problemas 209

CAPÍTULO 5 Modulación de amplitud 219

5.1 Modulación de amplitud: portadora suprimida 219
5.2 Modulación de amplitud: gran portadora (AM) 238
5.3 Multiplexión por división en frecuencia (FDM) 249
5.4 Modulación de banda lateral única (SSB) 255
5.5 Modulación de banda lateral residual (VSB) 266
5.6 Representación en el tiempo del ruido pasabanda 268
5.7 Razones señal a ruido en la recepción AM 271
5.8 Efectos de propagación 277
5.9 Comparación de varios sistemas AM 281
5.10 Resumen 282
Problemas 284

http://libreria-universitaria.blogspot.com

CAPÍTULO 6 Modulación de ángulo 298

6.1 FM y PM 298
6.2 FM de banda angosta 301
6.3 FM de banda ancha 306
6.4 Potencia promedio en señales de ángulo modulado 317
6.5 Modulación de fase 319
6.6 Generación de señales FM de banda ancha 321
6.7 Demodulación de señales FM 327
6.8 Razón señal a ruido en la recepción de FM 345
6.9 Efecto de umbral en FM 351
6.10 Mejora de la razón señal a ruido usando deénfasis 355
6.11 Resumen 359
Problemas 361

CAPÍTULO 7 Modulación de pulso 371

7.1 Modulación de amplitud de pulso (PAM) 372
7.2 Multiplexión por división de tiempo (TDM) 377
7.3 Formación de pulsos e interferencia entre símbolos 386
7.4 Otros tipos de modulación de pulso analógica: PWM y PPM 390
7.5 Razones señal a ruido en la modulación de pulso analógica 399
7.6 Modulación de código de pulsos (PCM) 402
7.7 Sistemas de comunicación por fibra óptica 413
7.8 Uso de la paridad y la redundancia en PCM 417
7.9 Multiplexión por división de tiempo de señales PCM 419
7.10 Red digital de servicios integrados (ISDN) 429

http://libreria-universitaria.blogspot.com

7.11 Filtro acoplado 431
7.12 Detección de palabras de código con el filtro acoplado 437
7.13 Secuencias de ruido falso (PN) 439
7.14 Resumen 443
Problemas 445

CAPÍTULO 8 Probabilidad y variables aleatorias 457

8.1 Probabilidad 457
8.2 Probabilidad condicional e independencia estadística 461
8.3 Variable aleatoria y función de distribución acumulativa 463
8.4 Función de densidad de probabilidad 466
8.5 Promedios estadísticos 471
8.6 Algunas distribuciones de probabilidad 477
★ 8.7 Histograma 485
★ 8.8 Transformaciones de variables aleatorias 487
8.9 Funciones de densidad conjunta y condicional 490
★ 8.10 Correlación entre variables aleatorias 493
★ 8.11 Distribución gaussiana bivariada 497
8.12 Procesos aleatorios 498
8.13 Autocorrelación y espectros de potencia 504
★ 8.14 Cálculo numérico de los espectros de potencia 515
8.15 Resumen 517
Problemas 519

CAPÍTULO 9 Información y transmisión digital 531

9.1 Una medida de la información 531
9.2 Capacidad del canal 536
9.3 Ganancia de detección del demodulador ideal 540

http://libreria-universitaria.blogspot.com

9.4 Ruido de cuantificación **541**
9.5 Probabilidad de error en la transmisión **547**
9.6 Comportamiento *S/N* de la PCM **558**
9.7 Modulación delta y DPCM **560**
★ 9.8 Análisis de errores de los repetidores PCM **564**
★ 9.9 Densidades espectrales de potencia de las señales de datos **567**
9.10 Señalización de respuesta parcial **572**
9.11 Igualación **577**
9.12 Señalización *M*-aria **584**
★ 9.13 Codificación para una comunicación confiable **589**
9.14 Resumen **594**
Problemas **596**

CAPÍTULO 10 Modulación digital **608**

10.1 Conmutación de amplitud (ASK) **608**
10.2 Conmutación de frecuencia (FSK) **610**
10.3 Conmutación de fase (PSK) **618**
10.4 Comparación entre sistemas de modulación digital binaria **626**
10.5 Sistemas de espectro expandido por secuencia directa **627**
10.6 AM en cuadratura (QAM) y PSK cuaternaria (QPSK) **634**
10.7 FSK de fase continua (CPFSK) y conmutación de desplazamiento mínimo (MSK) **641**
★ 10.8 FSK ortogonal *M*-aria **651**
10.9 Sistemas de espectro expandido por salto de frecuencia (FH) **655**
10.10 PSK *M*-aria **659**
10.11 Conmutación de amplitud y fase (APK) **663**
10.12 Comparación de sistemas de modulación digital **666**
★ 10.13 Representación de señales digitales **668**

http://libreria-universitaria.blogspot.com

★ 10.14 Algoritmos de detección óptima **673**
10.15 Resumen **678**
Problemas **680**

APÉNDICES

A Tablas matemáticas seleccionadas **693**
B Decibeles **698**
C Bandas de frecuencias de radiodifusión **700**
D Transmisiones de televisión comercial **708**
E Canales telefónicos **729**
F Algunos sistemas comerciales de preénfasis/deénfasis **732**
G Tabla de funciones de Bessel **735**
H AM estéreo **737**
I Tabla de probabilidades gaussianas **746**
J Abreviaturas y tablas **749**

Índice de materias **751**

http://libreria-universitaria.blogspot.com

CAPÍTULO

1 Introducción

Es difícil imaginar cómo sería la vida moderna sin el fácil acceso a medios de comunicación confiables, económicos y eficientes. Los sistemas de comunicación se hallan dondequiera que se transmita información de un punto a otro. El teléfono, la radio y la televisión son ejemplos cotidianos de sistemas de comunicación. Hay sistemas de comunicación más complicados que guían aviones, naves espaciales y trenes automáticos; mientras que otros proporcionan noticias frescas de todo el mundo, a menudo por medio de satélites; la lista de ejemplos podría continuar indefinidamente. No es exagerado decir que los sistemas de comunicación actuales no sólo son necesarios para los negocios, la industria, la banca y la divulgación de información al público, sino también esenciales para el bienestar y la defensa de las naciones.

El propósito de este libro es presentar un estudio introductorio de los sistemas de comunicación. Por "comunicación" se entiende la conducción o transmisión de información de un lugar y un tiempo a otros. Ciertamente esta definición no es muy precisa, pero el tema de la comunicación es muy amplio. Puede, por ejemplo, significar cualquier cosa, desde una conferencia telefónica hasta el uso de gestos adecuados, énfasis y buena dicción en un discurso; desde una señal de humo hasta una transmisión por satélite. El común denominador de estos ejemplos es que existe información transmitida que es de importancia para el receptor.

Este estudio de las comunicaciones se restringirá a la transmisión de información a través de distancias relativamente largas. El empleo de señales eléctricas ha reemplazado casi por completo a todas las demás formas de transmisión de información a largas distancias. Esto se debe, sobre todo, a que las señales eléctricas son relativamente fáciles de controlar (comparadas, por ejemplo, con el fuego para las señales de humo) y viajan a velocidades cercanas o iguales a la de la luz. En el más amplio sentido, debe considerarse a la luz como perteneciente a esta clase, dado que se encuentra en el espectro electromagnético. Así, para largas distancias es apropiado el estudio de las comunicaciones a través de señales eléctricas.

¿Qué es la transmisión de información? Este tema resulta más complicado de lo que podría parecer y formará, de hecho, la base de una parte de este estudio. Desde un punto de vista estrictamente intuitivo, puede decirse que la transmisión de información requiere que las señales varíen con el tiempo. Tómese, por ejemplo, una batería de 9 V; una vez establecida la tensión, existe poca información adicional si ésta no cambia. La conexión de la batería a un transistor o resistor variable permite tal variación. No obstante, el simple hecho de que la señal pueda variar con el tiempo no es suficiente. Considérese una tensión senoidal de 120 V y 60 Hz; habiéndose establecido la tensión,

http://libreria-universitaria.blogspot.com

hay poca información adicional disponible sin cambiar la amplitud o la fase, a pesar de que la tensión esté cambiando a razón de 60 Hz.

Puede concluirse que la transmisión de información no sólo está relacionada con señales que cambian en el tiempo, sino también que estos cambios deben sucederse de manera impredecible. Por tanto, un requisito necesario es el empleo de una banda que contiene las frecuencias de las señales, conocida como ancho de banda (Cap. 3). El ancho de banda es una medida de la rapidez con que pueden cambiar porciones portadoras de información y, por tanto, constituye un importante parámetro en cualquier análisis de sistemas de comunicación. Estas ideas intuitivas respecto a la transmisión de información serán suficientes para estudiar los métodos básicos usados en los sistemas de comunicación eléctricos. Sin embargo, una descripción matemática más completa de la transmisión de información requiere también de ciertos conocimientos de probabilidad (Cap. 8), y se postergará hasta el capítulo 9.

La comunicación a largas distancias necesita que se efectúen algunas alteraciones u otras operaciones en la señal eléctrica que conducirá la información preparada para transmitirse. Tras la recepción, se efectúan las operaciones inversas conocidas para restaurar la información.

En el proceso de transmisión, las señales que portan la información se contaminan con ruido. Éste es generado por numerosos hechos naturales y artificiales, y provoca errores en la transmisión de información. Desde el punto de vista de la ingeniería, el problema de la comunicación estriba en el diseño de las partes de la transmisión sobre las que puede ejercerse algún control. Un criterio para esto es mantener la transmisión de información tan libre de errores como sea posible.

Con estos objetivos en mente, se examinarán diferentes sistemas de comunicación y sus principios básicos de operación. Se destacarán los métodos y no los circuitos o dispositivos particulares que se emplean normalmente.

En la figura 1.1 se muestran las unidades básicas comprendidas en un sistema de comunicación. No todos los sistemas incluyen la totalidad de las operaciones indicadas, aunque siempre emplean un medio de transmisión de alguna clase. El codificador elige la mejor forma de la señal para optimizar su detección en la salida. El decodificador efectúa la operación inversa para tomar la mejor decisión, basada en las señales disponibles, de que un mensaje dado fue efectivamente enviado. El diseño del codificador y el decodificador debe basarse en una detallada descripción matemática de la transmisión de información. Aunque el tema de la codificación suele tener cierto aire de secreto, un motivo más importante en muchos sistemas de comunicación modernos es mejorar la eficiencia en la conducción de la información.

El modulador produce una señal variable en la salida, que es proporcional, de algún modo, a la señal que aparece en sus terminales de entrada. Por ejemplo, un modulador

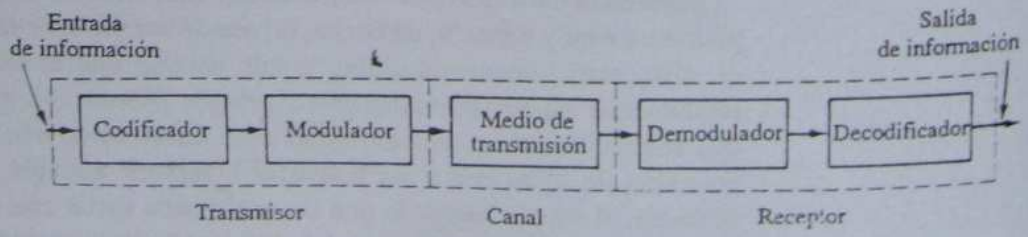


Figura 1.1 Sistema de comunicación.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

senoidal puede variar la amplitud, la frecuencia o la fase de una señal senoidal en proporción directa a la tensión de entrada. Las funciones del codificador y del modulador son semejantes en lo que respecta a la preparación de la señal para una transmisión más eficiente. Sin embargo, el proceso de codificación está concebido para optimizar la detección de errores en un mensaje que se está transmitiendo, mientras que el proceso de modulación está diseñado para imprimir la señal de información sobre la onda que se va a transmitir. El demodulador realiza la operación inversa al modulador para restaurar la señal a su forma original.

El medio de transmisión es la piedra angular del sistema. Sin él no existirían problemas de comunicación. El medio de comunicación puede incluir la ionosfera, la troposfera, el espacio libre o simplemente una línea de transmisión. En todo caso se introducen la atenuación y la distorsión, así como las señales de ruido generadas en los medios y en los equipos de tansmisión y recepción. Para el propósito de este libro, las señales de ruido son cualesquiera señales eléctricas (tensiones o corrientes) que interfieran con la recepción libre de errores de la señal portadora del mensaje.

Las líneas discontinuas de la figura 1.1 indican tres subsistemas básicos de un sistema de comunicación. El subsistema central restringe el flujo de información y se llama *canal*. El canal incluye los efectos del ruido aditivo, la interferencia, la propagación y la distorsión. Es el factor limitante del rendimiento de cualquier sistema de comunicación bien diseñado. La función del *transmisor* es preparar la información para enviarla en forma tal que pueda superar lo mejor posible las limitaciones impuestas por el canal. La función del *receptor* es efectuar las operaciones inversas a las del transmisor para recuperar la información con la menor cantidad de errores posible. Nótese que, en sentido amplio, el transmisor y el receptor, en pareja, están diseñados de manera específica para combatir los efectos perniciosos del canal en la transmisión de información.

El sistema de comunicación mostrado en la figura 1.1 es capaz de transmitir en un sentido y se llama sistema de transmisión *símplex* (SX). En muchos casos es deseable mantener una comunicación en dos sentidos o, al menos, poder devolver un mensaje a su origen para una posible verificación, comparación o control. Una manera de obtener esto es utilizar el mismo canal de manera alterna para transmitir en ambas direcciones, como se muestra en la figura 1.2. Este método se llama *semidúplex* (HDX, *half-duplex*).

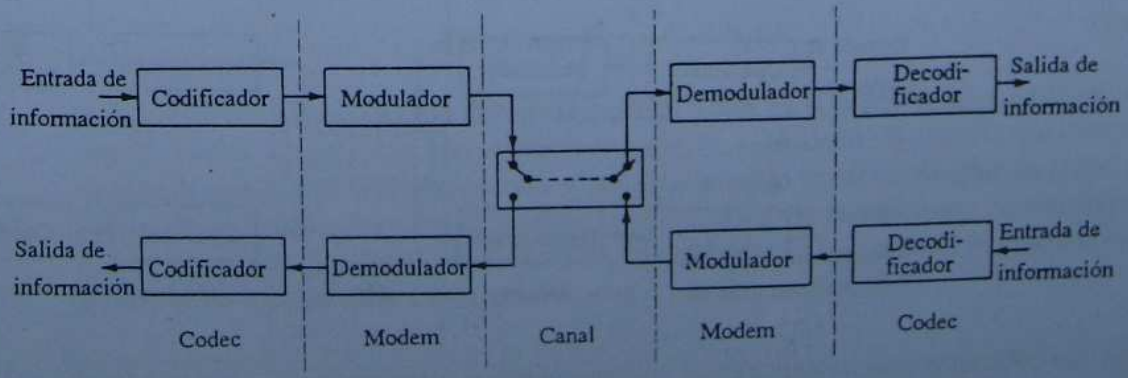


Figura 1.2 Sistema de comunicación que usa una transmisión semidúplex.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Aunque la comunicación fluye en ambas direcciones, en un momento dado el flujo de información se realiza en un solo sentido.

En la figura 1.3 se muestra un tercer tipo, el *dúplex completo* (FDX, *full-duplex*). En éste, se obtiene comunicación simultánea en ambos sentidos. Nótese que tanto en la transmisión HDX como en la FDX, los moduladores y demoduladores operan en parejas. Esta combinación de modulador y demodulador se llama *modem* (*mo*dulador-*dem*odulador) en los sistemas de transmisión de datos. Tambien los codificadores y decodificadores trabajan en pares, dando así origen al término *codec* (*co*dificador-*dec*odificador).

Considérese ahora un canal en el que el único perjuicio a la transmisión proviene del ruido aditivo. Como ya se mencionó, para la comunicación es necesario un ancho de banda mínimo B. Un ancho de banda mayor permitiría más interferencia del ruido con la transmisión de información, por lo que es importante mantener el ancho de banda de dicho canal tan reducido como sea posible.

El ruido presente se caracteriza por su potencia media N y la señal transmitida por su potencia media S. Si la potencia media del ruido es relativamente pequeña, la potencia de la señal no necesita ser muy grande para que el receptor determine qué información se está enviando (por supuesto, también interesa la eficiencia y, por tanto, se intenta minimizar la potencia transmitida necesaria para conducir la información al usuario). Por el contrario, la potencia media de la señal debe ser relativamente grande cuando la potencia del ruido es grande. Así, se deduce que lo que importa es la *razón* entre la potencia media de la señal y la potencia media del ruido, y no las propias magnitudes de S y N. Esta razón S/N, llamada *razón señal a ruido*, es un importante parámetro en la teoría y el diseño de sistemas de comunicación.

Todos los sistemas de comunicación pueden juzgarse en términos de ancho de banda, razón señal a ruido y factores económicos (costo). En todo tipo de sistema existen varios compromisos entre estos parámetros, los cuales examinaremos más adelante. La razón señal a ruido incluye tanto la potencia transmitida como el criterio de desempeño, por lo que para algunos sistemas es más conveniente el concepto de compromisos de desempeño de tres vías mostrado en la figura 1.4. Algunos de los compromisos de ancho de banda y razón señal a ruido se destacan en el siguiente análisis somero de sistemas digitales.

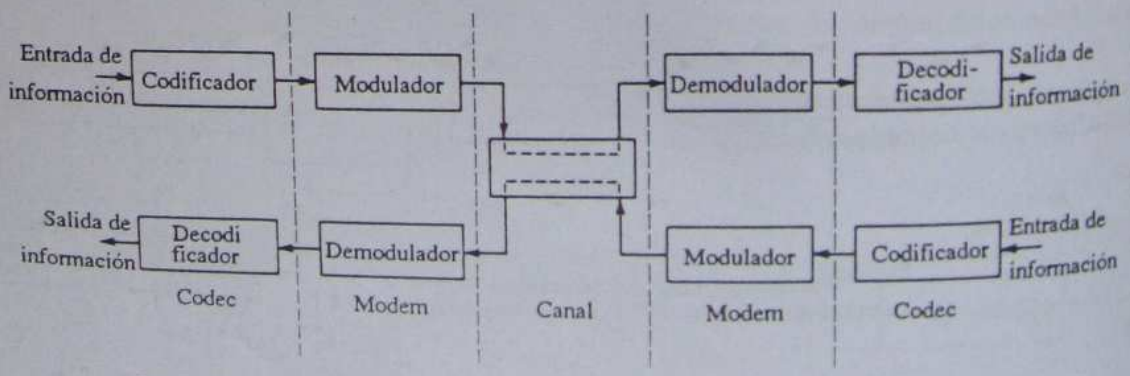


Figura 1.3 Sistema de comunicación que usa una transmisión dúplex completa.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

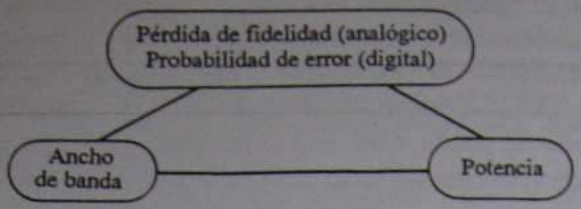


Figura 1.4 Factores de compromiso en el desempeño de sistemas de comunicación.

Se supone (al menos de manera provisional) que los sistemas de comunicación son digitales y, específicamente, binarios. Supóngase, pues, que la información que se desea enviar en un momento dado puede caracterizarse por una muestra de entre n posibles entradas, todas con la misma probabilidad de ocurrencia. Por ejemplo, esta muestra podría ser uno de 256 niveles de tensión igualmente probables. Para enviar esta muestra usando un sistema binario, primero se genera una palabra digital compuesta por m símbolos binarios. Por tanto, cada palabra binaria consta de $m = \log_2 n$ dígitos binarios para representar una muestra de entre $n = 2^m$ posibilidades. Cuando se usa de esta manera, m se llama número de *bits* (bi*nary dig*its, dígitos binarios) necesarios para representar a uno de entre n posibles estados de entrada. Por ejemplo, en este caso se necesita una palabra de ocho bits para describir uno de los 256 posibles estados de entrada.

A continuación, se desea enviar esta palabra binaria de m bits en sucesión a través del canal. En un sistema binario, estos bits se representan con símbolos binarios (p. ej., +1 y −1) que se generan a razón de r símbolos por segundo. La tasa de información desde el transmisor es $R = mr$ bits por segundo (bps). En el receptor, la señal transmitida se adultera por la adición de ruido y, como resultado, el receptor cometerá algunos errores. Se antoja razonable que la cantidad de errores disminuya si aumenta S/N. También parece razonable que puedan reducirse los errores con un receptor diseñado para procesar señales de mayor complejidad. Entonces, ya que el interés se centra tanto en la eficiencia como en la precisión de la comunicación, la siguiente es una pregunta de gran importancia: para un canal dado y para una tasa de transmisión de información dada, ¿es teóricamente posible mejorar el sistema con el objeto de reducir los errores? La respuesta, con base en el trabajo teórico de Claude Shannon publicado en 1949[†] es afirmativa si la tasa de transmisión de información es tal que $R \leq C$, donde C es la *capacidad del canal*. Para el tipo de canal considerado aquí, la capacidad está dada por la ley de Hartley-Shannon

$$C = B \log_2 (1 + S/N) \quad \text{bps} \tag{1.1}$$

donde B es el ancho de banda del canal (en Hz) y S/N es la razón señal a ruido. Si se intenta enviar información con demasiada rapidez —es decir, $R > C$—, los errores empiezan a aumentar aceleradamente y no tiene sentido tratar de diseñar un sistema para mejorar la situación. Por otra parte, si $R < C$, hay cierta esperanza de mejorar a través de un buen diseño del sistema. Todos los sistemas de comunicación examinados en este texto estarán entre los límites definidos por la ecuación (1.1).

[†] C.E. Shannon, "Communication in the Presence of Noise", *Proceedings of the IRE*, vol. 37, enero de 1949, págs. 10-21.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Prosiguiendo con el razonamiento intuitivo, supóngase que se decide aumentar la tasa de transmisión de información aumentando la rapidez de los símbolos r. Puesto que son posibles más transiciones de símbolos por segundo, debe aumentarse el ancho de banda necesario. Por tanto, se puede lograr un aumento en la tasa de la información con un aumento del ancho de banda. Con esto simplemente se destaca la conclusión que podría obtenerse de la aplicación directa de la ecuación (1.1). Sin embargo, lo sorprendente es que la ecuación (1.1) establece que el ancho de banda y la razón señal a ruido se pueden intercambiar. Por tanto, si se aumenta el ancho de banda, se puede lograr una razón S/N menor, y viceversa. Nótese que con S/N pequeño, el intercambio potencial es aproximadamente lineal,

$$\log_2 (1 + x) \approx (\log_2 e)x \qquad \text{para } x \text{ pequeña},$$

pero es exponencial para S/N grande.

Se deduce así que la ley de Hartley-Shannon es aplicable a sistemas tanto continuos como discretos, por lo que es un resultado de gran poder y alcance. No obstante, su aplicación se restringe a canales con ruido aditivo, y no se incluyen efectos como la distorsión y la interferencia.

La ley de Hartley-Shannon establece que existen cotas para la máxima tasa de transmisión de información en un canal dado y plantea que el ancho de banda puede intercambiarse con S/N, pero no ofrece un método para diseñar un sistema que cubra estos requisitos. En otras palabras, fija una cota con la que puede compararse el comportamiento de los sistemas que se diseñan, pero no da un procedimiento para diseñar sistemas cuyo comportamiento se ajuste a esa cota. Pero no debe esperarse tanto. Es una fortuna disponer del resultado anterior.

Con esta breve introducción a los sistemas de comunicación, volvemos ahora a la cuestón del enfoque y la organización de este texto.

El propósito de este libro es analizar las caracteristicas principales de los sistemas de comunicación y examinar algunas de sus realizaciones prácticas. El enfoque se hará desde el punto de vista de los sistemas, en lugar de estudiar los circuitos y dispositivos. Esto requerirá descripciones matemáticas y representaciones de las señales eléctricas (es decir, tensiones y corrientes) que caracterizan a tales sistemas.

Los métodos de Fourier para el análisis de señales resultan ser los más útiles en este estudio. La aplicación de estos métodos a menudo proporciona valiosas observaciones sobre aspectos del diseño de señales en los sistemas de comunicación. Estos métodos se presentan y desarrollan en la primera parte del libro. En los capítulos que siguen se hace una introducción a los sistemas de comunicación tanto desde el punto de vista del análisis como del de las aplicaciones.

Referencias seleccionadas para lectura adicional†

1. Carlson, A.B., *Communication Systems*, 3a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1986.

† Las referencias seleccionadas para lectura adicional sobre el material cubierto se incluyen al final de cada capítulo. En general, se listan en orden creciente de dificultad.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

El capítulo 1 de este texto contiene un buen análisis introductorio sobre comunicación, sistemas de comunicación y modulación.

2. Gregg, W. D., *Analog and Digital Communication*, Nueva York, John Wiley & Sons, 1977.
   El capítulo 1 tiene una buena descripción introductoria a los aspectos históricos, la asignación de frecuencias, las licencias y los reglamentos.
3. Schwartz, M., *Information Transmission, Modulation, and Noise*, 3a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1980.
   En el primer capítulo se proporciona una formulación matemática de la transmisión de información y de los sistemas de comunicación para el estudiante interesado.
4. Sklar, B., *Digital Communications*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1988.
   En la primera parte del capítulo 1 se presenta un interesante bosquejo de los sistemas de comunicación digitales, basado en un artículo en dos partes publicado por el autor.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

CAPÍTULO

2 Ortogonalidad y representaciones de señales

Se empezará por repasar algunos conceptos de señal y de representaciones de sistemas, que serán de utilidad más adelante. Por ejemplo, el concepto de ortogonalidad conduce al uso de las series de Fourier, que a su vez se utilizan para exponer los conceptos de señal y de representaciones de sistemas, tanto en tiempo como en frecuencia.

2.1 SEÑALES Y SISTEMAS

En sentido general, un *sistema* es un grupo de objetos que pueden interactuar de forma armónica y que se combinan con el propósito de alcanzar determinado objetivo. Un sistema puede, a su vez, ser una porción (un subsistema) de un sistema mayor. Puede establecerse una jerarquía completa de sistemas, cada uno con su dominio definido.

Una *señal* es un suceso que sirve para comenzar una acción, o al menos es capaz de iniciarla; es decir, puede incitar a la acción. Con las restricciones de energía y potencia, el interés se centra en el concepto de señal y en la *respuesta* de un sistema a una señal dada. En el diagrama de la figura 2.1 se muestra la función de la señal, del sistema y de la respuesta. Aunque en primer término se presentó el concepto de sistema, con frecuencia será más conveniente usar los conceptos de señal y respuesta resultante para describir las características de un sistema. De hecho, éste se conocerá, en ocasiones, en términos de su respuesta a señales dadas.

Para los propósitos de este libro, una señal se define como una función univaluada del tiempo; es decir, a cada instante de tiempo asignado (la variable independiente) corresponde un valor único de la función (la variable dependiente). Este valor puede ser un número real, en cuyo caso se tiene una señal de valor real, o puede ser complejo, y se tendrá una señal de valor complejo. En cualquier caso, la variable independiente (el tiempo) tiene valor real.

Se puede utilizar la notación compleja para describir señales en términos de dos variables independientes, por ejemplo $x(t)$ y $y(t)$. Por tanto, la notación compleja es conveniente para describir fenómenos bidimensionales como el movimiento circular, la

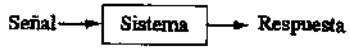


Figura 2.1 Diagrama de un sistema.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

propagación de ondas en el plano, etc., como una función del tiempo. Sin embargo, las señales utilizadas en este libro se expresan en términos del tiempo y de una sola variable dependiente (p. ej., tensión contra tiempo). Debido a la limitación a una sola variable dependiente, se insiste en que todas las señales que correspondan a cantidades físicamente observables deben tener valor real.

Sin embargo, ¿por qué usar entonces notación compleja si las observaciones tienen valor real? En muchos análisis, los modelos y cálculos matemáticos son a menudo más simples, e incluso parecen más obvios, si se usa notación compleja. Debido a su conveniencia, la notación compleja resulta una ventaja definitiva. Después de efectuar todas las operaciones, tomar la parte real de la expresión resultante es algo muy simple. Este procedimiento sirve siempre que pueda aplicarse la superposición; se debe tener cuidado al aplicarlo a casos más generales.

Las observaciones anteriores pueden aplicarse a la descripción y al análisis de procesos físicos en general. Aquí habrá que restringirlas a la descripción y al análisis de señales y sistemas *eléctricos*.

Una señal eléctrica puede ser de tensión o de corriente y se puede describir en forma matemática. El interés no radica en "caídas de tensión", "corrientes de malla", etc., sino en las variaciones de las señales con el tiempo, sean éstas tensiones o corrientes. En consecuencia, una señal es simplemente una función univaluada del tiempo que se puede emplear para representar una tensión o una corriente en una situación específica. En ocasiones pueden aparecer excepciones, sobre todo en análisis que impliquen energía y potencia. En este caso, una manera conveniente de obviar cualquier complicación es incorporar un resistor de un ohm. El valor de un resistor particular escalará el resultado, una vez establecida la identidad de la señal. Para todos los cálculos de energía y potencia, se supone un resistor de un ohm, salvo que se indique otra cosa en un problema dado.

Las señales senoidales desempeñan un papel primordial en el análisis de los sistemas de comunicación. Tales señales $f(t)$ se pueden representar como una función del tiempo t por medio de la ecuación

$$f(t) = A \cos(\omega t + \theta), \tag{2.1}$$

donde A es la amplitud, θ es la fase y ω es la rapidez de cambio de fase o frecuencia de la senoidal en radianes por segundo. f también se puede expresar en ciclos por segundo (Hz), donde $\omega = 2\pi f$.[†]

El principio de los métodos de Fourier para el análisis de señales es descomponer todas las señales en sumatorias de componentes senoidales. Esto proporciona la descripción de una señal dada en términos de frecuencias senoidales. Un objetivo importante es la descripción de cómo están distribuidas la energía y la potencia de la señal (y la respuesta) en términos de tales frecuencias. Cualquier descripción de una respuesta a una señal dada mostrará, por supuesto, las características del sistema.

[†] La unidad de frecuencia en ciclos por segundo (cps) generalmente aceptada es el *hertz*, que se abrevia Hz. Con los prefijos multiplicadores se tiene: 1 kHz (un kilohertz) = 10^3 cps; 1 MHz (un megahertz) = 10^6 cps; 1 GHz (un gigahertz) = 10^9 cps.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

2.2 CLASIFICACIÓN DE LAS SEÑALES

El mejor método de representación de señales en una situación dada depende del tipo de señal que se considere. Aquí se estudian algunas de las clasificaciones más útiles.

Señales de energía, señales de potencia

Una señal de energía es una señal en forma de pulso que normalmente existe sólo durante un intervalo finito de tiempo o, aun cuando se encuentre presente por un lapso infinito, tiene, al menos, la mayor parte de su energía concentrada en un intervalo finito de tiempo.

Para los sistemas eléctricos, una señal es una tensión o una corriente. La potencia instantánea disipada por una tensión $e(t)$ en una resistemcia R es

$$p = |e(t)|^2/R \qquad \text{watts}, \tag{2.2}$$

y para una corriente $i(t)$

$$p = |i(t)|^2 R \qquad \text{watts}. \tag{2.3}$$

En cada caso, la potencia instantánea es proporcional al cuadrado de la magnitud de la señal. Para una resistencia de un ohm, estas ecuaciones toman la misma forma, por lo que es usual, en el análisis de señales, referirse a la potencia instantánea asociada con una señal dada $f(t)$ como

$$p = |f(t)|^2 \qquad \text{watts}. \tag{2.4}$$

Aunque puede parecer que las dimensiones no son correctas en la ecuación (2.4), la convención implica multiplicar o dividir por una resistencia adecuada.

De acuerdo con esta convención, la energía disipada por la señal durante un intervalo de tiempo (t_1, t_2) es

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 \, dt \qquad \text{joules}. \tag{2.5}$$

Se define como una *señal de energía* aquella para la cual la ecuación (2.5) es finita, aun cuando el intervalo de tiempo sea infinito; esto es, cuando

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt < \infty. \tag{2.6}$$

En la figura 2.2 se muestran varios ejemplos de señales de energía.

La potencia media disipada por la señal $f(t)$ durante el intervalo de tiempo (t_1, t_2) es

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 \, dt. \tag{2.7}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

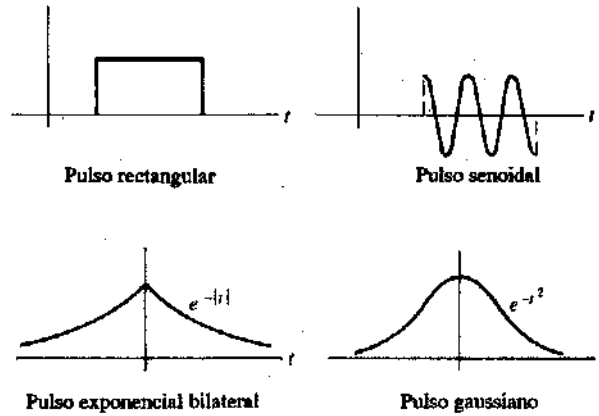


Figura 2.2 Algunas señales de energía.

Si el término de la derecha de la ecuación (2.7) se mantiene finito pero distinto de cero cuando el intervalo de tiempo se vuelve infinito, es decir, si

$$0 < \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \, dt < \infty, \tag{2.8}$$

entonces la señal $f(t)$ tiene potencia media finita y se llama *señal de potencia*.

Periódica, no periódica

Una *señal periódica* es la que se repite exactamente a sí misma después de un lapso de tiempo fijo. Por tanto, la señal $f(t)$ es periódica si existe un número T tal que:

$$f(t + T) = f(t) \quad \text{para toda } t. \tag{2.9}$$

El menor número positivo T que satisfaga la ecuación (2.9) se llama *periodo*. El periodo define la duración de un ciclo completo de $f(t)$. Toda señal periódica es una señal de potencia si su energía por ciclo es finita, y entonces la potencia media sólo necesita calcularse en un ciclo completo.

Se dice que cualquier señal para la que no exista un valor de T que satisfaga la ecuación (2.9) es *no periódica* o *aperiódica*. Un caso intermedio entre las señales periódicas y las no periódicas es la "señal casi periódica". Este tipo de señal está compuesto por la suma de dos o más señales periódicas con periodos inconmensurables.[†] Un ejemplo de tal señal es

$$f(t) = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} \sqrt{2}\, t. \tag{2.10}$$

Esta función es "casi periódica" dado que cada término de la derecha es periódico, aunque no hay periodo T en el cual $f(t)$ se repita exactamente a sí misma.

[†] Dos periodos son conmensurables si su cociente puede expresarse como el cociente de dos enteros.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Aleatoria, determinista

Una *señal aleatoria* es aquella sobre la que se tiene algún grado de incertidumbre antes de que ocurra realmente. Esta señal se puede considerar como perteneciente a un conjunto de señales, todas ellas diferentes. Si se elige (al azar) una de estas señales, podría suceder que estuviera bastante bien definida como, por ejemplo, una senoidal de frecuencia fija pero cuya fase de inicio fuera incierta. Sin embargo, si se eligiera una segunda senoidal de este conjunto, no podría asegurarse que tiene la misma fase de inicio. En otros casos, los valores futuros de la señal quizá no sean predecibles aun después de la observación de valores pasados. Un ejemplo de señal aleatoria es la salida de un receptor de radio cuando, al sintonizarlo, responde a ruido proveniente de alteraciones atmosféricas y de sus circuitos internos.

Una señal *no aleatoria* o *determinista* es aquella sobre cuyos valores no existe incertidumbre. Casi siempre puede escribirse una expresión matemática explícita para tales señales. Las señales que se estudiarán en la primera parte de este libro son no aleatorias. A medida que se desarrollen nuevos métodos de análisis, se empezará a ver cómo manejar también ciertos tipos de señales aleatorias.

2.3 CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS

Matemáticamente, un sistema es una regla usada para asignar una función $g(t)$ (la salida) a una función $f(t)$ (la entrada); esto es,

$$g(t) = \mathcal{T}\{f(t)\}, \tag{2.11}$$

donde $\mathcal{T}\{\ \}$ es la regla.† Esta regla puede estar en forma de operación algebraica, de ecuación diferencial e integral, etcétera. En dos sistemas conectados en cascada, la salida del primero es la entrada del segundo, formando así un nuevo sistema completo:

$$g(t) = \mathcal{T}_2\{\mathcal{T}_1[f(t)]\} = \mathcal{T}\{f(t)\}. \tag{2.12}$$

Como en el análisis de señales, resulta conveniente clasificar los sistemas por algunas de sus propiedades básicas. A continuación se estudian las más útiles.

Lineal, no lineal

Si un sistema es *lineal*, se aplica la superposición; esto es, si

$$g_1(t) = \mathcal{T}\{f_1(t)\}, \quad \text{y} \quad g_2(t) = \mathcal{T}\{f_2(t)\},$$

entonces

$$\mathcal{T}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t), \tag{2.13}$$

donde a_1 y a_2 son constantes. Un sistema es *lineal* si satisface la ecuación (2.13). Cualquier sistema que no lo haga es *no lineal*.

† El símbolo usado aquí es la "t" manuscrita. En capítulos posteriores se utilizan otras letras manuscritas para designar operadores específicos.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Invariable en el tiempo o variable en el tiempo

Un sistema es *invariable en el tiempo* si un desplazamiento de tiempo en la entrada provoca un desplazamiento en el tiempo correspondiente en la salida, de manera que

$$g(t - t_0) = \mathcal{T}\{f(t - t_0)\} \quad \text{para cualquier } t_0. \tag{2.14}$$

La salida de un sistema invariable en el tiempo depende de diferencias de tiempo y no de los valores absolutos del tiempo. Cualquier sistema que no cumpla este requisito se dice que es *variable en el tiempo*. Un sistema puede ser lineal aunque variable en el tiempo y viceversa. Dos ejemplos de tales sistemas se muestran en la figura 2.3.

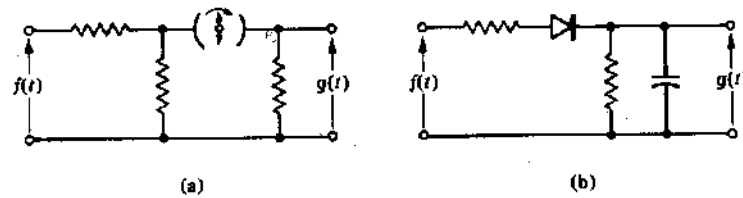


Figura 2.3 Ejemplos de sistemas: (a) lineal, variable en el tiempo; (b) no lineal, invariable en el tiempo.

Realizable, no realizable

Un sistema físicamente realizable no puede tener una respuesta de salida antes de que se aplique una función arbitraria de entrada. Dicho en otra forma, la salida de un sistema físico en $t = t_0$, o sea, $g(t_0)$, debe depender sólo de los valores de la entrada $f(t)$ para $t \leq t_0$. Un sistema que tenga esta propiedad se denomina *físicamente realizable* o *causal*.† Cualquier sistema que no llene este requisito se llama *no realizable* o *no causal*.

2.4 ★ SEÑALES Y VECTORES‡

Considérese la señal $f(t)$ definida para todos los valores del tiempo en el intervalo (t_1, t_2), como se muestra en la figura 2.4. Esta señal está limitada en el tiempo y tiene una energía finita E:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 \, dt < \infty .$$

En la gráfica de la figura 2.4 se muestra una forma de especificar $f(t)$; esto es, para cada valor de la variable independiente t, se da el valor de la variable dependiente $f(t)$. Cuanto más cercanos se tomen los incrementos del tiempo, con mayor exactitud se conocerán las variaciones de la señal $f(t)$. Obviamente, haría falta un conjunto infinito

† Algunos textos definen "realizable" en otras formas; aquí, esta definición será suficiente.
‡ El material opcional de cada capítulo se indentifica con una estrella.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

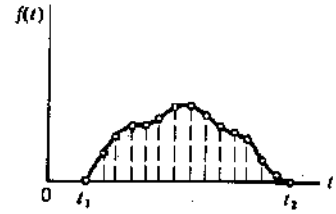


Figura 2.4 Señal de energía finita.

de valores para especificar por completo la gráfica de $f(t)$. Sin embargo, la experiencia indica que si se tienen algunas muestras para cada inflexión de la gráfica, ésta puede construirse con la suficiente precisión para todo propósito práctico. En el capítulo 3, este criterio tendrá una base más cuantitativa (el teorema del muestreo).

Por otra parte, sería deseable especificar $f(t)$ por medio de un conjunto contable de números que no dependan de la elección explícita de la variable t.† En otras palabras, sería conveniente expresar $f(t)$ como

$$f(t) = \sum_n f_n \phi_n(t), \tag{2.15}$$

donde los $\phi_n(t)$ forman un conjunto de funciones por especificar y los f_n son números independientes del tiempo.

Esta idea no debe sorprendernos, ya que tenemos la costumbre de describir un vector en términos de un conjunto contable de números. Por ejemplo, un vector que va del origen al punto (1, 1, 1) tiene una longitud de $\sqrt{3}$ y una inclinación de 55° con respecto a cada uno de los ejes coordenados del primer cuadrante. Por supuesto, la razón de que esta notación sea tan conveniente es que cada número de ella representa la proyección del vector sobre un eje coordenado. Estos ejes se eligen de manera que sean perpendiculares entre sí en el espacio vectorial. Por tanto, la proyección del vector sobre cada uno de los ejes coordenados es enteramente independiente de su proyección sobre los dos restantes. Esto permite escribir la ecuación del vector en términos de las respectivas proyecciones y los vectores de referencia en cada una de las direcciones de coordenadas.

La analogía entre vectores y señales es más que una coincidencia. De hecho, ofrece valiosos enfoques sobre la descripción de las señales. El empleo de las ideas geométricas más familiares suele resultar muy útil para ampliar la perspectiva en el manejo de las señales.

A lo largo de este análisis se supondrá que todos los vectores de interés tienen longitud finita. Tales vectores se pueden especificar en forma única en el espacio remitiéndolas a un conjunto dado de ejes coordenados. Debe haber una coordenada para cada dimensión del vector, a fin de garantizar la unicidad de la representación. Entonces se dice que el espacio vectorial está *completo*.

El producto escalar ("punto") entre dos vectores $\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2$ es

$$C_{12} = \boldsymbol{\phi}_1 \cdot \boldsymbol{\phi}_2. \tag{2.16}$$

† Un conjunto contable es aquel que puede ponerse en correspondencia uno a uno con el conjunto de los números naturales.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

El escalar C_{12} es un indicador de la similitud entre los vectores $\boldsymbol{\phi}_1$, $\boldsymbol{\phi}_2$. Si C_{12} es cero, se concluye que (a) $\boldsymbol{\phi}_1$ o $\boldsymbol{\phi}_2$ tiene magnitud cero o bien que (b) $\boldsymbol{\phi}_1$ no tiene componente sobre el vector $\boldsymbol{\phi}_2$. En este último caso, los dos vectores son perpendiculares y se denominan *ortogonales*.

Supóngase que se genera un espacio vectorial ortogonal con los tres vectores ortogonales $\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \boldsymbol{\phi}_3$. Estos vectores no tienen necesariamente longitud unitaria; no obstante, puede escribirse

$$\boldsymbol{\phi}_n \cdot \boldsymbol{\phi}_m = \begin{Bmatrix} k_n & n = m \\ 0 & n \neq m \end{Bmatrix}, \tag{2.17}$$

donde k_n es el cuadrado de la longitud de $\boldsymbol{\phi}_n$. Cualquier vector $\mathbf{A}_1$ en este espacio vectorial se puede representar en la forma

$$\mathbf{A}_1 = A_{11}\boldsymbol{\phi}_1 + A_{12}\boldsymbol{\phi}_2 + A_{13}\boldsymbol{\phi}_3, \tag{2.18}$$

donde

$$A_{1n} = \frac{\mathbf{A}_1 \cdot \boldsymbol{\phi}_n}{\boldsymbol{\phi}_n \cdot \boldsymbol{\phi}_n} = \mathbf{A}_1 \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\phi}_n}{\boldsymbol{\phi}_n \cdot \boldsymbol{\phi}_n}\right) = \mathbf{A}_1 \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\phi}_n}{k_n}\right) \tag{2.19}$$

para $n = 1, 2, 3$. Nótese que, como resultado de la ortogonalidad, el cálculo de cada producto escalar de la ecuación (2.19) no depende del cálculo de cualquiera de los restantes. También es evidente que si el espacio vectorial no está completo, el cuadrado de la longitud del vector error residual es mínimo si se usan los métodos anteriores.†

Estos conceptos se pueden extender a un espacio N-dimensional más general. Por supuesto, tal espacio no existe físicamente en la naturaleza. Por otra parte, hay muchos problemas que tienen analogías con un espacio N-dimensional.

Tres vectores expresados en el sistema de coordenadas cartesianas descrito por los vectores unitarios $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$, son $\mathbf{A} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + 5\mathbf{x}_3$; $\mathbf{B} = -\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$; $\mathbf{C} = 3\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + 2\mathbf{x}_3$; $\mathbf{D} = \mathbf{x}_1 + 5\mathbf{x}_2 - 4\mathbf{x}_3$. (a) Determine cuáles de estos vectores son ortogonales a $\mathbf{D}$. (b) Represente $\mathbf{A}$ en términos de los vectores $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$. (c) Calcule el cuadrado de la longitud del vector error residual si $\mathbf{A}$ se representa sólo en términos de $\mathbf{C}, \mathbf{D}$.

RESPUESTA: (a) $\mathbf{B}, \mathbf{C}$; (b) $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \frac{6}{7}\mathbf{C} - \frac{12}{21}\mathbf{D}$; (c) 3

2.5 ★ FUNCIONES ORTOGONALES

Volviendo al problema original (véase Ec. 2.15), recuérdese que se desea expresar la función $f(t)$ como un conjunto de números (los f_n) que, cuando se expresan en función de un espacio coordenado elegido de manera adecuada [es decir, los $\phi_n(t)$], especifican

† Véase por ejemplo B.P. Lathi, *Signals, Systems and Communications*, Nueva York, John Wiley & Sons, 1965.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

la función unívocamente. Debe aspirarse a que el conjunto elegido sea linealmente independiente, es decir, que los términos individuales no sean dependientes entre sí y que el conjunto esté formado por la totalidad de dichos términos.†

Hemos visto que cualquier vector de longitud finita puede expresarse como la suma de sus componentes sobre n vectores mutuamente ortogonales, siempre y cuando estos vectores formen un conjunto completo de coordenadas perpendiculares entre sí. Además, este método proporciona una longitud mínima (al cuadrado) del vector error si el conjunto no está completo. Lo anterior constituye una motivación para elegir un conjunto completo de funciones ortogonales, las $\phi_n(t)$. Las $\phi_n(t)$ elegidas se llaman *funciones base*.

Dos funciones de valor complejo $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ se definen como *ortogonales* en el intervalo (t_1, t_2) si

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_1(t)\phi_2^*(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \phi_1^*(t)\phi_2(t)\,dt = 0. \tag{2.20}$$

Por tanto, si los miembros de un conjunto de funciones de valor complejo son mutuamente ortogonales en (t_1, t_2),

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t)\phi_m^*(t)\,dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ K_n & n = m \end{cases}. \tag{2.21}$$

Se dice que un conjunto de funciones básicas $\phi_n(t)$ está "normalizado" si

$$K_n = \int_{t_1}^{t_2} |\phi_n(t)|^2\,dt = 1 \quad \text{para toda } n.$$

Si el conjunto es a la vez ortogonal y normalizado, se llama *ortonormal*.

La integral del producto de dos funciones en un intervalo dado se llama *producto interno* de las dos funciones. La raíz cuadrada del producto interno de una función consigo misma se llama *norma*. Por tanto, la ecuación (2.21) es el producto interno de $\phi_1(t)$, por $\phi_2(t)$ y $K_n^{1/2}$, es la norma. Como se verá pronto, el producto interno y la norma en un espacio de señales equivalen al producto escalar y la longitud en un espacio vectorial.

Volviendo al problema de la aproximación de una función $f(t)$ en términos de los $\phi_n(t)$ (véase Ec. 2.15). Para N términos, se tiene

$$f(t) \cong \sum_{n=1}^{N} f_n\phi_n(t). \tag{2.22}$$

El error cuadrático integral residual en esta aproximación, después de N términos, es

$$\int_{t_1}^{t_2} |\epsilon_N(t)|^2\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left|f(t) - \sum_{n=1}^{N} f_n\phi_n(t)\right|^2 dt. \tag{2.23}$$

El integrando de la ecuación (2.23) no es negativo, de manera que el error cuadrático integral tenderá a cero sólo si el integrando tiende a cero.

† Un conjunto de funciones es linealmente independiente si ninguna de estas funciones puede construirse como una combinación lineal de las restantes.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Se desea minimizar la ecuación (2.23) con una elección apropiada de los f_n. Expandiendo el lado derecho de la ecuación (2.23) e intercambiando el orden de la sumatoria y la integración, se tiene

$$\int_{t_1}^{t_2} |\epsilon_N(t)|^2\,dt = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2\,dt - \sum_{n=1}^{N}\left[f_n^*\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^*(t)\,dt + f_n\int_{t_1}^{t_2} f^*(t)\phi_n(t)\,dt - |f_n|^2 K_n\right], \quad (2.24)$$

donde se ha hecho uso de la ecuación (2.21). Completando el cuadrado en la sumatoria, la ecuación (2.24) queda como

$$\int_{t_1}^{t_2} |\epsilon_N(t)|^2\,dt = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2\,dt + \sum_{n=1}^{N}\left[\left|K_n^{1/2} f_n - \frac{1}{K_n^{1/2}}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^*(t)\,dt\right|^2 - \left|\frac{1}{K_n^{1/2}}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^*(t)\,dt\right|^2\right] \quad (2.25)$$

Los tres términos de la derecha no son negativos. Sin embargo, sólo el segundo término depende de la elección de los f_n y puede minimizarse por

$$f_n = \frac{1}{K_n}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^*(t)\,dt = \frac{\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^*(t)\,dt}{\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} |\phi_n(t)|^2\,dt}. \quad (2.26)$$

Nótese la gran similitud con los espacios vectoriales (véase Ec. 2.19) y la analogía de las funciones desempeñadas por el producto interno y el producto escalar.

Usando la ecuación (2.26) en la (2.25), error cuadrático integral mínimo en la aproximación por serie ortogonal de $f(t)$ en (t_1, t_2) es

$$\int_{t_1}^{t_2} |\epsilon_N(t)|^2\,dt = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2\,dt - \sum_{n=1}^{N} |f_n|^2 K_n. \quad (2.27)$$

El lado derecho de la ecuación (2.27) es la diferencia entre dos cantidades no negativas (diferencia que, a su vez, no debe ser negativa). Nótese que el primer término es la energía de $f(t)$. Si para cualquier $f(t)$ con energía finita, es decir, para

$$\int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2\,dt < \infty$$

los $\phi_n(t)$ son tales que

$$\lim_{N\to\infty}\int_{t_1}^{t_2} |\epsilon_N(t)|^2\,dt = 0, \quad (2.28)$$

se dice que el conjunto ortogonal $\phi_n(t)$ está *completo* en (t_1, t_2).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Para un conjunto ortogonal completo, la ecuación (2.15) se puede escribir de nuevo como

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n(t) \tag{2.29}$$

y la ecuación (2.27) se reduce a

$$\int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 K_n . \tag{2.30}$$

Esta relación se conoce como *teorema de Parseval.*

La representación de una función $f(t)$ por medio de un conjunto infinito de funciones mutuamente ortogonales se llama "representación en serie de Fourier generalizada" de $f(t)$. Con frecuencia se hallarán aplicaciones de dicha representación en el análisis de señales y sistemas. En la figura 2.5 se muestra una forma posible de generar los coeficientes para tal representación.

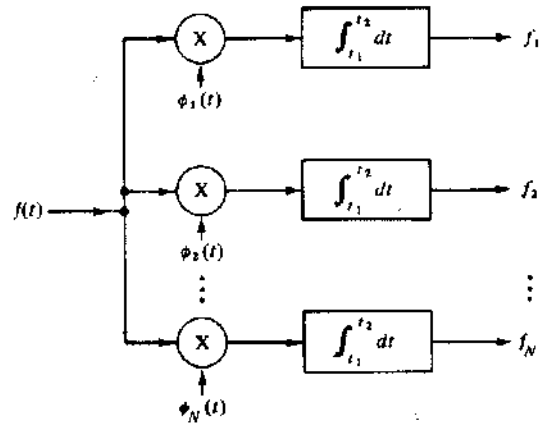


Figura 2.5 Método para generar los coeficientes de la representación en serie de Fourier generalizada.

EJEMPLO 2.5.1

Cierta función rectangular está definida en (0, 2) por (véase Fig. 2.6)

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ -1, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

Se desea aproximar esta función de energía finita empleando un conjunto de funciones definidas por $\phi_n(t) = \text{sen } n\pi t$, $n > 0$, en el intervalo (0, 2).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

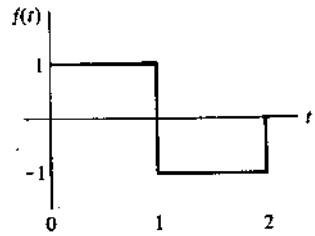


Figura 2.6 Función rectangular.

Solución Se puede demostrar con facilidad que las funciones sen $n\pi t$ y sen $m\pi t$ son ortogonales en el intervalo (0, 2):

$$\int_0^2 \text{sen } n\pi t \text{ sen } m\pi t\, dt = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

[De hecho, nótese que este conjunto es ortonormal en (0, 2).] Por tanto, la función $f(t)$ se puede representar en el intervalo (0, 2) como

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ sen } n\pi t\,,$$

donde los f_n se pueden hallar a partir de la ecuación (2.26):

$$f_n = \frac{\displaystyle\int_0^2 f(t) \text{ sen } n\pi t\, dt}{\displaystyle\int_0^2 \text{sen}^2\, n\pi t\, dt} = \int_0^2 f(t) \text{ sen } n\pi t\, dt\,.$$

Para esta elección particular de $f(t)$,

$$f_n = \int_0^1 \text{sen } n\pi t\, dt - \int_1^2 \text{sen } n\pi t\, dt = \begin{cases} 4/\pi n & \text{para } n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

Por tanto, la función $f(t)$ se aproxima por medio de la representación en serie

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\text{sen } \pi t + \frac{1}{3}\text{sen } 3\pi t + \frac{1}{5}\text{sen } 5\pi t + \frac{1}{7}\text{sen } 7\pi t + \cdots\right)$$

en el intervalo (0, 2). En la figura 2.7 se muestran la función real y la aproximación cuando la función se aproxima con uno, dos y tres términos, respectivamente. También se muestra el error puntual (error instantáneo) de cada aproximación.

La energía del error (error cuadrático integral) se puede calcular utilizando la ecuación (2.27):

$$\int_0^2 \epsilon_N^2(t)\, dt = 2 - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{N} \left(\frac{4}{\pi n}\right)^2.$$

Los resultados para los primeros seis términos distintos de cero se muestran en la tabla 2.1. En este caso, la energía del error disminuye en forma rápida con los primeros términos de la serie. De hecho, los cálculos muestran que alrededor del 95% de la energía está contenido en los primeros cuatro términos.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

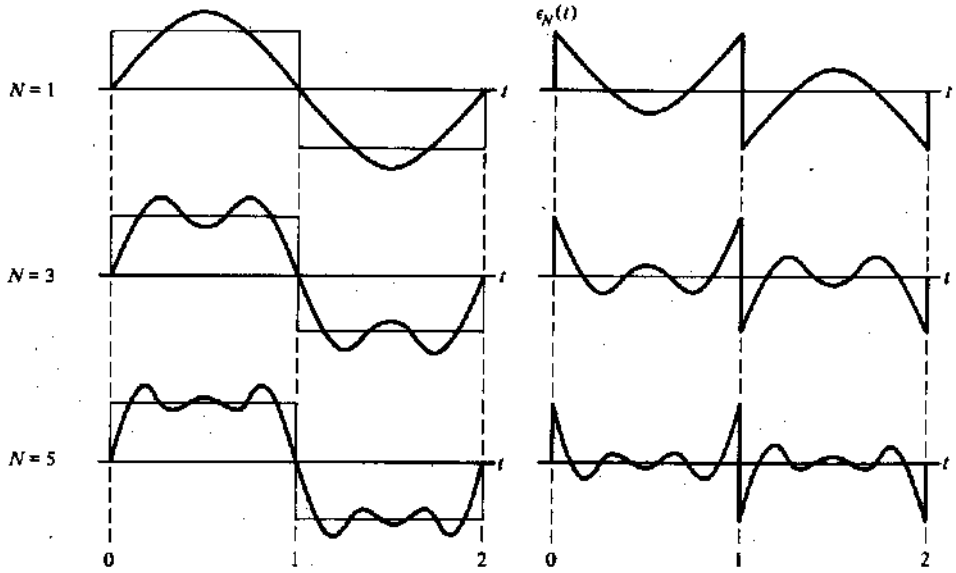


Figura 2.7 Suma finita de funciones ortogonales para aproximar una función rectangular y el error instantáneo (puntual) residual después de cada aproximación sucesiva.

TABLA 2.1 Energía del error para el ejemplo 2.5.1

N	Energía del error	Porcentaje de energía
1	0.379	18.94
3	0.199	9.94
5	0.134	6.69
7	0.101	5.04
9	0.081	4.04
11	0.067	3.37

Encuentre la representación de Fourier generalizada de la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -2 < t < 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

en el intervalo (–4, 4) usando el conjunto de funciones ortogonales

$$\phi_n(t) = \cos n\frac{\pi}{4}t, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

RESPUESTA:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}t - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{4}t + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{4}t - \frac{1}{7}\cos\frac{7\pi}{4}t + \cdots\right).$$

EJEMPLO 2.5.2

Haciendo uso de la analogía entre señales y vectores, demuestre que, para dos señales de energía finita $x(t)$, $y(t)$,

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)\,dt\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2\,dt.$$

Solución Usando la representación vectorial $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, el producto escalar $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ no puede exceder el producto de las longitudes de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$. Si θ es el ángulo entre los vectores, entonces

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\cos\theta)^2 \le |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2.$$

La igualdad ocurrirá si, y sólo si, $\cos\theta = \pm 1$, es decir, si los vectores son colineales.

Empleando una analogía con el espacio de señales, la anterior desigualdad puede reescribirse en términos de los productos internos de $x(t)$ y $y(t)$:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)\,dt\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2\,dt.$$

De acuerdo con la colinealidad de x y y, la condición de igualdad está dada por $x(t) = Ky(t)$, con K como una constante de valor real cualquiera.

Este resultado suele reescribirse haciendo $z(t) = y^*(t)$ de manera que

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t)z(t)\,dt\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt \int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2\,dt,$$

con igualdad si, y sólo si, $x(t) = Kz^*(t)$. Esta útil y muy conocida relación se llama *desigualdad de Schwarz*.

2.6 ★ ELECCIÓN DE UN CONJUNTO DE FUNCIONES ORTOGONALES

Ya vimos la representación en serie de Fourier generalizada de una función de energía finita, en un intervalo dado, por la combinación lineal de funciones mutuamente ortogonales. Sin embargo, existen muchos conjuntos de éstas, por lo que una función dada puede expresarse en términos de diferentes conjuntos de funciones ortogonales. Esto no debe sorprendernos, puesto que en la analogía con los espacios vectoriales sabemos que un vector dado puede expresarse unívocamente en diferentes sistemas

http://libreria-universitaria.blogspot.com

coordenados. A menudo, la elección de un sistema específico de coordenadas en el espacio vectorial hace más fácil el análisis de determinado problema, y una buena parte de nuestra experiencia sobre vectores consiste en aprender a hacer elecciones adecuadas de coordenadas y sistemas coordenados. Lo anterior también es válido para espacios de señales.

Ejemplos de conjuntos de funciones ortogonales son las funciones exponenciales, las funciones trigonométricas, las funciones de Walsh y los polinomios de Legendre. Aquí no se hará una investigación intensiva de cada uno de dichos conjuntos y sus propiedades (algunos se presentan en los problemas). Dado que el interés principal es aplicar los resultados, nos preguntamos: de todos los posibles conjuntos de funciones ortogonales, ¿cuál será el más conveniente? De nuevo como en los espacios vectoriales, la respuesta depende del tipo de problema que se ha de resolver. En consecuencia, se harán aquí algunas previsiones, intentando hacer una elección sensata desde el principio.

Se tratarán sistemas lineales y aquellos sistemas cuyos parámetros no varían en función del tiempo, al menos en determinado intervalo de tiempo. Cuando se aplica una señal a alguno de tales sistemas, la salida puede expresarse en forma de ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. Como ejemplo, tómese el circuito eléctrico *R-L* de la figura 2.8, que reúne las condiciones apuntadas. La relación entre la tensión de entrada $v_i(t)$ y la de salida $v_0(t)$ se puede expresar como†

$$\frac{d}{dt}v_o(t) + \frac{R}{L}v_o(t) = \frac{R}{L}v_i(t).$$

Para una entrada de energía finita, la solución de esta ecuación diferencial permitiría calcular la salida. No obstante, a menos que la señal de entrada sea una función muy simple de t, se hallarán dificultades para resolver las ecuaciones diferenciales halladas, por lo que habrá que representar la señal de entrada en términos de funciones ortogonales. Sin embargo, la elección que se haga de tal representación influirá en la dificultad encontrada al resolver el problema.

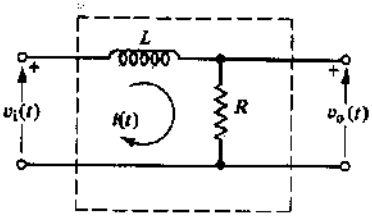


Figura 2.8 Sistema lineal.

† Como la corriente es común a R y L, se puede escribir

$$\frac{1}{L}\int_0^t [v_i(t) - v_o(t)]\,dt = v_o(t)/R.$$

Derivando ambos lados y multiplicando por R, se obtiene la ecuación diferencial deseada.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Aparece aquí una interesante posibilidad: si pudiera elegirse una función que se repitiera a sí misma en el proceso de diferenciación, entonces dicha función en la entrada produciría, en la salida, la misma función multiplicada por algún polinomio algebraico en términos de los parámetros de la función y de la ecuación diferencial. Si después se cancela la función original en ambos lados de la ecuación diferencial, la ecuación algebraica será *sólo función de los parámetros del sistema y de los de la señal, y no de la propia señal.*

Sin embargo, ¿qué tipo de función muestra tal comportamiento? La más simple función elemental que se repite a sí misma durante la diferenciación es la de la forma exponencial compleja $e^{\pm(\sigma + j\omega)t} = e^{\pm st}$, donde σ y ω son parámetros independientes de t. Puede demostrarse fácilmente que dicha señal, cuando se aplica a un sistema que puede ser descrito por una ecuación diferencial con coeficientes constantes, produce una función de salida de forma idéntica, multiplicada por una ecuación algebraica en $s = \sigma + j\omega$ y las constantes del sistema, dado que

$$\frac{d^n}{dt^n}(e^{st}) = s^n e^{st}.$$

Nos interesa expresar señales de energía finita que puedan existir tanto para tiempos negativos como positivos. Debido a que la parte real, σ, del exponencial puede causar problemas de convergencia en tales casos, conviene hacer $\sigma = 0$ y emplear funciones de la forma $e^{\pm j\omega t}$. Éstas, o sus combinaciones lineales, pueden existir para todo valor del tiempo, y el análisis que se hace por medio de ellas en general se denomina "de estado estacionario".

El parámetro ω es la tasa de cambio de fase o frecuencia del exponencial complejo, en radianes por segundo. Se puede expresar también como f en ciclos por segundo (Hz), con $\omega = 2\pi f$. Se dice que la expresión de las señales en términos de frecuencias está "en el dominio de la frecuencia", mientras que si está en función del tiempo, se dice que se halla "en el dominio del tiempo".

Si $v_i(t) = V_i e^{st}$ y $v_o(t) = V_o e^{st}$, determine la razón V_o/V_i en términos de s para el circuito de la figura 2.8.

RESPUESTA: $(R/L)/(s + R/L)$.

2.7 SERIE EXPONENCIAL DE FOURIER

Se investigará un conjunto de funciones exponenciales complejas que se expresan como

$$\phi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}, \tag{2.31}$$

donde n es un entero ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) y ω_0 es una constante que se debe determinar. El valor de n se denomina número armónico o *armónico*.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Se realiza la siguiente operación con $\phi_n(t)$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t)\phi_m^*(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t}\,dt$$

$$= \frac{1}{j(n-m)\omega_0}\left[e^{j(n-m)\omega_0 t_2} - e^{j(n-m)\omega_0 t_1}\right], \qquad n \neq m,$$

$$= \frac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t_1}\left[e^{j(n-m)\omega_0(t_2-t_1)} - 1\right]. \tag{2.32}$$

Excepto en el caso trivial de $t_2 = t_1$, el término entre corchetes se puede hacer cero si se elige [puesto que $(n - m)$ es un entero]

$$\omega_0(t_2 - t_1) = 2\pi$$

de manera que

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t}\,dt = \begin{Bmatrix} (t_2 - t_1) & n = m \\ 0 & n \neq m \end{Bmatrix}, \tag{2.33}$$

si

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{(t_2 - t_1)}. \tag{2.34}$$

Si dos funciones $\phi_n(t)$, $\phi_m(t)$ cumplen la condición

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t)\phi_m^*(t)\,dt = \begin{Bmatrix} \text{constante} & n = m \\ 0 & n \neq m \end{Bmatrix},$$

entonces son *ortogonales* en el intervalo (t_1, t_2). Por tanto, el conjunto de funciones

$$\phi_n(t) = e^{jn\omega_0 t} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

forma un conjunto ortogonal en el intervalo (t_1, t_2) si $\omega_0 = 2\pi/(t_2 - t_1)$.

Ahora se busca expresar una señal arbitraria $f(t)$ en términos de un conjunto finito de exponenciales complejos escribiendo

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} F_n e^{jn\omega_0 t} \qquad (t_1 < t < t_2)$$

donde se deben determinar los exponentes F_n. Se puede demostrar que la energía del error entre $f(t)$ y su aproximación en términos de un conjunto de exponenciales complejos tiende a cero a medida que el número de términos que se toman tiende a infinito. Cuando un conjunto de $\phi_n(t)$ cumple esta condición, se dice que está *completo*. Al construir el conjunto, se tiene

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \qquad (t_1 < t < t_2). \tag{2.35}$$

Como esta $\phi_n(t)$ forma un conjunto ortogonal completo, es posible representar cualquier función arbitraria compleja $f(t)$ con energía finita por medio de una combinación lineal

http://libreria-universitaria.blogspot.com

de funciones exponenciales complejas en un intervalo (t_1, t_2). La representación de $f(t)$ por la serie exponencial como se demuestra en la ecuación (2.35) se conoce como *representación en serie de Fourier exponencial* de $f(t)$ en el intervalo (t_1, t_2). Los coeficientes de esta serie se pueden hallar multiplicando ambos miembros de la ecuación (2.35) por $\phi_m^*(t) = e^{-jm\omega_0 t}$ e integrando con respecto a t en el intervalo (t_1, t_2). Debido a la ortogonalidad, todos los términos del lado derecho de la ecuación (2.35) se cancelan, excepto cuando $m = n$, lo que da la expresión†

$$F_n = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt. \tag{2.36}$$

En resumen, se ha visto que cualquier función con energía finita se puede expresar como una suma discreta de funciones exponenciales: $\phi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$ en un intervalo (t_1, t_2), donde n es un entero ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) y $\omega_0 = 2\pi/(t_2 - t_1)$.

EJEMPLO 2.7.1

Escriba una representación de la función $f(t)$ del ejemplo 2.5.1 en términos de la serie de Fourier exponencial compleja.

Solución

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{t_2 - t_1} = \frac{2\pi}{2} = \pi,$$

$$F_n = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) e^{-jn\pi t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-jn\pi t}\, dt - \frac{1}{2} \int_1^2 e^{-jn\pi t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2jn\pi} [-e^{-jn\pi} + 1 + e^{-j2n\pi} - e^{-jn\pi}] = \frac{1}{jn\pi} [1 - e^{-jn\pi}],$$

$$F_n = \begin{cases} 2/jn\pi & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases},$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t},$$

$$f(t) = \frac{2}{j\pi} \left(e^{j\pi t} + \frac{1}{3} e^{j3\pi t} + \frac{1}{5} e^{j5\pi t} + \cdots - e^{-j\pi t} - \frac{1}{3} e^{-j3\pi t} - \frac{1}{5} e^{-j5\pi t} - \cdots \right).$$

† Observe que, como resultado de la ortogonalidad, cada coeficiente de la serie es independiente de cualquier otro coeficiente. Los coeficientes también se pueden encontrar aplicando directamente la ecuación (2.26).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Escriba una representación en serie de Fourier exponencial compleja de la función $f(t)$ del ejercicio 2.5.1 en el intervalo (–4, 4).

RESPUESTA:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + e^{j(\pi/4)t} - \frac{1}{3}e^{j(3\pi/4)t} + \cdots + e^{-j(\pi/4)t} - \frac{1}{3}e^{-j(3\pi/4)t} + \cdots\right).$$

2.8 SEÑALES Y REPRESENTACIONES COMPLEJAS

En una señal cuyo valor instantáneo es un número complejo, las partes real e imaginaria forman un par ordenado de componentes dado por (suprimiendo por comodidad la dependencia del tiempo)

$$f = f_r + jf_i. \tag{2.37}$$

La conjugada compleja del valor de la señal es

$$f^* = f_r - jf_i, \tag{2.38}$$

y, por tanto, las partes real e imaginaria son

$$f_r = \frac{1}{2}(f + f^*) \tag{2.39}$$

$$f_i = \frac{1}{2j}(f - f^*). \tag{2.40}$$

El cuadrado de la magnitud de la señal de valor complejo es igual al producto de la señal por su conjugada. Dado que $(j)^2 = -1$, se tiene

$$|f|^2 = ff^* = |f_r|^2 + |f_i|^2, \tag{2.41}$$

de modo que el cuadrado de la magnitud de la señal es la suma de los cuadrados de las magnitudes de los componentes real e imaginario.

En las matemáticas del análisis de sistemas lineales, tienen un interés particular las señales de forma exponencial compleja $f(t) = e^{j\omega t}$. Físicamente, puede suponerse que esta función describe el movimiento de un punto del borde de una rueda de radio unitario. La rueda gira (por convención) hacia la izquierda con velocidad angular de ω_0 radianes por segundo. De la trigonometría (véase Fig. 2.9) se ve que la proyección del punto sobre el eje real es cos $\omega_0 t$ y sobre el eje imaginario es sen $\omega_0 t$. Combinándolas, se puede escribir

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \operatorname{sen} \omega_0 t. \tag{2.42}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

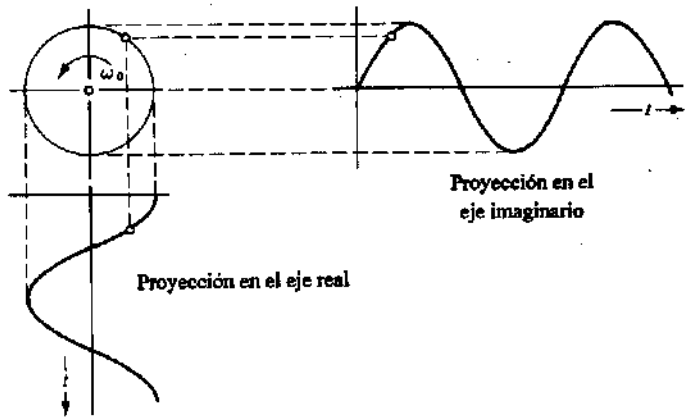


Figura 2.9 Notación compleja para señales angulares.

De las ecuaciones (2.39) y (2.40) se obtienen los componentes real e imaginario del término de la izquierda. Por tanto, al igualar los componenetes real e imaginario de ambos lados de la ecuación (2.42), se obtienen las "identidades de Euler":

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}), \tag{2.43}$$

$$\operatorname{sen} \omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}). \tag{2.44}$$

La inclusión de varios términos, implicando cada uno movimiento circular con diferentes magnitudes y velocidades angulares, complica un poco más el problema. Sin embargo, si se traza una flecha del centro al punto de referencia sobre cada círculo (rueda), puede hallarse la suma de las flechas como si fueran cantidades vectoriales. La flecha resultante se puede tratar como un vector y trasladarse a un sistema de coordenadas, de manera que su origen coincida con el del sistema. Sus proyecciones sobre dicho sistema serán las componentes real e imaginaria de la suma resultante.

Estas flechas se llaman *fasores*. Un fasor se define en el plano complejo ya sea por sus componentes real e imaginaria o por su magnitud y su ángulo de fase. Los fasores cumplen las reglas de los vectores aunque no son vectores; por ello se les llama a veces seudovectores.

La serie de Fourier exponencial consiste en una suma de términos exponenciales complejos, cada uno con su propia magnitud, fase y velocidad angular (frecuencia). Por tanto, la suma de fasores puede describir los valores instantáneos de señales de valor complejo usando la representación en serie de Fourier exponencial. La convención usual es hacer que la parte real del fasor represente la función de valor real, aunque esto no es necesario (en el siguiente ejemplo se cambiarán los papeles).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Con estos nuevos aspectos, se revisarán los resultados del ejemplo 2.7.1, donde se obtuvo la representación de Fourier exponencial compleja de una función $f(t)$, que produjo una solución en términos de una serie infinita de exponenciales complejos que rotan a múltiplos enteros de π radianes por segundo. Cada término de la serie es un fasor y los coeficientes complejos, los F_n, representan el ángulo de inicio y la magnitud de cada fasor. Estos fasores pueden sumarse usando las reglas de la suma de vectores, y el resultado será la amplitud y la fase complejas instantáneas de la función original.

Por conveniencia, se usarán sólo los tres primeros términos distintos de cero de la serie y se tomará el intervalo $0 < t < 0.5$. Del ejemplo 2.7.1, los tres primeros términos para n positivo son

$$\frac{2}{j\pi}\left(e^{j\pi t} + \frac{1}{3}e^{j3\pi t} + \frac{1}{5}e^{j5\pi t}\right)$$

Debido al factor $(-j)$, los tres fasores inician en el eje imaginario negativo, por lo que sus proyecciones sobre el eje real comienzan en cero. Por comodidad para hacer la gráfica, todo se girará 90° y se tomarán las proyecciones sobre el eje imaginario.

Los fasores se muestran en la figura 2.10. En $t = 0$ los tres fasores están sobre el eje, dado que sus ángulos de fase iniciales son cero. Al crecer t, cada fasor rota con diferente velocidad angular y la resultante empieza a enrollarse sobre sí misma. Las componentes verticales de la resultante describen los valores de la representación de la señal en los tiempos indicados. La magnitud de cada fasor se indica con el valor de n correspondiente.

La figura 2.10 es una ilustración gráfica de cómo la suma vectorial de fasores que giran a diferentes velocidades puede hacerse de manera que su proyección se aproxime a la señal deseada. A medida que se añaden términos a la serie, el número de fasores se hace arbitrariamente grande. De esta manera, el extremo de la resultante puede moverse en forma rápida para describir la función deseada.

Nótese que en este ejemplo se sumaron sólo valores positivos de n y se tomó la parte real. Otro procedimiento es usar un par conjugado de fasores. Así, una función coseno (parte real) o seno (parte imaginaria) puede considerarse como la resultante de dos fasores conjugados que giran en sentidos contrarios, como se muestra en la figura 2.11.

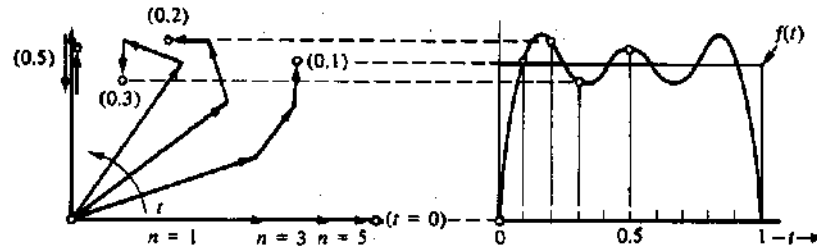


Figura 2.10 Suma de fasores de la serie exponencial compleja para la función descrita en el ejemplo 2.7.1.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

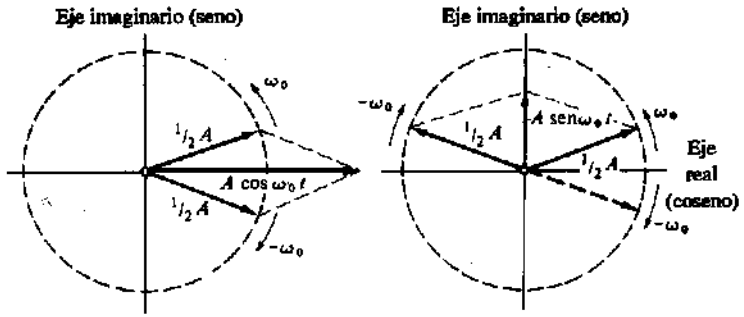


Figura 2.11 Representación de un coseno y un seno por medio de un par de fasores conjugados.

En ambos casos los fasores complejos conjugados giran en sentidos opuestos con frecuencias de $\pm\omega_0$ radianes por segundo para describir funciones de tiempo de valor real. Como una *frecuencia positiva* se asocia con el movimiento angular uniforme hacia la izquierda, esto sugiere el concepto de *frecuencia negativa* para describir el movimiento del segundo fasor. El uso de frecuencias negativas resulta conveniente para describir una función de valor real por medio de pares de funciones de valor complejo. El concepto de frecuencias negativas se emplea a lo largo de este libro sobre todo por conveniencia matemática. Por supuesto, debe destacarse que para representar una señal de valor real, las magnitudes de los fasores conjugados tienen que ser iguales y sus ángulos de fase instantáneos deben ser iguales pero con orientación opuesta.

A partir de las ecuaciones (2.37) a (2.40), demuestre que

$$\mathcal{R}e\{f_1 f_2\} = \mathcal{R}e\{f_1\}\mathcal{R}e\{f_2\} - \mathcal{I}m\{f_1\}\mathcal{I}m\{f_2\}.$$

2.9 REPRESENTACIÓN EN SERIE DE FOURIER TRIGONOMÉTRICA[†]

Ahora se podría preguntar: si se sabe que una función $f(t)$ tiene valor real, ¿habrá una forma equivalente de representar $f(t)$ en series de Fourier usando un conjunto de funciones ortogonales de valor real? Para investigarlo, se tomará la parte real en

[†] J.B.J. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*, 1822; reeditado en inglés por Dover, Nueva York. En 1829 Dirichlet dio la primera prueba rigurosa de una versión del teorema de Fourier.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

ambos lados de la ecuación (2.35). Haciendo uso del resultado del ejercicio 2.8.1, se tiene

$$f_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}e\{F_n\}\,\mathcal{R}e\{e^{jn\omega_0 t}\} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{I}m\{F_n\}\,\mathcal{I}m\{e^{jn\omega_0 t}\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}e\{F_n\} \cos n\omega_0 t - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{I}m\{F_n\} \operatorname{sen} n\omega_0 t\,. \tag{2.45}$$

Los F_n aparecen en la ecuación (2.36). Sin embargo, puesto que se necesitan funciones de valor real, habrá que expresar los nuevos coeficientes de valor real en términos de F_n y F_n^*. Por tanto, se investigarán los F_n^* para señales de valor real:

$$F_n^* = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{jn\omega_0 t}\, dt = F_{-n}\,. \tag{2.46}$$

Partiendo de las ecuaciones (2.39) y (2.40), y utilizando la ecuación (2.46) se puede escribir

$$\mathcal{R}e\{F_n\} = \tfrac{1}{2}[F_n + F_n^*] = \tfrac{1}{2}[F_n + F_{-n}]\,, \tag{2.47}$$

$$\mathcal{I}m\{F_n\} = \frac{1}{2j}[F_n - F_n^*] = \frac{1}{2j}[F_n - F_{-n}]\,. \tag{2.48}$$

Por conveniencia, en este punto se definirán nuevos coeficientes:

$$a_0 \triangleq F_0\,, \tag{2.49}$$

$$a_n \triangleq [F_n + F_{-n}] = 2\ \mathcal{R}e\{F_n\}, \qquad n \neq 0\,, \tag{2.50}$$

$$b_n \triangleq j[F_n - F_{-n}] = -2\ \mathcal{I}m\{F_n\}\,, \tag{2.51}$$

$$F_n = \tfrac{1}{2}(a_n - jb_n), \qquad n \neq 0\,. \tag{2.52}$$

De las definiciones de a_n y b_n se puede ver que a_n es una función par de n, mientras que b_n es impar. En consecuencia, existe simetría completa en n alrededor de $n = 0$, por lo que podrían duplicarse los coeficientes y sumar sólo los términos con valores positivos de n. Siguiendo este método, la ecuación (2.45) se puede volver a escribir como

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t \qquad \text{para } f(t) \text{ real en } (t_1, t_2). \tag{2.53}$$

Por lo anterior, el conjunto de funciones cos $n\omega_0 t$ y sen $n\omega_0 t$ para ($n = 0, 1, 2, \ldots$), $\omega_0 = 2\pi/(t_2 - t_1)$, forman un conjunto ortogonal completo en el intervalo (t_1, t_2). Lo que aparece en la ecuación (2.53) se llama *representación en serie de Fourier trigonométrica de f(t) en el intervalo* (t_1, t_2), y puede describir una función de valor real con energía finita en un intervalo dado. Nótese que aunque las funciones sen $\omega_0 t$, sen $2n\omega_0 t$, etc., forman un conjunto ortogonal en cualquier intervalo $[t_1, t_1 + (2\pi/\omega_0)]$, no se trata de un conjunto completo debido a que se puede mostrar una función, por ejemplo cos $n\omega_0 t$, que es ortogonal a sen $n\omega_0 t$ en el mismo intervalo. Por tanto, para completar el conjunto deben incluirse tanto las funciones coseno como las funciones seno.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Más que evaluar las constantes a_n y b_n en F_n, se pueden multiplicar ambos miembros de la ecuación (2.53) por cos $n\omega_0 t$ y sen $n\omega_0 t$. Debido a que cos $n\omega_0 t$, cos $m\omega_0 t$, sen $n\omega_0 t$ y sen $m\omega_0 t$ son mutuamente ortogonales, los términos que permanecen después de las simplificaciones son†

$$a_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt}{\int_{t_1}^{t_2} \cos^2 n\omega_0 t \, dt} = \frac{2}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt , \tag{2.54}$$

$$b_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt}{\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{sen}^2 n\omega_0 t \, dt} = \frac{2}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt , \tag{2.55}$$

$$a_0 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \, dt}{\int_{t_1}^{t_2} dt} = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \, dt . \tag{2.56}$$

La serie de Fourier trigonométrica se puede representar en forma más compacta como

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos (n\omega_0 t + \phi_n) , \tag{2.57}$$

donde

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} , \tag{2.58}$$

$$\phi_n = \tan^{-1} (-b_n / a_n) . \tag{2.59}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.50) y (2.51) en (2.58) y (2.59), se halla que esta representación trigonométrica se relaciona con la representación exponencial compleja por medio de

$$c_n = 2|F_n| = 2\sqrt{F_n F_n^*} , \qquad n \neq 0 , \tag{2.60}$$

$$\phi_n = \tan^{-1} \frac{\mathcal{I}m\{F_n\}}{\mathcal{R}e\{F_n\}} , \tag{2.61}$$

y $c_0 = F_0$.

† Estos coeficientes también se pueden determinar al aplicar directamente la ecuación (2.26).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJEMPLO 2.9:1

Represente $f(t) = t^2$ en serie de Fourier trigonométrica en el intervalo (0, 2).

Solución En este caso, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$, y $\omega_0 = \pi$. Los coeficientes se pueden hallar por aplicación directa de las ecuaciones (2.54) a (2.56):†

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 t^2\,dt = \frac{4}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 t^2 \cos n\pi t\,dt = 4/(n\pi)^2,$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 t^2 \operatorname{sen} n\pi t\,dt = -4/(n\pi).$$

Por tanto, la serie de Fourier trigonométrica de $f(t) = t^2$ en el intervalo (0, 2) es

$$f(t) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos n\pi t - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen} n\pi t.$$

Cualquier función $f(t)$ se puede expresar en términos de la suma de una función par correspondiente, $f_e(t)$, y una función impar, $f_o(t)$. Estas funciones se pueden formar con las siguientes relaciones:

$$f_e(t) = \tfrac{1}{2}[f(t) + f(-t)], \tag{2.62}$$

$$f_o(t) = \tfrac{1}{2}[f(t) - f(-t)], \tag{2.63}$$

y, por tanto, $f_e(t) + f_o(t) = f(t)$.

Las propiedades de las funciones pares e impares son bastante convenientes cuando se toma la serie de Fourier trigonométrica sobre un intervalo simétrico $(-T/2, T/2)$. En este caso, la ecuación (2.53) se puede reducir a una forma especial dependiendo de que $f(t)$ sea par o impar. Si es par, el producto $f(t)$ sen $n\omega_0 t$ es impar en t, las b_n son cero y resulta una serie de cosenos. De igual forma, si $f(t)$ es impar, el producto $f(t)$ cos $n\omega_0 t$ en t, las a_n son cero y el resultado es una serie de senos. En ambos casos, los términos no nulos se pueden evaluar integrando sobre la mitad del periodo y después multiplicando por dos.

Halle la serie de Fourier trigonométrica de la señal triangular de la figura 2.12 en el intervalo $(-\pi, \pi)$

† Estas integrales se pueden hallar en el apéndice A.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

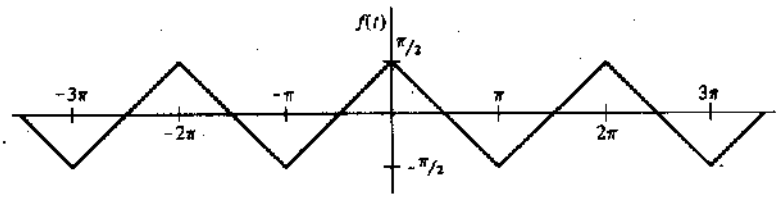


Figura 2.12 Señal triangular.

RESPUESTA: $f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nt \qquad -\pi < t < \pi$.

Halle la expansión de la función descrita por $f(t) = t$ en serie de Fourier trigonométrica en el intervalo (0, 2)

RESPUESTA: $f(t) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} n\pi t \qquad 0 < t < 2$.

2.10 EXTENSIÓN POR PERIODICIDAD

Hemos representado una función dada con energía finita por medio de una serie de Fourier en un intervalo finito (t_1, t_2). Fuera de ese intervalo, la función $f(t)$ y la correspondiente serie de Fourier no son necesariamente iguales.

Ahora sería conveniente extender esta representación a las señales periódicas, es decir, a aquellas para las cuales es válida la relación

$$f(t + T) = f(t) \tag{2.64}$$

para todo t. Se supondrá que $f(t)$ tiene energía finita en un intervalo $(t_0, t_0 + T)$. A medida que se tomen intervalos de tiempo cada vez más prolongados, la energía se acumulará y, en el límite, la energía total será infinita. Sin embargo, también observamos que la enegía en $f(t)$ en cualquier intervalo de T segundos es la misma que en cualquier otro intervalo de igual duración. De aquí se desprende que si se divide por T, la *tasa* promedio de energía, o potencia media, es constante.

Con este leve cambio, todos los análisis anteriores se pueden extender sin dificultad al caso de funciones periódicas con potencia promedio finita de manera simple (1) tomando el intervalo para hallar coeficientes, etc., como el periodo T de la función periódica; y (2) dividiendo por este intervalo en cualquier cálculo que implique energía

http://libreria-universitaria.blogspot.com

para obtener una tasa promedio de energía o potencia. Se dice que tales representaciones "convergen en la cuadrática media" a la función periódica $f(t)$.

No merece la pena replantear todos los resultados anteriores para el caso de la representación en serie de una función periódica. De hecho, para el conjunto exponencial complejo que elegimos antes, es fácil ver que se satisface la ecuación (2.64) si el intervalo es $T = 2\pi/\omega_0$ dado que

$$e^{jn\omega_0(t+T)} = e^{jn\omega_0 t} \quad \text{para } T = 2\pi/\omega_0 .$$

por lo que la expresión

$$f(t) = \sum_n F_n e^{jn\omega_0 t}$$

representará una función periódica en el intervalo infinito y la representación convergerá en un sentido cuadrático medio (o cuadrado promedio).

Gráficamente, esto significa que, como el fasor básico rota con velocidad angular de ω_0 rad/s, la serie de Fourier exponencial compleja describirá cualquier función periódica cuyo periodo sea justamente el tiempo que tarda el fasor básico en efectuar una revolución completa. Esto se muestra en la figura 2.13.

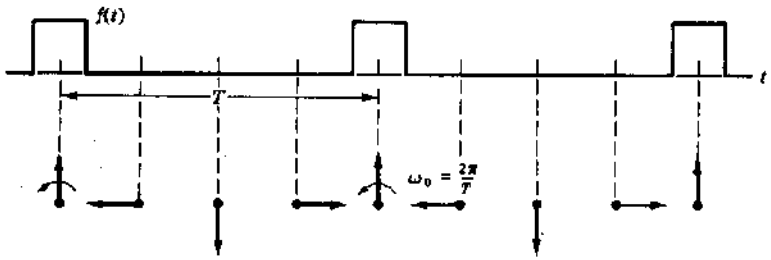


Figura 2.13 Revolución de un fasor básico en sincronía con una función periódica dada.

En general, el intervalo de integración para determinar los coeficientes de la serie de Fourier se toma sobre un periodo completo T, sin importar dónde se tome cuando $f(t)$ es periódica. Si el límite inferior tiene un valor arbitrario t_0, el límite superior será $(t_0 + T)$. Es conveniente, a menudo, tomar el intervalo de integración a partir de $-T/2$ a $+T/2$ para aprovechar las posibles condiciones de simetría.

Determine la serie de Fourier trigonométrica para la señal simétrica cuadrada de la figura 2.14.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

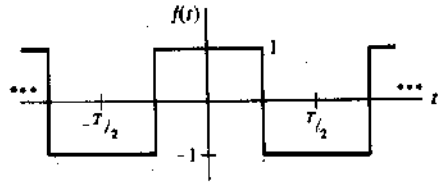


Figura 2.14 Señal simétrica cuadrada.

RESPUESTA:

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\cos \omega_0 t - \frac{1}{3}\cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\cos 5\omega_0 t - \cdots\right) \quad \text{donde } \omega_0 = 2\pi/T.$$

En la tabla 2.2 se listan los coeficientes de Fourier para algunas señales comunes. Un ejercicio muy útil, si se dispone de un monitor gráfico, es observar la recons-

TABLA 2.2 Coeficientes de la serie de Fourier para formas de onda seleccionadas

Señal periódica	Simetría	F_n†
1. *Señal cuadrada simétrica*	*par*	
$\begin{cases} +1 & \lvert t\rvert < T/4 \\ -1 & T/4 \le \lvert t\rvert < T/2 \end{cases}$		$\begin{cases} \text{Sa}(n\pi/2) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$
2. *Tren de pulsos rectangulares*	*par*	
$\begin{cases} +1 & \lvert t\rvert < \tau/2 \\ 0 & \tau/2 \le \lvert t\rvert < T/2 \end{cases}$		$\frac{\tau}{T}\,\text{Sa}(n\pi\tau/T)$
3. *Señal triangular simétrica*	*par*	
$1 - 4\lvert t\rvert/T, \quad \lvert t\rvert < T/2$		$\begin{cases} \text{Sa}^2(n\pi/2) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$
4. *Señal en diente de sierra simétrica*	*impar*	
$2t/T, \quad \lvert t\rvert < T/2$		$\begin{cases} j(-1)^n/(n\pi) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$
5. *Senoidal rectificada (media señal)*		
$\begin{cases} \text{sen}\,\omega_0 t & 0 \le t < T/2 \\ 0 & -T/2 \le t < 0 \end{cases}$		$\begin{cases} \frac{1}{\pi(1-n^2)} & n \text{ par} \\ -j/4 & n = \pm 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
6. *Senoidal rectificada (completa)*	*par*	
$\lvert\text{sen}\,\omega_0 t\rvert$		$\begin{cases} \frac{2}{\pi(1-n^2)} & n \text{ par} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

† $\text{Sa}(x) \triangleq (\text{sen}\,x)/x$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

trucción de estas señales a partir de las representaciones en serie (p. ej., convertir la serie trigonométrica y utilizar 50 puntos por periodo y 15 armónicos en la reconstrucción).

2.11 TEOREMA DE PARSEVAL PARA SEÑALES DE POTENCIA

La potencia promedio disipada en una resistencia de un ohm es [Ec. (2.7)]

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)f^*(t)\,dt \qquad \text{watts}. \tag{2.65}$$

Si se utiliza la serie de Fourier exponencial y se reemplaza en la ecuación (2.65),

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{jm\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* e^{-jn\omega_0 t}\,dt \tag{2.66}$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$.

Si se supone que $f(t)$ es integrable en el intervalo t_0 a $(t_0 + T)$, en la ecuación (2.66) se puede intercambiar el orden de las sumatorias y la integral:

$$P = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{j(m-n)\omega_0 t}\,dt. \tag{2.67}$$

Sin embargo, las funciones exponenciales complejas son ortogonales en el intervalo t_0 a $(t_0 + T)$ de manera que la integral de la ecuación (2.67) es cero excepto para el caso especial en que $m = n$. En estas condiciones, la doble sumatoria se reduce a una y aparece una nueva relación para la potencia promedio en términos de las magnitudes de los coeficientes:

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n F_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2. \tag{2.68}$$

Si se combinan las ecuaciones (2.65) y (2.68), se obtiene una relación conocida como *teorema de Parseval para señales periódicas*:

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2. \tag{2.69}$$

Si se conoce la función del tiempo $f(t)$, se puede hallar la potencia promedio. Por otra parte, ésta también se puede hallar si se conocen los coeficientes de Fourier. Las respuestas obtenidas en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia deben concordar.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJEMPLO 2.11.1

Determine la potencia promedio de $f(t) = 2 \operatorname{sen} 100t$ usando las ecuaciones (2.65) y (2.68).

Solución De la ecuación (2.65), se tiene

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} 4 \operatorname{sen}^2 100t\, dt = 2 \text{ W}.$$

Los coeficientes de Fourier de $f(t)$ son†

$$F_1 = -j, \qquad F_{-1} = j,$$

$$F_n = 0 \text{ para toda } n \neq \pm 1.$$

Así, la ecuación (2.68) da

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 = F_1 F_1^* + F_{-1} F_{-1}^* = |j|^2 + |-j|^2 = 1 + 1 = 2 \text{ W}.$$

En la ecuación (2.68) se ilustra el hecho de que la potencia en una función periódica se distribuye en frecuencias discretas relacionadas entre sí en forma armónica. La potencia contenida en cada componente de frecuencias está dada por el término respectivo de la ecuación (2.68). Entonces, si se hace una gráfica de P contra ω, la potencia de $f(t)$ se localiza sólo en frecuencias discretas, como se aprecia en la figura 2.15. Esta gráfica se llama "espectro de potencias" de la señal $f(t)$.

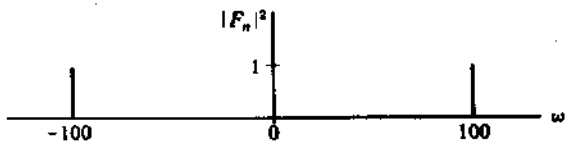


Figura 2.15 Espectro de potencias de la función descrita en el ejemplo 2.11.1.

Repita el ejemplo 2.11.1 para $f(t) = 2 \cos 100t$ y muestre que su espectro de potencias es el de la figura 2.15.

† Una forma breve para determinar estos coeficientes es usar la identidad de Euler para 2 sen $100t$. Los coeficientes se hallan igualando término a término con la serie de Fourier correspondiente.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

2.12 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN FRECUENCIA

Al caracterizar el comportamiento de los sistemas se siguen dos líneas principales de análisis, una en el dominio de la frecuencia y otra en el dominio del tiempo. En ambos casos se emplea la superposición para sumar las respuestas del sistema a combinaciones de funciones elementales. Primero se verá la representación en el dominio de la frecuencia; el dominio del tiempo se abordará más adelante, en la sección 2.18. Siguiendo el razonamiento de la sección anterior, utilizaremos la función exponencial compleja.

Una propiedad fundamental de un sistema lineal invariable en el tiempo es que la entrada y la salida están relacionadas por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Un sistema típico podría describirse por medio de

$$a_0 g(t) + a_1 \frac{dg}{dt} + \cdots = b_0 f(t) + b_1 \frac{df}{dt} + \cdots, \tag{2.70}$$

donde las a y b son constantes.

Se puede utilizar ahora la señal de entrada

$$f(t) = e^{j\omega t} \tag{2.71}$$

para probar el sistema. Una solución particular se puede escribir como

$$g(t) = H(\omega) e^{j\omega t} \tag{2.72}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.71) y (2.72) en la ecuación (2.70), se obtiene

$$H(\omega) = \frac{\sum_k b_k (j\omega)^k}{\sum_m a_m (j\omega)^m}. \tag{2.73}$$

Esta importante relación se llama *función de transferencia en frecuencia* del sistema.† Nótese que el miembro de la derecha de la ecuación (2.73) depende sólo del sistema.

Físicamente, la ecuación (2.73) indica que una manera de probar un sistema lineal invariable en el tiempo es aplicar a la entrada una senoidal de amplitud, frecuencia y fase conocidas. La salida será otra senoidal *con la misma frecuencia*, aunque la amplitud y la fase diferirán, en general, de las de la entrada. El cociente de estos dos coeficientes complejos da el valor (en amplitud y fase) de la función de transferencia del sistema a esa frecuencia. Este procedimiento puede repetirse para otras frecuencias. Luego, se puede obtener una gráfica de la función de transferencia del sistema trazando una curva continua que una los puntos obtenidos.

† La *función de transferencia* de un sistema lineal invariable en el tiempo se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, para condiciones iniciales cero.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Podemos ir un poco más lejos e incorporar las características de la respuesta del sistema a los componentes de éste. Ello se consigue multiplicando por $(j\omega)$ cada término que implique derivación y por $(1/j\omega)$ cada término que implique integración. Éste es el método utilizado comúnmente en el análisis de circuitos lineales de ca. El empleo de estos métodos se ilustra en el ejemplo 2.12.1.

EJEMPLO 2.12.1

Determine la función de transferencia en frecuencia del sistema de la figura 2.16.

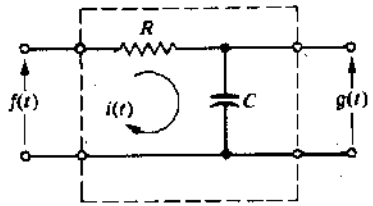


Figura 2.16 Filtro pasabajas RC.

Solución La ecuación diferencial que describe este sistema se halla fácilmente sumando las corrientes, lo que da†

$$\frac{1}{R}[f(t) - g(t)] = C\frac{dg}{dt},$$

o

$$f(t) = RC\frac{dg}{dt} + g(t).$$

Para determinar la función de transferencia en frecuencia del sistema, se hace $f(t) = e^{j\omega t}$ y $g(t) = H(\omega)e^{j\omega t}$ de modo que al sustituirlas en la solución particular de la ecuación anterior, queda

$$e^{j\omega t} = j\omega RCH(\omega)e^{j\omega t} + H(\omega)e^{j\omega t}.$$

Entonces, la función de transferencia en frecuencia del sistema es

$$H(\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}.$$

Para facilitar aún más el cálculo, se puede reemplazar C por $(j\omega C)^{-1}$ en el circuito y usar la propiedad de un divisor de tensión para obtener por inspección el resultado anterior. Este método se utiliza con frecuencia en el análisis de circuitos lineales de ca.

† Por lo general, para definir las funciones de transferencia se suponen una impedancia de fuente cero y una impedancia de carga infinita.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Un sistema lineal invariable en el tiempo se describe por medio de la ecuación diferencial $g(t) + d^4g/dt^4 = d^2f/dt^2$. Determine la función de transferencia en frecuencia del sistema.

RESPUESTA: $H(\omega) = -\omega^2/(1 + \omega^4)$.

En general, $H(\omega)$ es una función de valor complejo de la frecuencia y suele expresarse en la forma polar

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta(\omega)} = \left|\frac{G(\omega)}{F(\omega)}\right| e^{j[\theta_g(\omega) - \theta_f(\omega)]}. \tag{2.74}$$

La cantidad $|H(\omega)|$ se llama *magnitud de la respuesta* del sistema y $\theta(\omega)$ se llama *desplazamiento de fase* del sistema.

Un aparato para la medición rápida de la magnitud de la respuesta de un sistema es el generador de barrido. Básicamente, se trata de un oscilador controlado por tensión en el cual se pueden preestablecer la frecuencia central y la frecuencia de barrido. La amplitud de la onda senoidal resultante se mantiene constante y acotada.

El generador se conecta a la entrada del sistema que se prueba y un aditamento de respuesta a la magnitud se conecta a la salida y a la deflexión vertical de un osciloscopio. Una tensión en diente de sierra, derivada del circuito de barrido del osciloscopio, hace que el generador produzca senoidales de amplitud constante pero cuyas frecuencias varían en forma lineal a medida que la traza del osciloscopio se mueve en forma horizontal. El despliegue resultante es una gráfica de la magnitud de la función de transferencia en frecuencia del sistema. Debido a que el desplazamiento de fase y la tasa de cambio de la frecuencia están relacionados, las gráficas de fase en general no se construyen de esta manera.

Nótese que la función de transferencia puede implicar un cambio de unidades (p. ej., de tensión a corriente, de corriente a tensión, etc.). También se puede usar para describir sistemas que contienen elementos activos (factores de ganancia) siempre que sean lineales e invariables en el tiempo.

2.13 RESPUESTA DE ESTADO ESTACIONARIO A SEÑALES PERIÓDICAS

De la sección 2.12 se desprende que si la señal de entrada a un sistema lineal invariable en el tiempo es descrita por

$$f(t) = Ae^{j(\omega_1 t + \phi_1)}, \tag{2.75}$$

la salida es

$$g(t) = AH(\omega_1)e^{j(\omega_1 t + \phi_1)}. \tag{2.76}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Entonces la respuesta del sistema a una señal periódica resulta muy simple si la entrada se describe como una serie de Fourier exponencial,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t},$$

y la salida resultante es

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(n\omega_0) F_n e^{jn\omega_0 t}. \tag{2.77}$$

También se puede relacionar la potencia promedio de la salida a la entrada utilizando el teorema de Parseval:

$$P_f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2,$$

$$P_g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |G_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |H(n\omega_0)|^2 |F_n|^2. \tag{2.78}$$

EJEMPLO 2.13.1

Determine la salida, $g(t)$, de un sistema lineal invariable en el tiempo cuya entrada y cuya función de transferencia en frecuencia se muestran en la figura 2.17. Calcule la potencia promedio de la entrada y la salida.

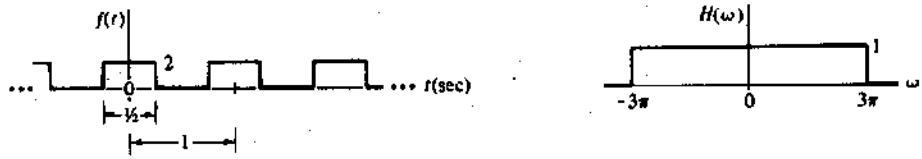


Figura 2.17 Entrada y función de transferencia del ejemplo 2.13.1

Solución Utilizando la serie de Fourier para la entrada,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\,(n\pi/2)}{n\pi/2} e^{jn2\pi t},$$

y, por tanto, la salida es [usando la Ec. (2.77)]

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(2\pi n) \frac{\text{sen}\,(n\pi/2)}{n\pi/2} e^{jn2\pi t} = 1 + \frac{4}{\pi}\cos 2\pi t\,.$$

La potencia promedio en la entrada es

$$P_f = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|^2\,dt = \int_{-1/4}^{1/4} 4\,dt = 2\ \text{W}.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La potencia promedio en la salida es [usando la Ec. (2.78)]

$$P_g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |H(n\omega_0)|^2 |F_n|^2,$$

$$P_g = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + 1 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = 1.811 \text{ W}.$$

Nótese que, en lo que respecta a los cálculos de energía y potencia, sólo interesa la magnitud de $H(\omega)$.

El sistema descrito en el ejercicio 2.12.1 se utiliza para filtrar la señal de entrada del ejemplo 2.13.1. Determine una expresión en serie para la señal de salida; calcule también la potencia de salida.

RESPUESTA: $g(t) \cong \left(\frac{1}{\pi}\right)^3 \left(-\cos 2\pi t + \frac{1}{27} \cos 6\pi t - \cdots\right)$; 0.52 mW.

2.14 GENERACION DE ARMÓNICOS

Una aplicación práctica importante de la representación en serie de Fourier es la medida de la gereración de contenido armónico. Esta generación de armónicos puede ser o no intencional, y aquí se verán en forma sucinta ambos casos.

En algunas aplicaciones es deseable generar una senoidal cuya frecuencia sea un múltiplo exacto de otra senoidal dada. Para conseguirlo se puede utilizar un dispositivo con una característica de ganancia de la salida a la entrada no lineal. Supóngase, por ejemplo, que la característica de ganancia de la salida a la entrada es

$$e_0(t) = a_1 e_i(t) + a_2 e_i^2(t), \tag{2.79}$$

donde $e_0(t)$ y $e_1(t)$ son las señales de salida y entrada, respectivamente. Si se hace $e_1(t) = A \cos \omega_0 t$, puede escribirse

$$\begin{aligned} e_o(t) &= a_1 A \cos \omega_0 t + a_2 A^2 \cos^2 \omega_0 t \\ &= \tfrac{1}{2} a_2 A^2 + a_1 A \cos \omega_0 t + \tfrac{1}{2} a_2 A^2 \cos 2\omega_0 t. \end{aligned} \tag{2.80}$$

La característica de la salida a la entrada no lineal ha provocado la generación de un término de segundo armónico; este dispositivo se llama "duplicador de frecuencias". De igual manera, una no linealidad de tercer orden provocará la generación de un tercer armónico, etcétera. En la práctica, las no linealidades sólo se pueden conocer en forma gráfica. En este caso, se puede utilizar una aproximación en series de potencias o técnicas numéricas utilizando un computador. El último método se ilustra en los problemas al final del capítulo.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Como el contenido armónico se genera por no linealidades, se puede invertir el procedimiento anterior. Si un amplificador tiene una característica de ganancia lineal (es decir, salida a entrada), una entrada senoidal provocará una salida senoidal *de la misma frecuencia*. Por tanto, la presencia de contenido armónico en la salida cuando se aplica a la entrada una senoidal de una sola frecuencia representa una distorsión debida a las no linealidades del amplificador. Una forma conveniente de medir esta distorsión sin necesidad de saber los valores de la ganancia o impedancia es dividir el valor cuadrático medio de los términos de distorsión armónica entre el valor cuadrático medio del primer armónico.† Esta relación se expresa en porcentaje y se llama *distorsión armónica total* (THD, *total harmonic distortion*) del amplificador. En términos de la serie de Fourier trigonométrica, la distorsión armónica total es

$$\text{THD} = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)}{a_1^2 + b_1^2}. \tag{2.81}$$

En el siguiente ejemplo se ilustra el cálculo de la THD para una señal determinada.

EJEMPLO 2.14.1

Cierto amplificador se prueba con una entrada senoidal de 500 Hz y 2 mV de amplitud máxima. Se halla que la salida está compuesta de las secciones parabólicas [t está en ms, $f(t)$ en V]

$$f(t) = \begin{cases} (1 - 4t^2) & -0.5 < t < 0.5 \\ 4(t-1)^2 - 1 & 0.5 < t < 1.5 \end{cases}$$

etcétera (periódicamente), como se muestra en la figura 2.18. (a) Determine la distorsión armónica total (THD). (b) ¿Cuál es la ganancia lineal del amplificador?

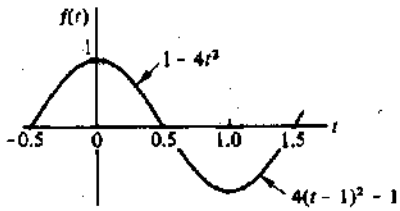


Figura 2.18 Señal parabólica periódica.

Solución El periodo es 2 ms; sin embargo, como sólo interesan las magnitudes relativas de los coeficientes de la serie de Fourier, se puede multiplicar por 10^3 y llevar todo a segundos. Por inspección, el valor medio de $f(t)$ es cero y los b_n son cero (debido a la simetría par de la onda).

† Se supone un valor promedio cero; de otra manera, se debe restar el valor promedio antes de tomar el valor cuadrático medio.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

El cálculo de las a_n da

$$a_n = 32\frac{\text{sen}\,(n\pi/2)}{(n\pi)^3}.$$

(a) El valor cuadrático medio de $f(t)$ es

$$\overline{f^2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\,dt = 2\int_0^{1/2}(1 - 4t^2)^2\,dt = \frac{8}{15}.$$

La distorsión armónica total (THD) es

$$\text{THD} = \frac{\overline{f^2} - \frac{1}{2}a_1^2}{\frac{1}{2}a_1^2} = \frac{16}{15}\left(\frac{\pi^3}{32}\right)^2 - 1 = 0.145\%.$$

(b) La ganancia lineal es $32/2\pi^3 \times 10^3 \approx 516$.

A manera de caso extremo, suponga que como resultado de la senoidal de entrada del ejemplo 2.14.1 se obtiene una señal cuardada simétrica de amplitud pico unitaria. Calcule la ganancia lineal y la THD. [*Sugerencia*: Utilice los resultados del ejemplo 2.5.1].

RESPUESTA: (a) 637; (b) 23.4%.

2.15 ESPECTRO DE FOURIER Y EJEMPLOS

La serie de Fourier exponencial está compuesta de una suma de exponenciales complejos donde las F_n representan las magnitudes y los ángulos de fase iniciales de los fasores rotatorios relacionados de manera armónica. El fasor resultante se halla sumando en forma vectorial los fasores individuales. Sin embargo, salvo en casos simples de uno o dos términos, la suma de una serie de fasores para cada instante constituye una manera inconveniente de describir una señal.

Surge una pregunta: en lugar de sumar y graficar fasores para describir una señal, ¿por qué no graficar los coeficientes de Fourier (las F_n) en función de la velocidad angular (frecuencia)? Una primera consideración sería que el diagrama resultante tendría validez para todos los valores del tiempo y se evitaría tener que sumar y graficar para cada instante. Dicha gráfica de los coeficientes (complejos) de Fourier en función de la frecuencia para la señal $f(t)$ se llama *espectro de Fourier* de $f(t)$. Es bastante común en la bibliografía técnica llamarlo simplemente "espectro" de $f(t)$, en el entendido de que se refiere a la representación exponencial de Fourier.

Para una señal periódica, se ha visto que los coeficientes de Fourier corresponden al peso relativo de las amplitudes y fases de un conjunto de fasores relacionados de manera

http://libreria-universitaria.blogspot.com

armónica. Por tanto, el espectro de Fourier sólo existe en $\omega = 0, \pm\omega_0, \pm 2\omega_0, \pm 3\omega_0, \ldots$; es decir, sólo en valores discretos de ω. O sea, se trata de un *espectro discreto* llamado a veces *espectro de línea*. Gráficamente se puede representar trazando líneas verticales en los puntos discretos $\omega = 0, \pm\omega_0, \pm 2\omega_0, \ldots$, de alturas proporcionales a las amplitudes de las componentes en frecuencia correspondientes (suponiendo que los coeficientes tienen valor real). Entonces *espectro de amplitudes* aparece en una gráfica como una serie de líneas verticales equidistantes, con alturas proporcionales a las amplitudes de los componentes de frecuencia respectivos.

En general, sin embargo, las F_n tienen valor complejo. Entonces, para describir los coeficientes se requieren dos gráficas, el *espectro de magnitud* y el *espectro de fase*. En el siguiente ejemplo se ilustran ambas formas de dibujar los espectros.

EJEMPLO 2.15.1

Trace el espectro de amplitud y los espectros de magnitud y de fase de la función del ejemplo 2.11.1: $f(t) = 2 \operatorname{sen} 100t$.

Solución Las gráficas se muestran en la figura 2.19. Nótese que el espectro de magnitud es simétrico con respecto a ω=0. Ésta es una característica general de las $f(t)$ reales, como puede verse en la ecuación (2.46).

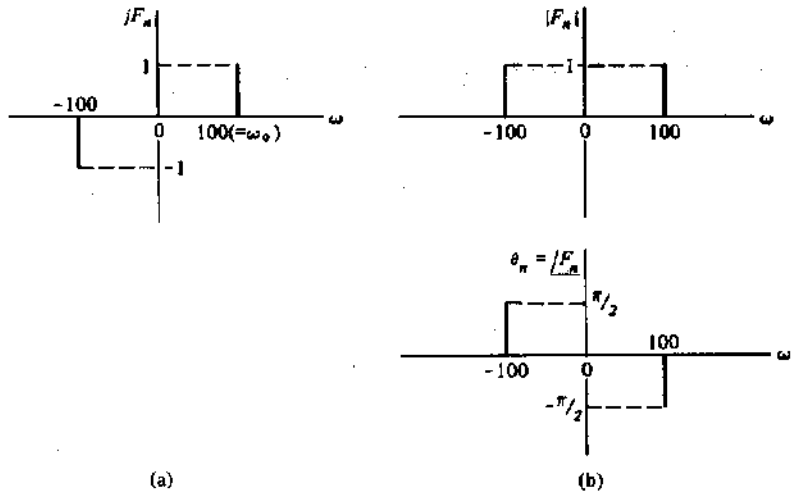


Figura 2.19 Espectros de línea correspondientes a $f(t)$ en el ejemplo 2.15.1: (a) espectro de amplitud; (b) espectros de magnitud y de fase.

Se podría haber usado la serie trigonométrica para describir el espectro. En este caso se habrían obtenido espectros de ampitud y de fase de un solo lado (es decir, solamente

http://libreria-universitaria.blogspot.com

$n \geq 0$). La amplitud y la fase de cada componente senoidal se pueden hallar a partir de las ecuaciones (2.58) y (2.59). En la figura 2.20 se ilustra una interesante interpretación del espectro trigonométrico.

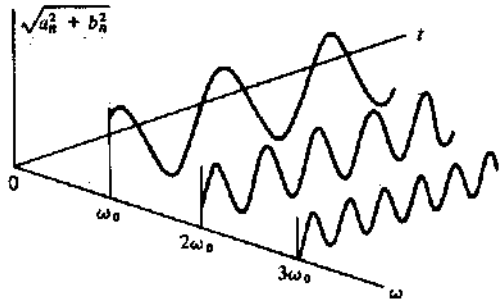


Figura 2.20 Interpretación del espectro de línea trigonométrico.

A continuación hallaremos el espectro de Fourier para la función pulso cuadrado periódico de la figura 2.21. Esta función es un caso generalizado de la señal cuadrada en la que el ancho y la altura de los pulsos rectangulares son variables y un nivel tiene amplitud cero. La función y su espectro correspondiente desempeñan un importante papel en el análisis de muchos sistemas.

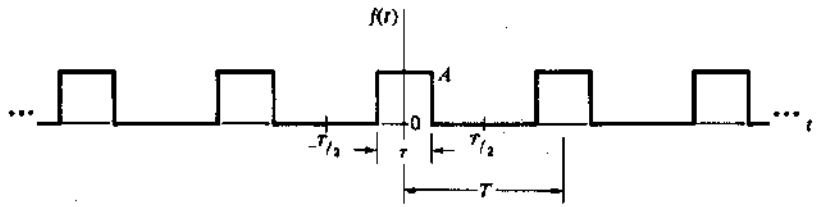


Figura 2.21 Función pulso cuadrado periódico.

Procediendo al análisis, los coeficientes de Fourier son

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$= \frac{-A}{jn\omega_0 T}\left(e^{-jn\omega_0\tau/2} - e^{jn\omega_0\tau/2}\right), \qquad n \neq 0,$$

$$= \frac{2A}{n\omega_0 T}\,\text{sen}\,(n\omega_0\tau/2), \qquad n \neq 0,$$

$$F_n = \frac{A\tau}{T}\frac{\text{sen}(n\omega_0\tau/2)}{(n\omega_0\tau/2)}, \qquad n \neq 0.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Si se define una nueva variable normalizada $x = n\omega_0\tau/2$, se tiene

$$F_n = \frac{A\tau}{T}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right] \qquad x \neq 0.$$

La función encerrada entre corchetes aparece tan a menudo que por comodidad se abreviará: "seno sobre argumento".†

$$\operatorname{Sa}(x) \triangleq \frac{\operatorname{sen} x}{x}. \tag{2.82}$$

En la figura 2.22 aparece una gráfica de la ecuación (2.82).

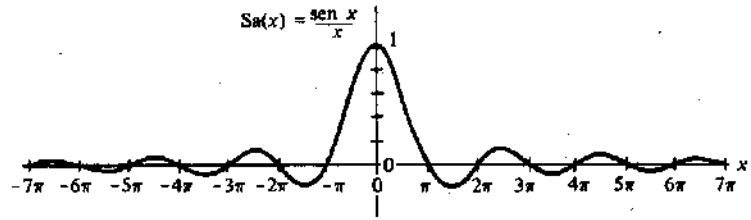


Figura 2.22 Función Sa(x).

Obsérvese en la figura 2.22 que la amplitud de la función Sa(x) oscila, atenuándose en ambas direcciones de x y tendiendo a cero cuando $|x| \to \infty$. Su valor máximo ocurre cuando x se aproxima a cero, puesto que $[(\operatorname{sen} x)/x] \to 1$ cuando $x \to 0$. Lo anterior se puede ver expandiendo sen x en serie de potencias antes de llevar al límite o usando la regla de l'Hospital.

Como‡

$$F_0 = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A\,dt = \frac{A\tau}{T},$$

la representación exponencial de Fourier de la función pulso cuadrado periódico está dada por

$$f(t) = \frac{A\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Sa}(n\pi\tau/T)e^{jn\omega_0 t}, \tag{2.83}$$

donde

$$\omega_0 = 2\pi/T.$$

† Esta abreviatura no es utilizada por todos los autores. Otra muy común es

$$\operatorname{senc}(x) \triangleq \frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi x}.$$

‡ El coeficiente F_0 es el valor medio de la señal $f(t)$. Nótese que este término se puede cambiar sin afectar ninguno de los otros componentes armónicos de la serie de Fourier exponencial.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Como las F_n son reales, sólo es necesario exhibir el espectro de amplitud. Excepto por el factor de escala constante A, este espectro sólo depende de la elección de los parámetros τ y T.

Es instructivo, primero, fijar τ y variar el periodo T. Al crecer T ocurren dos cosas: (1) la amplitud del espectro decrece como $1/T$ y (2) el espaciamiento entre líneas decrece como $2\pi/T$. Estos efectos se muestran en la figura 2.23. Nótese que la envolvente de los espectros es igual excepto por el factor de escala de amplitud. A medida que T crece, el espacio entre componentes, $\Delta\omega = 2\pi/T$, se hace menor y hay cada vez más componentes en un determinado intervalo de frecuencias. Las amplitudes de estos componentes decrecen al aumentar T.† Aunque la amplitud del espectro tiende a cero, su *forma* no cambia. Puede concluirse que *la forma o envolvente del espectro depende sólo de la forma del pulso y no del periodo de repetición T.*

También resulta instructivo fijar T y variar τ (con la restricción de que $\tau < T$). Al crecer τ, (1) la amplitud del espectro aumenta en proporción a τ y (2) el contenido de frecuencias de la señal se comprime dentro de un intervalo cada vez más estrecho. Esta tendencia se muestra en la figura 2.24. Por tanto, existe *una relación inversa entre el ancho del pulso en el tiempo y la "dispersión" de las frecuencias del espectro.* Una medida conveniente de la dispersión de frecuencias es la distancia al primer valor cero de la función $\mathrm{Sa}(x)$.

En resumen, el espectro de una función periódica es un espectro de línea con componentes situados en múltiplos de la frecuencia básica de repetición. El espaciamiento entre componentes de frecuencia es inversamente proporcional al periodo de repetición T. La dispersión de frecuencias de la envolvente del espectro es inversamente

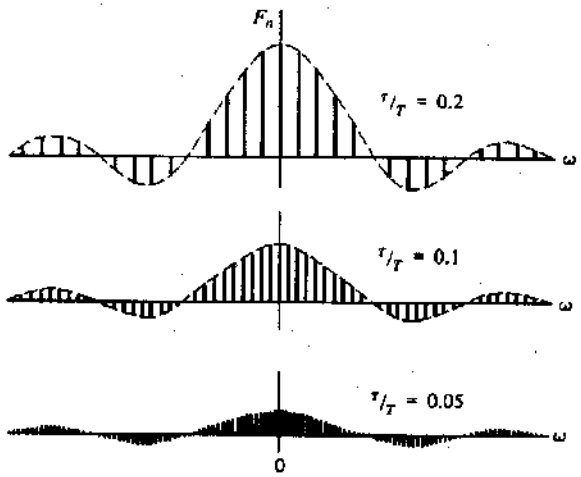


Figura 2.23 Espectros de amplitud para varios valores de τ/T, con τ fija.

† En el límite, cuando $T \to \infty$, sólo queda un pulso porque sus vecinos más cercanos se han desplazado al infinito. En este caso límite, el espaciamiento de las frecuencias se aproxima a cero y el espectro se hace continuo (véase Cap. 3).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

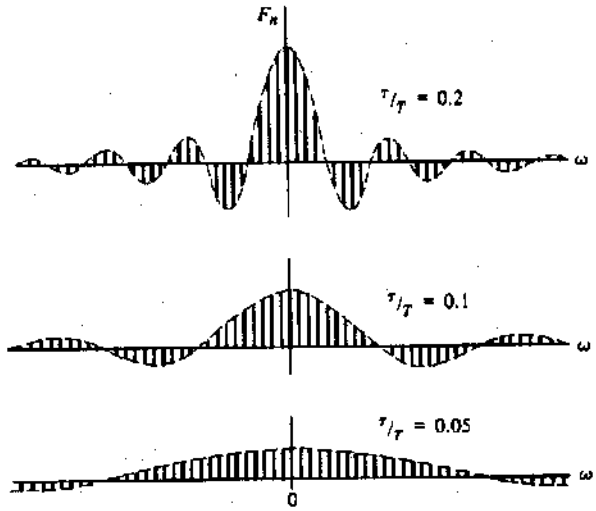


Figura 2.24 Espectros de amplitud para varios valores de τ/T, con T fija.

proporcional a la amplitud del pulso τ. La forma del espectro sólo depende de la forma del pulso y no del periodo de repetición T. Por último, aunque estos efectos se ilustraron empleando una función pulso cuadrado periódico, las conclusiones generales rigen para todas las funciones periódicas.

Existe un equipo de laboratorio para la medición experimental de los espectros de las señales de potencia: el analizador de espectros. Básicamente, está diseñado para aceptar un haz (banda) de frecuencias muy estrecho, medir la potencia y mostrar la raíz cuadrada de ésta en la deflexión vertical de un osciloscopio. La posición de las frecuencias aceptadas se puede cambiar eléctricamente.

En la figura 2.25 se muestra un diagrama de bloques simplificado del analizador de espectros. Una tensión en diente de sierra que se deriva del circuito barredor del osciloscopio hace que el analizador se desplace en forma lineal a través de las frecuencias de interés, mientras la traza del osciloscopio se mueve en forma horizontal. Cualquier componente espectral distinto de cero que esté presente provoca un desplazamiento vertical de la traza del osciloscopio al pasar su frecuencia. Esto puede dar una

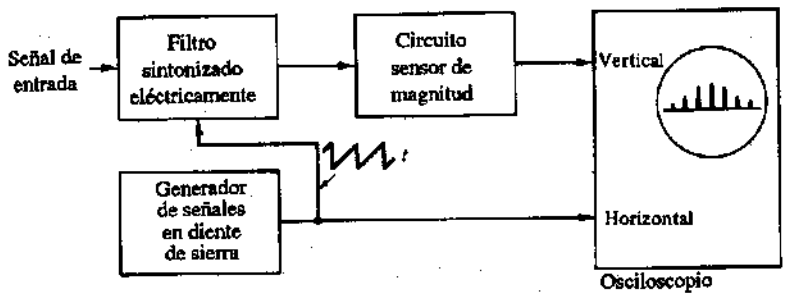


Figura 2.25 Diagrama de bloques de un analizador de espectros.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

buena aproximación del espectro de magnitud de la señal de entrada. La precisión de la aproximación depende de cuán angosta sea la banda de frecuencias que usa el analizador para hacer las mediciones y de cuán lento sea el barrido sobre el intervalo de frecuencias deseado.

2.16 ★ CÁLCULO NUMÉRICO DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER

El cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier se puede aproximar en forma numérica. Esto es conveniente cuando $f(t)$ no se conoce por una expresión analítica sino por puntos de referencia numéricos, o cuando la integración es difícil o debe repetirse, a menudo con cambios de parámetros. Este tema se verá aquí usando sólo los métodos más directos de aproximación numérica.

Para el cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier trigonométrica se usan las ecuaciones (2.54) a (2.56). Eligiendo los términos coseno como ejemplo, tenemos

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\, dt\,, \tag{2.84}$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$. Se supondrá que se conocen, o se tienen disponibles, M puntos de referencia equidistantes que representan a $f(t)$ en $(0, T)$, y que el intervalo entre cada punto es Δt.† Si se aproxima la integración de la ecuación (2.84) con una sumatoria de tiras rectangulares de Δt de ancho cada una, se tiene‡

$$a_n \cong \frac{2}{T}\sum_{m=1}^{M} f(m\cdot\Delta t)\cos\left[n(2\pi/T)\,(m\cdot\Delta t)\right]\Delta t\,, \tag{2.85}$$

donde

$$\Delta t = T/M\,. \tag{2.86}$$

Si se sustituye la ecuación (2.86) en la (2.85), se obtiene el resultado deseado:

$$a_n \cong \frac{2}{M}\sum_{m=1}^{M} f(m\cdot\Delta t)\cos\left(2\pi mn/M\right). \tag{2.87}$$

Por tanto, una vez determinados los M puntos equidistantes, el cálculo se expresa en términos de los enteros m (escala de tiempo) y n (escala de frecuencia).

---

† Si los puntos de referencia no son equidistantes, se puede emplear una subrutina para hacer "el mejor ajuste" numérico a los datos disponibles y después interpolar para obtener muestras equidistantes.

‡ De la misma forma, la sumatoria puede ir de 0 a $(M-1)$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

El cálculo de los demás coeficientes de Fourier se hace de la misma manera, así que

$$b_n \cong \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{M} f(m \cdot \Delta t) \operatorname{sen} 2\pi mn/M), \tag{2.88}$$

$$a_0 \cong \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} f(m \cdot \Delta t). \tag{2.89}$$

Un ejemplo del cálculo anterior para una función conocida demuestra el procedimiento.

EJEMPLO 2.16.1

Usando 100 puntos de muestra equidistantes por periodo, calcule los coeficientes de los primeros 10 términos armónicos de la serie de Fourier trigonométrica para la señal triangular del ejercicio 2.9.1.

Solución En el intervalo $(0, 2\pi)$,

$$f(t) = \begin{cases} \pi/2 - t & 0 \le t < \pi \\ t - 3\pi/2 & \pi \le t < 2\pi \end{cases}$$

y se tiene

$$T = 2\pi,$$
$$M = 100,$$
$$\Delta t = T/M = \pi/50.$$

De las ecuaciones (2.87) a (2.89), se encuentra

$$a_n \cong \frac{2}{100} \sum_{m=1}^{100} f(m\pi/50) \cos(\pi mn/50), \text{ etc.}$$

En la tabla 2.3 aparece un programa de muestra y la solución numérica correspondiente para una calculadora programable.† [*Nota*: La elección de las variables en el programa mostrado es $a_n \to A$; $b_n \to B$; $n \to C$; $m \to X$.] La impresión de los resultados revela que la mayor parte del tiempo de computación se emplea en calcular coeficientes que valen cero. En realidad, esto debería saberse a consecuencia de la simetría de las señales.

† Se elige este tipo de programa por ser fácil de leer y de seguir.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

TABLA 2.3 Programa y resultados para el ejemplo 2.16.1

Programa	Impresión del resultado
1: 0→C	0
2: 0→A;0→B;1→X	−.000000
3: IF X>50;GTO 5	1
4: .02(π/2−πX/50)COS(πCX/50)→Z; GTO 6	1.273659
5: .02(πX/50−3π/2)COS(πCX/50)→Z	.000000
6: Z+A→A	2
7: IF X>50;GTO 9	.000000
8: .02(π/2−πX/50)SIN(πCX/50)→Z; GTO 10	.000000
9: .02(πX/50−3π/2)SIN(πCX/50)→Z	3
10: Z+B→B	.141891
11: IF X=100;GTO 13	.000000
12: X+1→X;GTO 3	4
13: IF C>0;GTO 15	.000000
14: FXD 0; PRT C; FXD 6; PRT A/2;GTO 16	.000000
15: FXD 0; PRT C; FXD 6; PRT A,B	5
16: IF C=10; GTO 18	.051351
17: C+1→C;GTO 2	.000000
18: END	6
	.000000
	.000000
	7
	.026407
	.000000
	8
	.000000
	.000000
	9
	.016145
	.000000
	10
	.000000
	.000000

Es interesante comparar los resultados obtenidos por integración numérica con los valores exactos determinados en el ejercicio 2.9.1. A continuación se muestra una comparación.

n	a_n *aproximado*	a_n *"exacto"*	*Diferencia*
1	1.273659	1.273240	+0.000419
3	0.141891	0.141471	+0.000420
5	0.051351	0.050930	+0.000421
7	0.026407	0.025984	+0.000423
9	0.016145	0.015719	+0.000426

Nótese que la concordancia es buena, aunque no perfecta. Quien esté familiarizado con los procedimientos de la integración numérica podría tratar de mejorar la preci-

http://libreria-universitaria.blogspot.com

sión numérica mediante procedimientos de integración más elaborados. Sin embargo, no es ésta la principal fuente de errores; más adelante dedicaremos alguna atención a esto.

(a) Escriba un programa de computador para el ejemplo 2.16.1.
(b) Ejecute el programa para investigar los efectos en la precisión de los coeficientes, para el siguiente número de puntos de muestra equidistantes por periodo: 20, 40, 60, 80.

RESPUESTA PARA a_1: +0.010523; +0.002621; +0.001164; +0.000654.

Cuando se usan M puntos de referencia equidistantes para representar cierta señal y calcular los coeficientes de Fourier, no sólo la señal es periódica con periodo M, sino que los propios puntos presentan periodicidad (con periodo $1/M$). El resultado neto es que la ortogonalidad entre términos con diferentes números armónicos sólo se garantiza si esa diferencia es menor que $M/2$. Si se toman los números armónicos (n) como los enteros consecutivos empezando en cero, se tiene

$$n \leq M/2. \tag{2.90}$$

En otras palabras, *el mayor coeficiente armónico que se puede determinar unívocamente a partir de M puntos muestreados es aquel para el cual el número armónico es menor o igual que la mitad del número de puntos muestreados.*

La figura 2.26 contiene la ilustración de un espectro de línea típico de una función periódica y un espectro de línea de su aproximación numérica. Nótese que hay cierto error de aproximación aun en los coeficientes para los que $n < M/2$, pero que este error se hace proporcionalmente más grande para $n > M/2$. El error que resulta para aquellos términos tales que $n < M/2$ se llama "error de alias" y suele ser la principal fuente de error en la aproximación numérica. El error de alias es el tema de la sección siguiente. Usando más puntos muestreados para un T fijo (es decir, aumentando M y, en consecuencia, disminyendo Δt) se ayuda a disminuir la cantidad de error de alias presente.

2.17 ★ EFECTOS DE LOS TÉRMINOS ALIAS

Si todas las componentes de frecuencia en determinada señal se hallan en el intervalo armónico dado por la ecuación (2.90), los coeficientes de Fourier se pueden encontrar con la precisión de los procedimientos de integración numérica. No obstante, las magnitudes de dichas componentes no siempre se encuentran en un intervalo finito sino que pueden disminuir gradualmente cuando crece n. Como la ortogonalidad ya no está garantizada, la evaluación numérica de un coeficiente con determinado armónico dentro

http://libreria-universitaria.blogspot.com

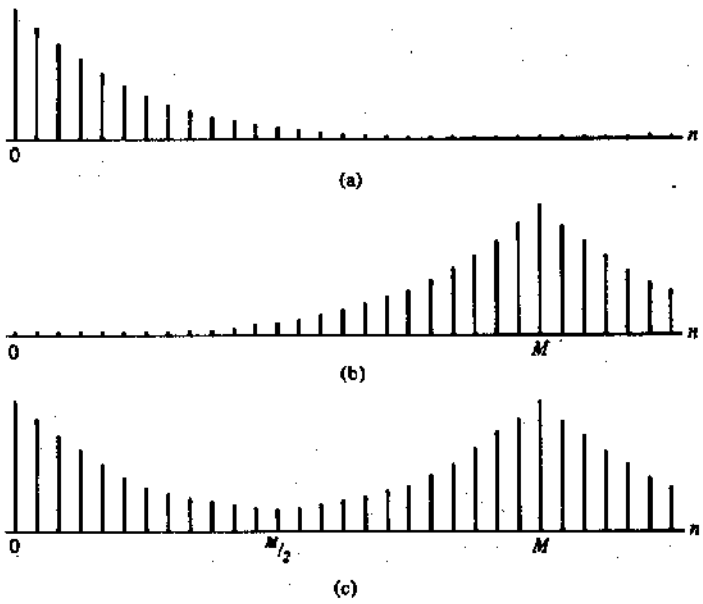


Figura 2.26 (a) Espectro de línea de una función periódica; (b) réplica espectral producida por muestreo; (c) aproximación numérica compuesta del espectro de línea.

del intervalo de la ecuación (2.90) puede, en realidad, contener componentes de señal que, de otra manera, deberían asignarse a coeficientes mayores que están fuera de ese intervalo (véase Fig. 2.26). Este tipo de error se llama *error de alias*.

Sólo ciertos armónicos contribuyen (en forma errónea) al resultado.† El efecto neto en el cálculo se puede resumir como sigue. Si se designan los valores verdaderos de los coeficientes de Fourier por medio de a'_n, b'_n, los valores que se calculan realmente de los M puntos equidistantes están dados por

$$a_n = a'_n + \sum_{k=1}^{\infty} (a'_{kM+n} + a'_{kM-n}), \tag{2.91}$$

$$b_n = b'_n + \sum_{k=1}^{\infty} (b'_{kM+n} - b'_{kM-n}). \tag{2.92}$$

Por tanto, si se restringe el intervalo de cálculo a $n \leq M/2$, en las ecuaciones (2.91) y (2.92) se muestra que la exactitud numérica de los coeficientes de Fourier calculados a_n, b_n depende de la rapidez con que disminuyan los coeficientes reales para $n \leq M/2$. Los términos dentro de las sumatorias en las ecuaciones (2.91) y (2.92) se llaman términos alias y aparecen como resultado de la naturaleza muestreada de los datos. La presencia de los términos alias suele ser la mayor fuente de imprecisión en el cálculo numérico de los coeficientes de Fourier. Su efecto se puede minimizar para una señal determinada con T fijo reduciendo Δt y aumentando, por tanto, el número de puntos de muestra, M.

† La prueba de esto se posterga hasta el capítulo 3.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Para resaltar el efecto de los términos alias en la exactitud numérica, intentaremos estimar la precisión del primer coeficiente de Fourier a_1 del ejemplo 2.16.1. El error en la aproximación numérica se define por

$$\epsilon_n = a_n - a'_n .$$

Usando la ecuación (2.91) con $M = 100$, el error en a_1 es

$$\epsilon_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (a'_{100k+n} + a'_{100k-n}) .$$

De los resultados del ejercicio 2.9.1, se sabe que los verdaderos coeficientes de Fourier para esta señal son

$$a'_n = \begin{cases} 4/(\pi n^2) & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

Entonces, el error de alias en el cálculo del primer coeficiente de Fourier es

$$\epsilon_1 = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{(101)^2} + \frac{1}{(201)^2} + \frac{1}{(301)^2} + \frac{1}{(401)^2} + \cdots + \frac{1}{(99)^2} + \frac{1}{(199)^2} + \frac{1}{(299)^2} + \frac{1}{(399)^2} + \cdots\right],$$

$$\epsilon_1 \cong \frac{8}{\pi}\frac{1}{(100)^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right).$$

Sin embargo, también se puede escribir†

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

de manera que

$$\epsilon_1 \cong \frac{8}{\pi}\frac{1}{(100)^2}\frac{\pi^2}{6} = 0.000419 .$$

La comparación con los resultados del ejemplo 2.16.1 revela que todo el error de aproximación (hasta seis decimales) se debe al alias, pese al hecho de que se usaron 100 datos muestreados para calcular el primer coeficiente armónico. Por tanto, los efectos del alias no siempre son despreciables. Además, al aumentar el número armónico n, algunos términos de la sumatoria de la ecuación (2.91) o de la (2.92) se vuelven predominantes de tal forma que el error de alias crece en general con el aumento de n. Esta tendencia es evidente en el ejemplo 2.16.1.

Para un número dado de puntos, el efecto del alias depende de la razón de convergencia de los coeficientes de Fourier cuando n crece. En muchos casos, el verdadero comportamiento de los coeficientes quizá no se conozca. Sin embargo, su razón de

† En puntos de discontinuidad finita, la serie de Fourier converge al promedio aritmético de los valores de la función en ambos lados de la discontinuidad. Así, este resultado se puede obtener evaluando el resultado del ejemplo 2.9.1 en $t = 2$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

convergencia se puede estimar, a menudo, ya sea a partir del conocimiento de la naturaleza física de la fuente de los datos o bien a partir de las características de la propia señal. El tema anterior se tocará de nuevo en una sección posterior de este capítulo.

¿Qué ocurre si se intenta calcular un coeficiente para $n > M/2$? En este caso, predominará uno de los términos alias de la ecuación (2.91) o (2.92). Por ejemplo, si se intentara calcular a_{99} en el ejemplo 2.16.1, la ecuación (2.91) daría

$$a_{99} = a'_{99} + (a'_{199} + a'_{299} + \cdots) + (a'_1 + a'_{101} + \cdots).$$

El término a'_1 predominará, por supuesto, si los coeficientes de la serie son convergentes. De hecho, si se escriben estos resultados para algunos valores diferentes de n, resulta evidente que todos los a_n calculados son simétricos y todos los b_n antisimétricos con respecto a $n = M/2$. Esto se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.17.1

Evalúe numéricamente los coeficientes de los primeros nueve términos armónicos de la serie de Fourier trigonométrica para la señal definida por

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Use 10 puntos de muestra por periodo. En los puntos de discontinuidad finita, use el promedio de los valores a cada lado de la discontinuidad.

Solución $T = 2\pi$; $M = 10$; $\Delta t = 2\pi/10 = \pi/5$;

$$a_n \cong \frac{2}{10} \sum_{m=1}^{10} f(m\pi/5) \cos(2\pi mn/10), \text{ etc.}$$

En la tabla 2.4 se presenta un programa de muestra con la solución. Nótense las propiedades de simetría de los coeficientes con respecto al número armónico $n = M/2 = 5$.

EJERCICIO 2.17.1

Escriba un programa para el cálculo de los coeficientes de Fourier trigonométricos de la señal del ejercicio 2.9.2. Use 10 puntos de muestra en el intervalo (0, 2); asigne el valor medio de la señal al punto de muestra en $t = 2$. (a) Determine el error numérico en b_1. (b) ¿Cuál es la relación entre b_9 y b_1?

RESPUESTA: (a) +0.021083; (b) igual pero de signo contrario.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

TABLA 2.4 Programa y resultados para el ejemplo 2.17.1

Programa	Impresión del resultado
1: 0→C	0
2: 0→A;0→B;1→X;1→Y	.785398
3: IF X=5;.5→Y	1
4: .2(πX/5)Y COS(πCX/5)→Z	−.657984
5: Z+A→A	.966883
6: .2(πX/5)Y SIN(πCX/5)→Z	2
7: Z+B→B	.000000
8: IF X=5;GTO 10	−.432403
9: X+1→X; GTO 3	3
10: FXD 0;PRT C	−.095999
11: IF C=0;FXD 6;PRT A/2; GTO 13	.228250
12: FXD 6;PRT A,B	4
13: IF C=10;GTO 15	.000000
14: C+1→C;GTO 2	−.102077
15: END	5
	−.062832
	.000000
	6
	.000000
	.102077
	7
	−.095999
	−.228250
	8
	.000000
	.432403
	9
	−.657984
	−.966883

El cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier exponencial se hace de manera similar por medio de las identidades de Euler. Por tanto, la ecuación (2.36) se puede escribir de nuevo como

$$F_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\,dt - j\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\text{sen}\,n\omega_0 t\,dt \tag{2.93}$$

$$= \frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2}, \tag{2.94}$$

y ya se vio el cálculo numérico de los a_n y b_n.

El cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier exponencial es, en esencia, igual que para la serie trigonométrica, aunque la interpretación es, de hecho, un tanto diferente. Recuérdese que en la serie exponencial existen frecuencias tanto positivas como negativas, mientras que en la serie trigonométrica, sólo positivas. Para una $f(t)$ de valor real, la relación entre las componentes de frecuencia positivas y negativas en la serie exponencial es la de una conjugada compleja; es decir, $F_{-n} = F_n^*$ [véase Ec. (2.46)]. Supóngase que se calculan en forma numérica los coeficientes de

http://libreria-universitaria.blogspot.com

la serie exponencial por medio de las ecuaciones (2.87), (2.88) y (2.94). Los coeficientes calculados para $0 \le n \le M/2$ dan las componentes de frecuencia positiva, igual que en la serie trigonométrica. Sin embargo, los coeficientes calculados para $M/2 \le n \le M$ son las conjugadas de los de $0 \le n \le M/2$ [véanse Ecs. (2.91), (2.92) y (2.94)]. Se puede concluir, pues, que *las componentes de frecuencia positiva en el cálculo numérico de los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se encuentran en el intervalo* $0 \le n \le M/2$ *y las componentes de frecuencia negativa, en* $M/2 \le n \le M$. El alias afecta la exactitud numérica de la serie exponencial al igual que en la serie trigonométrica.

Esta introducción permitirá acudir al computador digital para evaluar en forma numérica las series de Fourier. En el capítulo 3 se dará una mayor base teórica para la comprensión de los efectos del alias.

EJEMPLO 2.17.2

Calcule y grafique el espectro de magnitud de la serie de Fourier exponencial para la señal periódica de la figura 2.27(a). Use 50 puntos de muestra por periodo y grafique el espectro en el intervalo $0 \le n < 50$. Suponga continuidad hacia la izquierda en los puntos de discontinuidad finita de la señal.

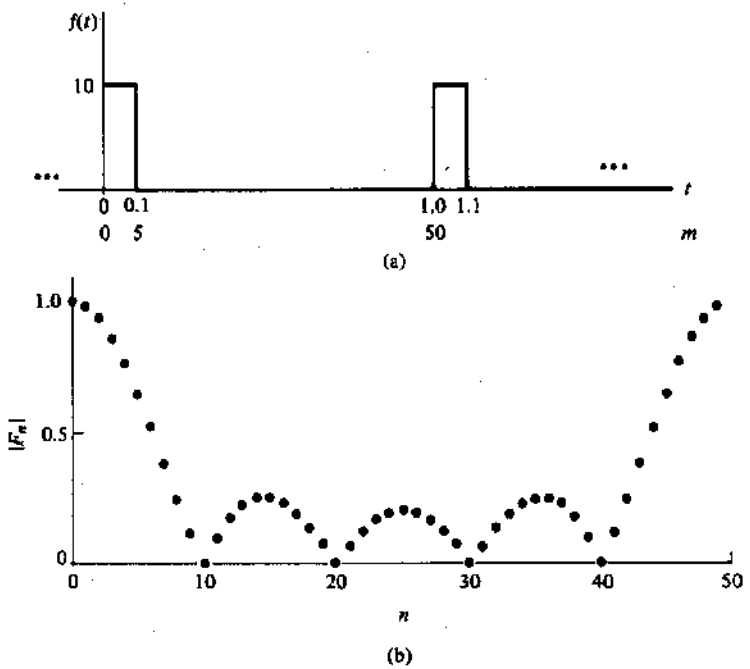


Figura 2.27 (a) Función periódica rectangular; (b) su espectro de magnitud calculado utilizando la serie de Fourier exponencial discreta (50 puntos de muestra).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Solución Véase la figura 2.27(b)

Determine la o las características comunes de los siguientes coeficientes de la serie de Fourier exponencial ($k = 0, 1, 2, \ldots$): (a) $n = kM$; (b) $n = kM/2$.

RESPUESTA: (a) Todos representan el valor medio de la señal; (b) todos deben ser reales.

2.18 FUNCIONES SINGULARES

Existe una clase especial de funciones que desempeñan un papel de tanta importancia en el análisis de señales que se tratarán por separado. Los miembros de esta clase tienen formas matemáticas simples, pero o no son finitas o no tienen derivadas finitas de todo orden en todos los puntos. Por ello se llaman *funciones singulares*.

Estas funciones son idealizaciones matemáticas y, en rigor, no aparecen en sistemas físicos. Resultan útiles en el análisis de sistemas debido a que son buenas aproximaciones a ciertas condiciones restrictivas de los sistemas físicos. Esto, junto a sus simples formas matemáticas y propiedades, permite a menudo evaluar complicadas expresiones que, de otra manera, sería imposible (o por lo menos muy difícil) resolver.

Una función singular de mucha importancia es la función impulso unitario (también llamada función delta de Dirac o función impulso), $\delta(t)$. Esta función tiene la propiedad mostrada por la siguiente integral:

$$\int_a^b f(t)\,\delta(t - t_0)\,dt = \begin{cases} f(t_0) & a < t_0 < b \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \tag{2.95}$$

para cualquier $f(t)$ continua en $t = t_0$, con t_0 finito. La función impulso selecciona o separa un valor particular de la función $f(t)$, o sea el valor en $t = t_0$, en el proceso de integración. La ecuación (2.95) se designa, con frecuencia, *propiedad de separación* de la función impulso. A continuación se da un ejemplo del uso de esta propiedad.

EJEMPLO 2.18.1

Evalúe la integral definida $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\cos t}\,\delta(t - \pi)\,dt$.

Solución $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\cos t}\,\delta(t - \pi)\,dt = e^{\cos \pi} = e^{-1} = 0.368.$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJERCICIO 2.18.1

Evalúe

$$\text{(a)} \int_1^{\infty} e^{-x^2}\delta(x)\,dx, \qquad \text{(b)} \int_1^{100} \log t\,\delta(t-10)\,dt.$$

RESPUESTA: (a) 0; (b) 1.

En la ecuación (2.95) se ve que la función impulso no es una función ordinaria. Sin embargo, $\delta(t)$ se puede tratar como una función que obedece formalmente las reglas de integración, basando las conclusiones en la ecuación (2.95) y no en las propiedades puntuales de $\delta(t)$. Con la ecuación (2.95) se pueden demostrar de manera formal las siguientes propiedades de la función impulso.

Área (fuerza)

Si f(t) = 1, la ecuación (2.95) queda como

$$\int_a^b \delta(t-t_0)\,dt = 1, \qquad a < t_0 < b. \tag{2.96}$$

En consecuencia, $\delta(t)$ tiene área unitaria.[†] Del mismo modo, $A\delta(t)$ tiene un área de A unidades.

Amplitud

Se tiene

$$\delta(t-t_0) = 0 \quad \text{para toda} \quad t \neq t_0. \tag{2.97}$$

Que esto debe ser cierto se ve en la ecuación (2.95); es decir, todos los valores de $f(t)$ para $t \neq t_0$ se desprecian (se anulan) en el proceso de integración. La *amplitud en el punto* $t = t_0$ queda indefinida.

Representacón gráfica

Resulta obvio, a partir de las propiedades enunciadas, que se encontrará cierta dificultad para graficar la función impulso. A fin de obviar la representación de la amplitud en $t = t_0$, se dibujará una flecha en ese punto para indicar la función impulso. El *área* o *fuerza* del impulso se designa con una cantidad entre paréntesis junto a la flecha o mediante la altura de la flecha (o por medio de ambas), como se muestra en la figura 2.28(a). Una flecha hacia abajo indica área negativa.

[†] Área, en este sentido, denota "fuerza" o "peso" de la función impulso.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

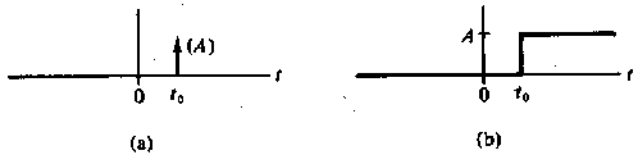


Figura 2.28 Representación gráfica de (a) $A\delta(t - t_0)$; (b) $Au(t - t_0)$.

Simetría

$\delta(t)$ se define como una función par; esto es,

$$\delta(t) = \delta(-t). \tag{2.98}$$

Esto proviene del hecho de que en la ecuación (2.95) no existe diferencia si el punto $t - t_0$ se aproxima por la derecha o por la izquierda en la integración.

Escala de tiempo

Puede aplicarse una escala al argumento de la función impulso como sigue:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t). \tag{2.99}$$

Esto se puede probar haciendo el cambio de variable $x = at$; para a 0,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta[a(t - t_0)]\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{a}\right)\delta(x - at_0)\frac{dx}{a} = \frac{1}{a}f(t_0).$$

Si se repite para $a < 0$ con cambio de variable $x = at$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta[a(t - t_0)]\,dt = \int_{\infty}^{-\infty} f\left(\frac{x}{a}\right)\delta(x - at_0)\frac{dx}{a} = -\frac{1}{a}f(t_0).$$

Combinando estas dos ecuaciones se puede escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta[a(t - t_0)]\,dt = \frac{1}{|a|}f(t_0).$$

En forma gráfica, es necesaria la introducción de este factor de escala para mantener el área unitaria en la definición de la función de impulso.

EJEMPLO 2.18.2

Evalúe la integral definida

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\operatorname{sen} t}\cos 2t\,\delta(2t - 2\pi)\,dt.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Solución Usando primero la propiedad de escala de tiempo y luego la de separación, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\operatorname{sen} t} \cos 2t\, \delta(2t - 2\pi)\, dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\operatorname{sen} t} \cos 2t\, \delta(t - \pi)\, dt = \frac{1}{2}\pi^2.$$

Evalúe la integral definida

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(1 - \pi t) \cos (1/t)\, dt.$$

RESPUESTA: $-1/\pi$.

Multiplicación por una función del tiempo

En ocasiones se desea utilizar $\delta(t)$ sin la integral que lo define. Este tipo de operación es sólo formal y produce la siguiente relación

$$f(t)\,\delta(t - t_0) = f(t_0)\,\delta(t - t_0), \qquad f(t) \text{ continua en } t_0. \tag{2.100}$$

que se puede comprobar fácilmente integrando ambos lados.

Relación con la función escalón unitario

La función escalón unitario se define por

$$u(t - t_0) \triangleq \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}. \tag{2.101}$$

La figura 2.28(b) es la representación gráfica de $Au(t)$. De la ecuación (2.95) y haciendo $a = -\infty$, $b = t$ y $f(t) = 1$,

$$\int_a^b f(\tau)\,\delta(\tau - t_0)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - t_0)\, d\tau = \left\{\begin{matrix} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{matrix}\right\} = u(t - t_0),$$

o

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - t_0)\, d\tau = u(t - t_0). \tag{2.102}$$

Por tanto, la integral de la función impulso unitario es la función escalón unitario. Lo inverso se puede probar diferenciando ambos lados de la ecuación (2.102).

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau - t_0)\, d\tau = \frac{d}{dt} u(t - t_0),$$

$$\delta(t - t_0) = \frac{d}{dt} u(t - t_0).$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La derivada de la función escalón unitario en $t = t_0$ es el impulso unitario que ocurre en $t = t_0$.

EJEMPLO 2.18.3

Calcule y haga la gráfica de la derivada del pulso rectangular de la figura 2.29(a).

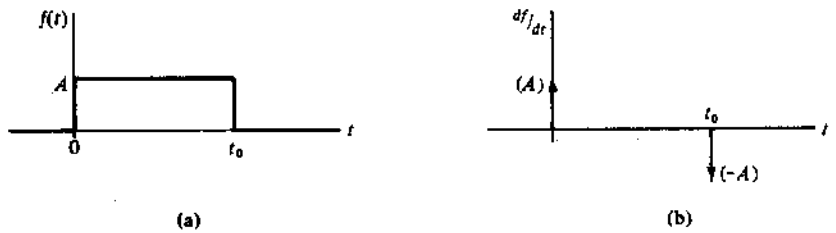


Figura 2.29 Pulso rectangular y su derivada.

Solución Escribiendo una ecuación para el pulso en términos de funciones escalón, se tiene

$$f(t) = Au(t) - Au(t - t_0),$$

$$\frac{df}{dt} = A\,\delta(t) - A\,\delta(t - t_0).$$

El resultado se puede verificar integrando

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{df}{d\tau}\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} [A\,\delta(\tau) - A\,\delta(\tau - t_0)]\,d\tau = Au(t) - Au(t - t_0),$$

lo que confirma el resultado. La solución gráfica correspondiente aparece en la figura 2.29(b).

Si $f(t) = u(t) - u(t - 3) - K\delta(t - 4)$. Determine el valor numérico de K para que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 0$.

RESPUESTA: 3.

Las operaciones indicadas que involucran a la función impulso provienen formalmente de su definición integral. Se vio que la función impulso no es una función verdadera en un sentido matemático. No obstante, se ha justificado matemáticamente con la teoría de las "funciones generalizadas".[†] Según esto, la función impulso se define

[†] M. J. Lighthill, *Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge University Press, 1959.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

como el límite de una secuencia de funciones regulares con buen comportamiento que tienen la necesaria propiedad de que el área se mantiene constante (unitaria) a medida que se reduce el ancho. Todas las operaciones se efectúan sobre esta secuencia y, por último, se toma el límite para definir la función impulso cuando el ancho se aproxima a cero.

La secuencia de pulsos no es única y se pueden elegir muchas formas diferentes. De hecho, la forma del pulso particular es, relativamente, de poca importancia siempre que la secuencia satisfaga las condiciones de que (1) describa una función que se hace infinitamente alta e infinitesimalmente estrecha de manera que (2) el área comprendida sea constante (unitaria). Por ejemplo, las siguientes secuencias satisfacen todas esas condiciones (Fig. 2.30)

a) Pulso rectangular: $$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}\left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right]. \tag{2.103}$$

b) Pulso triangular: $$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}\left[1 - \frac{|t|}{\tau}\right], \quad |t| < \tau. \tag{2.104}$$

c) Exponencial de dos lados: $$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} e^{-|2t|/\tau}. \tag{2.105}$$

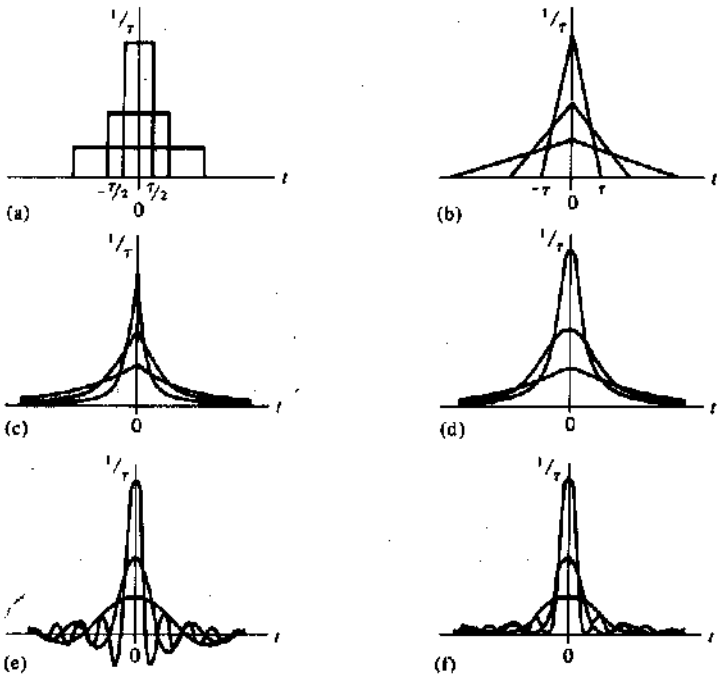


Figura 2.30 Definición de la función impulso por secuencia de funciones: (a) pulso rectangular; b) pulso triangular; c) exponencial de dos lados; d) pulso gaussiano; e) función de muestreo; f) función de muestreo al cuadrado.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

d) Pulso gaussiano: $\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} e^{-\pi(t/\tau)^2}$. (2.106)

e) Función de muestreo: $\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \text{Sa}(\pi t/\tau)$. (2.107)

f) Función de muestreo al cuadrado: $\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \text{Sa}^2(\pi t/\tau)$. (2.108)

En la ecuación (2.107) es útil notar que $1/\pi \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}(x)\,dx = 1$. Esta secuencia se puede reescribir en forma un tanto diferente haciendo $\pi/\tau = k$ de manera que

$$\delta(t) = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{\pi} \text{Sa}(kt). \tag{2.109}$$

De la misma forma, la ecuación (2.108) se puede reescribir como

$$\delta(t) = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{\pi} \text{Sa}^2(kt). \tag{2.110}$$

2.19 RESPUESTA AL IMPULSO

Para describir la respuesta de un sistema en el dominio del tiempo, debemos emplear un razonamiento similar al utilizado en el dominio de la frecuencia. Entre las funciones elementales a nuestra disposición, la más delimitada (es decir, la de menor duración) es la función impulso. Si se prueba un sistema con un impulso unitario, la salida resultante describirá el comportamiento del sistema durante todo el tiempo como respuesta a la función de impulso unitario que ocurre en forma instantánea. Dicha salida se llama *respuesta al impulso* del sistema.

Esto se puede expresar en forma matemática de la siguiente manera. Si la entrada al sistema es $f(t)$ y la salida correspondiente es $g(t)$, entonces, de la ecuación (2.11), se tiene

$$g(t) = \mathcal{T}\{f(t)\}. \tag{2.111}$$

De manera especifica, se elige $f(t) = \delta(t)$, con todas las condiciones iniciales iguales a cero, y se define la salida resultante como respuesta a un impulso:

$$h(t) \triangleq \mathcal{T}\{\delta(t)\}. \tag{2.112}$$

Para sistemas sismples, la ecuación (2.112) se puede aplicar en forma directa. En sistemas más complicados se puede usar como entrada una de las secuencias de la figura 2.30. Después de obtener una solución para la salida correspondiente, la respuesta al impulso se puede obtener tomando el límite.

EJEMPLO 2.19.1

Determine la respuesta al impulso del sistema de la figura 2.31(a).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

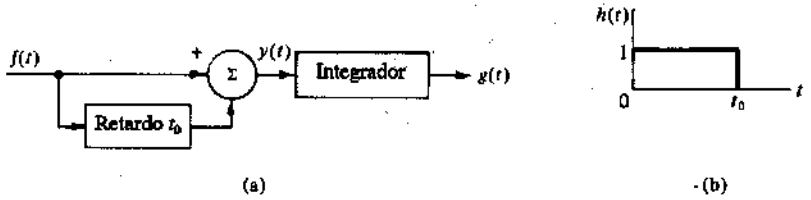


Figura 2.31 Circuito de retención y su respuesta al impulso.

Solución Para hallar la respuesta a un impulso, hágase $f(t) = \delta(t)$. Entonces (ver figura 2.31a)

$$y(t) = \delta(t) - \delta(t - t_0),$$

y

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} [\delta(\tau) - \delta(\tau - t_0)]\, d\tau = u(t) - u(t - t_0).$$

Éste es un ejemplo del "circuito de retención" que suele usarse en sistemas de pulsos. Su respuesta al impulso se muestra en la figura 2.31(b).

Determine la respuesta al impulso del sistema de la figura 2.32 para (a) $K = 1$ y (b) $K < 1$. Este tipo de sistema es útil en la detección de señales periódicas si se conoce el periodo.

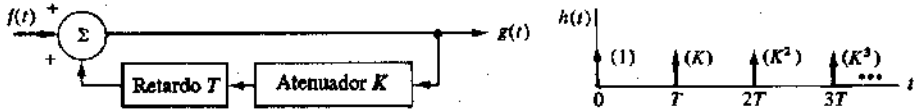


Figura 2.32 Filtro recursivo y su respuesta al impulso.

RESPUESTA: (a) $h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$; (b) $h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (K)^n \delta(t - nT)$.

2.20 ★ CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER

Al fin, con las nuevas perspectivas, se pueden establecer algunos resultados generales para las series de Fourier. Si una señal $f(t)$ cumple las llamadas "condiciones de Dirichlet"en el intervalo $(0, T)$:

http://libreria-universitaria.blogspot.com

1. $f(t)$ tiene sólo un número finito de máximos y mínimos en el intervalo T;
2. $f(t)$ tiene sólo un número finito de discontinuidades finitas (es decir, es "continua por tramos") en el intervalo T;
3. $f(t)$ satisface la desigualdad

$$\int_0^T |f(t)|\,dt < \infty;$$

entonces se puede escribir una representación en serie de Fourier que converja en $f(t)$ en todos los puntos de continuidad. Estas condiciones son suficientes mas no necesarias, y se encontrarán algunas funciones que, si bien no satisfacen las condiciones de Dirichlet, se pueden representar en serie de Fourier.

Las condiciones de Dirichlet se satisfacen por medio de señales producidas en el laboratorio, dado que la condición más endeble

$$\int_0^T |f(t)|^2\,dt < \infty$$

siempre se cumple. Dicho de otra forma, siempre se puede usar una serie de Fourier para representar cualquier señal con energía finita en $(0, T)$.

En cualquier función que satisfaga las condiciones de Dirichlet, la magnitud de los coeficientes decrece al aumentar n, al menos tan rápidamente como n^{-1}; es decir,†

$$|F_n| \leq \frac{M_N}{n} \text{ para } n > N, \tag{2.113}$$

donde M es un número positivo independiente de n. Si la función dada tiene una derivada que cumple las condiciones de Dirichlet, los coeficientes de Fourier disminuyen al menos con tanta rapidez como n^{-2}. Así mismo, si la función tiene una segunda derivada que satisface dichas condiciones, los coeficientes decrecen al menos con tanta rapidez como n^{-3}. En general, si la derivada k-ésima satisface las condiciones de Dirichlet, la magnitud de los coeficientes de Fourier disminuirá al menos con tanta rapidez como $n^{-(k+1)}$ al hacerse n muy grande.

La función impulso unitario no satisface las condiciones de Dirichlet. No obstante, la integral de una secuencia periódica de funciones impulso sí las satisface dado que el área neta por periodo es cero. Además, la función impulso unitario aparece siempre que se tome el número suficiente de derivadas de una función continua por tramos. De ahí que el orden de la derivada de una función que muestra en primer lugar funciones impulso representa el orden negativo de n que acota la razón de disminución de los coeficientes. Por ejemplo, la magnitud de los coeficientes de Fourier para una señal cuadrada deben disminuir, al menos, con tanta rapidez como $1/n$ para n grande, para una

† Las relaciones análogas para la serie trigonométrica de Fourier son

$$|a_n| \leq \frac{M_N}{n},\ |b_n| \leq \frac{M_N}{n} \text{ para } n > N.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

señal triangular como $1/n^2$, para una señal compuesta por secciones parabólicas como $1/n^3$, etcétera. Las justificaciones de esto se harán evidentes cuando, en el capítulo 3, se analicen las propiedades derivativas de la transformada de Fourier. Por ahora, estas observaciones serán útiles en los cálculos de los coeficientes de Fourier.

La representación en series de Fourier converge en el cuadrático medio (es decir, el error cuadrático medio tiende a cero de manera uniforme y absoluta cuando $N \to \infty$) en $f(t)$ para toda $f(t)$ que cumpla las condiciones de Dirichlet.[†]. En muchas funciones, la convergencia es lo suficientemente rápida para obtener una buena aproximación a la función original truncando la serie después de unos cuantos términos.

En puntos de discontinuidad finita en la función, la serie de Fourier converge en el valor promedio aritmético de la función a cada lado de la discontinuidad. A medida que aumenta el número de términos (N) de la serie de Fourier, el error cuadrático medio entre la representación y la función dada decrece y la aproximación a la función dada mejora en todas partes excepto en la vecindad inmediata de una discontinuidad finita. Sin embargo, en la cercanía de estos puntos, la representación en serie de Fourier deja de converger aunque el error cuadrático medio tienda a cero. De ahí que, aunque aumente el número de términos, la representación tiene sobrepaso cerca de los puntos de discontinuidad de $f(t)$. Este comportamiento se conoce como fenómeno de Gibbs, por su descubridor, y se muestra en la figura 2.33 para una señal periódica en diente de sierra. Nótese que el pico de sobrepaso se acerca más al punto de discontinuidad mientras más términos se agregan a la serie. Aunque el error cuadrático medio tiende a cero en el límite para n grande, la amplitud del sobrepaso se acerca a un valor

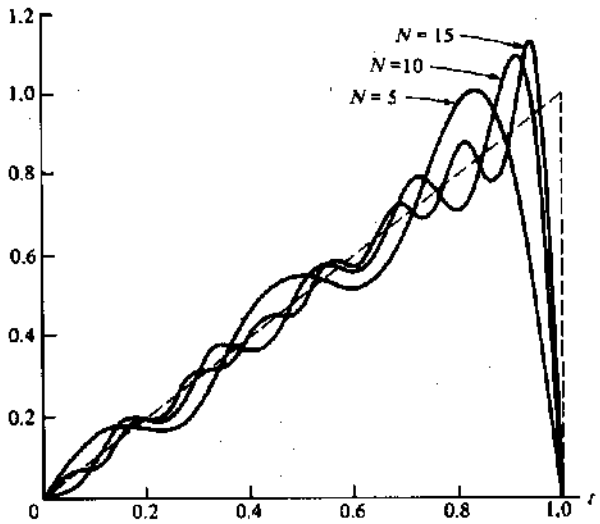


Figura 2.33 Fenómeno de Gibbs para una señal periódica en diente de sierra.

[†] Sea $f^N(t) = \sum_{n=1}^{N} f_n(t) = \lim_{N\to\infty} f^N(t)$ en $(0, T)$. Si para cada $\epsilon > 0$ existe un entero M tal que para cada t en $(0, T)$ $|f^N(t) - f(t)| < \epsilon$, $M \leq N$, se dice que $f^N(t)$ converge *de manera uniforme* en $f(t)$ en $(0, T)$. Si $\sum_{n=1}^{N} |f_n(t)|$ converge de manera uniforme, entonces $f^N(t)$ converge *de manera absoluta y uniforme* en $f(t)$ en $(0, T)$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

aproximado al 9 % mayor que la amplitud de la señal en diente de sierra. Por tanto, la "convergencia en el cuadrático medio" implica convergencia en amplitud sólo en la vecindad de puntos de continuidad de $f(t)$.

2.21 RESUMEN

Desde el punto de vista de los sistemas, para caracterizar el comportamiento de un sistema dado se emplean una señal de entrada y la respuesta resultante. Para el caso, una señal se define como una función univaluada del tiempo. Esta función puede tener valor complejo por conveniencia matemática, aunque las observaciones en la práctica tienen valor real.

Las señales se pueden clasificar en categorías básicas por su energía o su potencia finita. Otras categorías útiles comprenden las señales periódicas o aperiódicas y las señales aleatorias o deterministas.

Matemáticamente, un sistema es una regla para transformar entradas en salidas. Si el sistema es lineal, se puede aplicar superposición. Si la respuesta del sistema no depende de valores absolutos del tiempo sino sólo de diferencias de tiempo, el sistema es invariable en el tiempo.

Se puede hacer una analogía útil entre señales y vectores. El uso de la ortogonalidad permite representar determinado vector o señal por medio de un conjunto conocido de vectores o señales linealmente independientes. Para determinado caso, sólo se necesita determinar los coeficientes. Se pueden elegir muchos conjuntos de funciones o vectores ortogonales diferentes para representar una señal o un vector dado.

Tienen particular interés las operaciones que se pueden describir por medio de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. La serie de Fourier resulta muy útil debido a que la forma exponencial se repite en la derivación. Las funciones exponenciales complejas y las trigonométricas producen coeficientes en términos de frecuencia que reflejan una medida correcta de la energía y la potencia. El teorema de Parseval iguala la energía y la potencia en términos de frecuencia, con las expresadas en función del tiempo.

La representación en serie de Fourier en un intervalo converge en la media cuadrática en los puntos de continuidad de la señal. Las señales con una tasa finita de energía (potencia) se pueden manipular al dividirlas por el intervalo. Esto es útil al representar señales periódicas si el intervalo se iguala al periodo. Tales representaciones convergen en la media cuadrática en los puntos de continuidad de la señal.

La gráfica de los coeficientes de Fourier en función de la frecuencia se llama espectro de la señal. El espectro de una señal periódica consiste en un conjunto de rectas equidistantes cuyas alturas denotan la importancia relativa de cada componente de frecuencia. Una señal que llene ciertas condiciones, conocidas como de Dirichlet, se puede describir de manera unívoca en términos tanto de tiempo como de frecuencia.

Las funciones singulares son funciones matemáticas simples que pueden no ser finitas en todo el intervalo o pueden no tener derivadas finitas de todos los órdenes. La función impulso unitario es de particular importancia en esta clase de funciones y se puede definir por medio de sus propiedades integrales. Esta función permite manejar

http://libreria-universitaria.blogspot.com

funciones que existen en un solo punto y que, aun así, ejercen una influencia determinante en el proceso de integración. La función escalón unitario es la integral indefinida del impulso unitario.

Un sistema lineal invariable en el tiempo se determina en forma unívoca por su función de transferencia o por su respuesta al impulso. La función de transferencia es de valor complejo y se puede hallar, en cierta frecuencia, aplicando un exponencial complejo de frecuencia constante a la entrada y dividiendo la salida de estado estacionario entre dicha entrada. La respuesta al impulso se puede hallar aplicando un impulso unitario a la entrada y registrando la señal de salida. Por medio de la linealidad, también se puede hallar aplicando un escalón unitario y derivando la señal de salida.

La salida de un sistema lineal invariable en el tiempo sólo tiene las frecuencias que están presentes en la entrada. La magnitud y la fase de cada término de frecuencia se modifica por medio de la función de transferencia del sistema. Los sistemas que no son lineales o invariables en el tiempo pueden generar nuevas frecuencias (armónicos). El espectro de Fourier es un indicador muy sensible del contenido armónico.

El cálculo de los coeficientes de Fourier partiendo de M puntos de referencia se limita a $M/2$ términos armónicos. Los términos armónicos mayores se reflejan con respecto a $M/2$ con simetría conjugada y afectan la exactitud numérica de los coeficientes calculados. Esto se llama **alias**. Los efectos del alias se minimizan mediante una rápida disminución de las magnitudes de los coeficientes de Fourier al aumentar la frecuencia, así como eligiendo más puntos de muestra por intervalo. Una cota de la tasa de disminución de los coeficientes se puede estimar, a menudo, partiendo del conocimiento de la forma de la señal.

Referencias seleccionadas para lectura adicional

1. Papoulis, A., *Circuits and Systems: A Modern Approach*, Nueva York, Holt, Rinehart and Winston, 1980.
   Expone las series de Fourier con énfasis en las series discretas y el alias.
2. Ziemer, R. E., Tranter, W. H. y Fannin, D. R., *Signals and Systems*, Nueva York, Macmillan, 1983.
   Este texto incluye, en el capítulo 3, un buen análisis de las series de Fourier en su forma tanto exponencial como trigonométrica.
3. Lathi, B. P., *Signals, Systems and Communication*, Nueva York, John Wiley, 1965.
   El capítulo 3 trata la analogía entre las representaciones de señales y las de vectores utilizando una minimización del error cuadrático medio.
4. Gabel, R. A. y Roberts, R. A., *Signals and Linear Systems*, 3a. ed., Nueva York, John Wiley & Sons, 1987.
   El capítulo 5 contiene un buen análisis de la minimización del error cuadrático medio que conduce a la representación en series de Fourier.
5. Oppenheim, A. V., Willsky A. S. y Young, I. T., *Signals and Systems*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1983.
   Este texto presenta un tratamiento paralelo de las series de Fourier discreta y continua, con un buen análisis de convergencia.
6. Close, C. M., *The Analysis of Linear Circuits*, Nueva York, Harcourt, Brace & World, 1966.
   El capítulo 9 contiene un buen análisis de las series de Fourier, con ejemplos y aplicaciones en circuitos lineales y el empleo de la función de transferencia en frecuencia para entradas periódicas.
7. Carslaw, H. S., *Theory of Fourier's Series and Integrals*, Londres, Cambridge University Press, 1930. (Reimpreso por Dover Publications, Nueva York, 1952.)

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Tratamiento clásico, en un nivel más avanzado, de las series de Fourier trigonométricas y sus aplicaciones a problemas de transferencia de calor.

8. Guillemin, E. A., *The Mathematics of Circuit Analysis*, Nueva York, John Wiley, 1949. Tratamiento más detallado y avanzado de las series de Fourier; abordada en particular los temas de la convergencia y el fenómeno de Gibbs.

PROBLEMAS

2.2.1 Clasifique las siguientes señales como señales de energía o de potencia, y encuentre la energía o la potencia normalizada de cada una (todas las señales se definen en $-\infty < t < \infty$).

a) 4
b) $\cos t + \cos 2t$
c) $\exp(-2|t|)$
d) $\exp(j2\pi t)$

2.2.2 Determine si las siguientes señales son periódicas. Si una señal es periódica, determine su periodo.

a) $\cos(\sqrt{3}\,t)$
b) $\exp(j2\pi t - \pi/4)$
c) $\text{sen}^2(2t)$
d) $\text{sen}(2t^2)$

2.3.1 Sea $f(t)$ la entrada a un sistema dado y $g(t)$ la salida correspondiente. En seguida se muestran las relaciones de entrada y salida de varios sistemas. Clasifique los sistemas de acuerdo con su linealidad, invariabilidad en el tiempo y causalidad.

a) $g(t) = \dfrac{d}{dt}[f(t)]$
b) $g(t) = f(t) + f(-t)$
c) $g(t) = f(t/2)$
d) $g(t) = \exp[2f(t)]$

★ **2.4.1** Tres vectores, expresados en el sistema de coordenadas cartesiano, son $\boldsymbol{\phi}_1 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$; $\boldsymbol{\phi}_2 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$; $\boldsymbol{\phi}_3 = \mathbf{x}_3$.

a) Demuestre que $\boldsymbol{\phi}_1$, $\boldsymbol{\phi}_2$ y $\boldsymbol{\phi}_3$ son ortogonales entre sí.

b) Represente los vectores C y D del ejercicio 2.4.1 en términos de este conjunto ortogonal de vectores.

★ **2.4.2** Para los vectores $\boldsymbol{\phi}_1$, $\boldsymbol{\phi}_2$ y $\boldsymbol{\phi}_3$ del problema anterior, determine las condiciones necesarias para que el vector $\mathbf{Y} = a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2 + c\mathbf{x}_3$:

a) Esté representado sólo por $\boldsymbol{\phi}_1$.

b) Sea ortogonal a $\boldsymbol{\phi}_1$.

c) Sea ortogonal a $\boldsymbol{\phi}_2$, $\boldsymbol{\phi}_3$ y tenga la misma longitud que $\boldsymbol{\phi}_1$.

★ **2.5.1** Si se toma sólo un término en la representación de $f(t)$ en la ecuación (2.29), el error residual en (t_1, t_2) es

$$\epsilon_1 = f(t) - f_1\phi_1(t).$$

a) Demuestre que este error es ortogonal a $\phi_1(t)$ en (t_1, t_2).

b) Demuestre que el error en energía es la diferencia en energías entre $f(t)$ y $\phi_1 f_1(t)$ en (t_1, t_2).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

★ **2.5.2** Encuentre los primeros tres términos de la representación de Fourier generalizada de la señal

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} 2\pi t & 0 \le t < 1 \\ 0 & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

en el intervalo (0, 2).

★ **2.5.3** En la figura P-2.5.3 se muestra un conjunto de funciones, $\phi_n(t)$, †

a) Muestre que estas funciones forman un conjunto ortogonal sobre el intervalo (0, 1). ¿Es también ortonormal este conjunto?

b) Represente la señal $f(t) = 2t$ en el intervalo (0, 1) utilizando este conjunto de funciones ortogonales.

c) Bosqueje $f(t)$ y la representación de $f(t)$ en el mismo grafo y haga una comparación.

d) Calcule la energía en cada término de la serie y el error de energía residual después de añadir cada término.

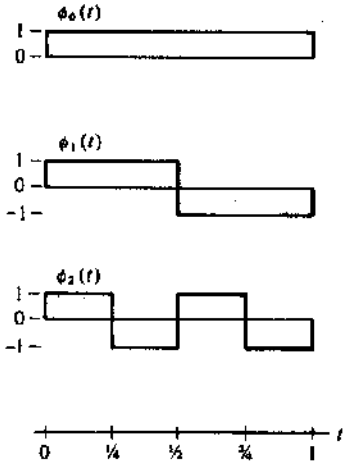


Figura P–2.5.3.

★ **2.5.4** Un conjunto de tres funciones es ‡

$$\phi_0(t) = 1; \qquad \phi_1(t) = t; \qquad \phi_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}.$$

a) Demuestre que estas funciones son ortogonales entre sí en el intervalo (-1, 1).

b) Represente la señal

$$f(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

en el intervalo (-1,1) utilizando este conjunto de funciones.

c) Bosqueje $f(t)$ y la representación de $f(t)$ en la misma gráfica y haga una comparación.

---

† Éstas son funciones seleccionadas de un gran conjunto de funciones ortogonales llamadas funciones de Walsh. Si los miembros del conjunto se designan por $w_n(t)$, donde n es el número de cruces por cero en el intervalo abierto (0, 1), se ve que el conjunto mostrado está formado por $w_0(t)$, $w_1(t)$, $w_3(t)$.

‡ Estas funciones son los primeros tres miembros de un conjunto ortogonal llamado polinomios de Legendre.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

2.7.1 La serie de Fourier exponencial de la señal $f(t) = a \exp(-a|t|)$ en un cierto intervalo simétrico $(-T/2, T/2)$ es

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a^2(1 - e^{-a} \cos \pi n)}{a^2 + n^2\pi^2} e^{jn\omega t}.$$

a) Determine el valor de T.

b) ¿Cuál es el valor promedio de $f(t)$? (Utilice dos procedimientos).

c) La componente de $f(t)$ en cierta frecuencia se puede expresar como $A \cos 3\pi t$. Determine el valor numérico de la constante A.

d) Escriba los primeros tres términos distintos de cero de una expansión en serie para el valor de $f(t)$ en $t = 0$.

2.7.2 Encuentre la representación en serie de Fourier exponencial para la señal $f(t) = A \cos \omega_0 t$ y verifique el resultado utilizando la identidad de Euler, dada en la ecuación (2.43).

2.7.3 Encuentre la representación en serie de Fourier exponencial del pulso cosenoidal definido por

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \cos 2\pi t & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

en el intervalo (-1, 1).

2.7.4 La expresión para los coeficientes de la serie de Fourier exponencial de una función dada $f(t)$ en (t_1, t_2) está dada por la ecuación (2.36). Se forma una nueva función, $g(t)$, a partir de $f(t)$ utilizando las operaciones indicadas en seguida. Los coeficientes de la serie para $g(t)$ se designan como G_n. Determine las relaciones de G_n en términos de F_n para:

a) $g(t) = f(at)$;

b) $g(t) = f(t - t_0)$;

c) $g(t) = e^{j\omega_0 t} f(t)$.

2.8.1 Demuestre que las siguientes relaciones son verdaderas para la variable compleja $z = x + jy$ y su conjugada $z^* = x - jy$:

a) $z + z^* = 2\ \mathcal{R}e\{z\}$

b) $z - z^* = 2\ \mathcal{I}m\{z\}$

c) $(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$

d) $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$

e) $\mathcal{R}e\{z_1 z_2\} = \mathcal{R}e\{z_1\}\ \mathcal{R}e\{z_2\} - \mathcal{I}m\{z_1\}\ \mathcal{I}m\{z_2\}$

f) $\mathcal{I}m\{z_1 z_2\} = \mathcal{R}e\{z_1\}\ \mathcal{I}m\{z_2\} + \mathcal{I}m\{z_1\}\ \mathcal{R}e\{z_2\}$

2.8.2 a) Demuestre que si una señal tiene simetría par: $f(-t) = f(t)$, entonces los coeficientes de Fourier exponenciales complejos están dados por

$$F_n = \frac{1}{(t_1 - t_2)} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cos n\omega_0 t\, dt.$$

b) Utilice esta expresión para encontrar los F_n de

$$f(t) = \begin{cases} 2A|t|/T & |t| \le T/4 \\ 0 & |t| > T/4 \end{cases}$$

en $(-T/2, T/2)$.

c) ¿Cuál es la expresión para las F_n si la señal tiene simetría impar: $f(-t) = -f(t)$?

http://libreria-universitaria.blogspot.com

2.8.3 En los motores de inducción de una sola fase, el campo magnético del estator tiene la forma $A \cos \omega_0 t$, y se puede ver como dos fasores de la misma magnitud que giran uno en sentido contrario al otro. Para que el motor inicie la rotación, es necesario desarrollar una componente en cuadratura distinta de cero (para cierta rotación circular). Encuentre una expresión para el ángulo entre los campos magnéticos si uno de los fasores tiene un retardo correspondiente a un ángulo ψ (este principio se utiliza en el motor de inducción de "polo oculto").

2.9.1 a) Determine la representación en serie de Fourier trigonométrica para la señal

$$f(t) = \begin{cases} 2 & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

en el intervalo (−1, 1).

b) Compare sus resultados con los obtenidos en el ejemplo 2.5.1.

2.9.2 Represente la señal

$$f(t) = \begin{cases} 2 & -1 < t < 0 \\ 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

en el intervalo (−2,2).

a) Utilice la serie de Fourier exponencial.

b) Utilice la serie de Fourier trigonométrica.

c) Compare sus resultados utilizando las ecuaciones (2.49) a (2.51).

2.10.1 Un método usado en el diseño de fuentes de alimentación de corriente directa (cd) es rectificar la señal de entrada. Si la entrada al rectificador es $f(t)$ y la salida $g(t)$, entonces la salida de un rectificador de onda completa está dada por $g(t) = |f(t)|$. En este caso sea la señal de entrada al rectificador de onda completa: $f(t) = A \cos \omega_0 t$.

a) Dibuje las señales de entrada y salida.

b) Determine la componente de cd en $f(t)$ y $g(t)$.

c) Encuentre los coeficientes de la serie de Fourier trigonométrica de $f(t)$ y $g(t)$ en las frecuencias ω_0 y $2\omega_0$.

2.10.2 Repita el problema 2.10.1 para el rectificador de media onda definido por

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & f(t) > 0, \\ 0 & f(t) \leq 0. \end{cases}$$

2.10.3 La potencia promedio normalizada en el error entre dos señales periódicas se denomina *error cuadrático medio*. Calcule y grafique el error cuadrático medio en la representación de una señal cuadrada (con valor promedio cero) con su serie de Fourier trigonométrica dentro del intervalo armónico $0 \leq n \leq 10$.

2.10.4 Demuestre que si una señal periódica satisface la condición de simetría de media señal $f(t) = \pm f(t \pm T/2)$, entonces todas las amplitudes de los armónicos pares en la serie de Fourier son cero, con la posible excepción del término para $n = 0$.

2.11.1 Demuestre que el teorema de Parseval para la serie de Fourier trigonométrica es

$$\frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2\,dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

2.11.2 Aplique el teorema de Parseval para la señal cuadrada simétrica del ejercicio 2.10.1 y demuestre que

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

✓† **2.11.3** Calcule y grafique el porcentaje de la potencia promedio contenida dentro de los primeros cruces por cero en frecuencia, para el pulso cuadrado periódico de la figura 2.21, como función de la razón T/τ (haga que T/τ sea un entero, $2 \leq T/\tau \leq 5$).

✓ **2.11.4** Determine el mínimo número de términos armónicos que se deben utilizar en el pulso cuadrado periódico de la figura 2.21 para incluir a) 90%; b) 95%; c) 99% de la potencia promedio en la señal para la elección: $T/\tau = 4$ (¿esperaría que cambie para valores enteros mayores que T/τ?).

2.12.1 a) Determine la función de transferencia en frecuencia del sistema mostrado en la figura 2.8.

b) Dibuje la magnitud y la fase en función de la frecuencia, y marque los puntos en los cuales la magnitud está por debajo de $1/\sqrt{2}$ de su valor máximo.

c) Compare los resultados de este sistema con los del ejemplo 2.12.1.

2.12.2 La ecuación diferencial que relaciona la tensión de salida, $g(t)$, con la tensión de entrada, $f(t)$, del sistema mostrado en la figura P-2.12.2 es

$$L^2C\frac{d^3g}{dt^3} + RLC\frac{d^2g}{dt^2} + 2L\frac{dg}{dt} + Rg(t) = Rf(t).$$

a) Encuentre la función de transferencia en frecuencia del sistema.

b) Determine la respuesta en magnitud y el desplazamiento de fase del sistema.

c) Repita (b) para el caso especial en el que $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

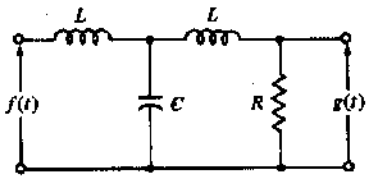


Figura P–2.12.2.

2.13.1 La señal periódica del problema 2.7.1 se aplica a la entrada de un sistema cuya función de transferencia en frecuencia es

$$H(\omega) = \begin{cases} 1/(1 + j\omega/\pi) & |\omega| < 3\pi/2, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a) Determine una expresión para la salida, $g(t)$, del sistema.

b) Encuentre la potencia promedio en la salida del sistema.

† Los problemas que se deben resolver utilizando métodos numéricos se designan con el símbolo ✓ al margen.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

2.13.2 Determine la salida, $g(t)$, del filtro pasabajas RC del ejemplo 2.12.1 para $f(t) = 10 \cos 4\pi t$ si

a) $RC = 1/\pi$;
b) $RC = 1/(4\pi)$;
c) $RC = 1/(16\pi)$.

2.14.1 En la figura P-2.14.1 se muestra una señal periódica $f(t)$ (para $a = 1$, ésta es una señal cuadrada periódica).

a) Encuentre la serie de Fourier trigonométrica de $f(t)$ para valores arbitrarios de a.
b) Determine el efecto en la amplitud del segundo armónico de $f(t)$ si existe un pequeño desvío de la simetría perfecta de la señal cuadrada. Para esto, sea $a = 1 - \epsilon$, donde $\epsilon \ll 1$, y encuentre la dependencia en ϵ del segundo armónico. El parámetro a se llama en ocasiones factor de simetría de la señal (con $0 \leq a \leq 1$).
c) Repita (b) para el tercer armónico de $f(t)$.

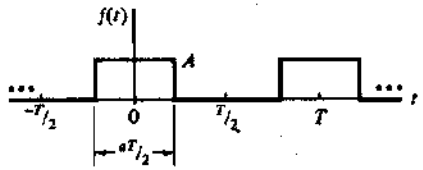


Figura P–2.14.1.

2.14.2 Un problema potencial en los amplificadores *push-pull* es que se introduce un nivel de cd ϵA en la señal senoidal, como se muestra en la figura P-2.14.2.

a) Encuentre una expresión para la distorsión armónica total (THD, *total harmonic distortion*) resultante.
b) Calcule la THD para $\epsilon = 0.10$.

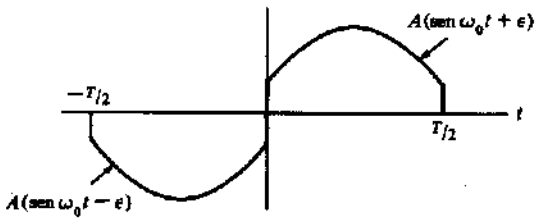


Figura P–2.14.2.

2.14.3 Un método propuesto para la generación de armónicos es la señal triangular con pendiente fija que se muestra en la figura P-2.14.3, donde $0 < \tau < T/2$.

a) Determine la amplitud de un armónico dado n.
b) Encuentre el valor óptimo de τ para la generación de un armónico dado n.
c) Para este valor óptimo de τ, calcule la potencia promedio en un armónico dado, normalizado con respecto a la potencia promedio de la señal triangular.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

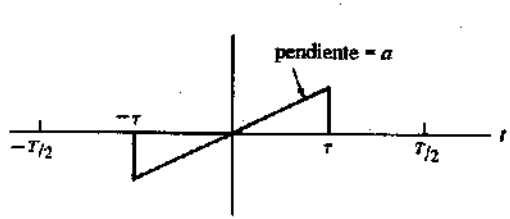


Figura P–2.14.3.

2.15.1 El espectro de línea, en volts, de cierta función periódica $f(t)$ se muestra en la figura P-2.15.1.

a) ¿Cuál es el valor del periodo, T?

b) ¿Cual es el valor de $f(0)$?

c) ¿Cual es el valor de $f(1/2)$?

d) Una segunda función, $g(t)$, se relaciona con $f(t)$ como $g(t) = f(t/2)$. Dibuje el espectro de línea de $g(t)$.

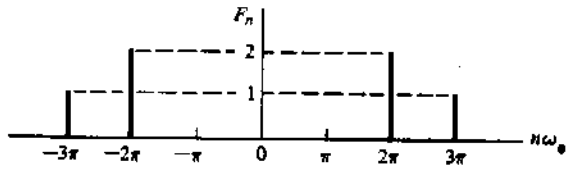


Figura P–2.15.1.

2.15.2 Dibuje el espectro de línea de Fourier de las series exponencial y trigonométrica para los primeros tres términos armónicos (es decir, $|n| \leq 3$) de la señal del problema 2.7.1 para el caso $a = 1$.

2.15.3 La salida, $g(t)$, de un rectificador de media onda para una entrada $f(t)$ es

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } f(t) > 0, \\ 0 & \text{si } f(t) \leq 0. \end{cases}$$

a) Calcule la serie de Fourier trigonométrica de la salida si la entrada es $f(t) = \text{sen } 2\pi t$.

b) Dibuje el espectro de línea de la magnitud de Fourier tanto para $f(t)$ como para $g(t)$.

2.15.4 Se conocen las siguientes características acerca de una señal dada $f(t)$:

i) Tiene valor promedio cero.

ii) Es de valor real y tiene simetría par en t.

iii) Los coeficientes de sus términos armónicos $|n| = 1$ y $|n| \geq 5$ son cero.

iv) Se conocen los siguientes puntos de muestra: $f(0) = 4$; $f(T/4) = -1$; $f(T/2) = 2$.

a) Dibuje el espectro de línea para las series exponencial y trigonométrica de $f(t)$ si $T = 1$.

b) Calcule el porcentaje de la potencia promedio total de la señal para $|n| > 2$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

✓ ★ **2.16.1** Se propone la señal trapezoidal $f(t)$ mostrada en la figura P-2.16.1 para la generación de armónicos. Utilizando métodos numéricos, calcule y grafique el espectro de línea de la magnitud de la serie de Fourier trigonométrica de esta señal. Utilice 100 puntos por periodo para calcular los primeros 20 armónicos con $t_1 = 1$, 2 y 5 puntos de muestra, y compare los resultados.

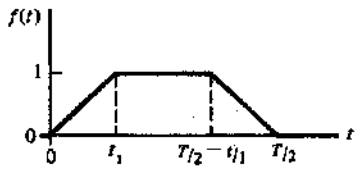


Figura P–2.16.1.

✓ ★ **2.16.2** Calcule y grafique el espectro de línea de la magnitud de la serie de Fourier trigonométrica para la señal mostrada en la figura P-2.16.2, utilizando las instrucciones del problema 2.16.1 y $A = 1$, $t_1 = T/4$. En los puntos de discontinuidad finita, suponga continuidad a la izquierda.

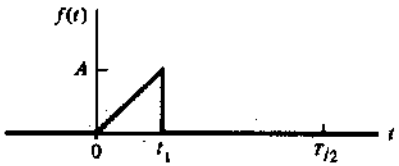


Figura P–2.16.2.

✓ ★ **2.16.3** Calcule y grafique la magnitud del tercer armónico de la señal mostrada en la figura P-2.16.2 como función del parámetro t_1 $(0 < t_1 \leq T/2)$. Utilice las instrucciones del problema 2.16.1 y normalice la gráfica de tal forma que el área bajo la señal al cuadrado permanezca constante con cambios en t_1.

✓ ★ **2.17.1** Calcule los coeficientes de la serie de Fourier exponencial para las primeras 10 frecuencias armónicas positivas y las primeras 10 negativas de la señal $f(t)$ descrita por

$$f(t) = 5 \exp(-t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi .$$

Utilice 20 puntos de muestra en el periodo $T = 2\pi$ y siga las instrucciones del problema 2.16.2 en las discontinuidades finitas.

✓ ★ **2.17.2** Calcule y grafique el espectro de línea de la magnitud de la serie de Fourier exponencial para la señal

$$f(t) = \begin{cases} 4 \cos \pi t & |t| < 0.5 \\ 0 & |t| > 0.5 \end{cases}$$

cuando se repite en forma periódica con periodo $T = 2$. Utilice 20 puntos de muestra por periodo y grafique con incrementos enteros de frecuencia: 0, ±1, ±2, ..., ±20.

2.18.1 Demuestre que un tren periódico de impulsos unitarios, espaciados T segundos entre sí, se pueden representar por medio de la serie de Fourier trigonométrica:

$$\frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\omega_0(t - \tau), \qquad \omega_0 = 2\pi/T,$$

si uno de los impulsos está en $t = \tau$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

2.18.2 Evalúe las siguientes integrales:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2)e^{-t}\cos \pi(t-1)\,dt$

b) $\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau-3)e^{-\tau}\,d\tau$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} (t^2+4)\,\delta(4-t)\,dt$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} (t^2+4)\,\delta(4-2t)\,dt$

e) $\int_{0}^{3}\int_{-\infty}^{\infty} (t^2+4)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\,dt$

2.18.3 Evalúe las siguientes integrales:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} tu(t)u(2-t)\,dt$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} t[u(t)-u(t-2)]\,dt$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-t_1)}u(t-t_1)\,dt$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)e^{-(t-t_1)}u(t-t_1)\,dt$

e) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+\tau)}u(t+\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\,dt$

2.18.4 Demuestre que las siguientes propiedades son válidas para la derivada de un impulso bajo una operación de integración.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta'(t)\,dt = -f'(0)\,, \qquad$ donde $f'(t) = \dfrac{df}{dt}$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta^{(n)}(t)\,dt = (-1)^n f^{(n)}(0)$

c) $t\delta'(t) = -\delta(t)$

2.19.1 Un pulso rectangular de ancho $\Delta\tau$ y altura $1/\Delta\tau$ se aplica a la entrada de un filtro pasabajas *RC* (véase Fig. 2.16) en $t = 0$.

a) Escriba una expresión para la señal de salida.

b) Tome el límite conforme $\Delta\tau \to 0$ y demuestre que la respuesta al impulso del filtro es

$$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t)\,.$$

c) Determine las dimensiones de la función de transferencia en tensión, $H(\omega)$, y la respuesta al impulso, $h(t)$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

2.19.2 La respuesta al impulso de un sistema dado es: $h(t) = ae^{-at}u(t)$.

a) Determine la respuesta del sistema a un escalón unitario.

b) Para una entrada conocida, la salida $g(t)$ se puede expresar en términos de la entrada $f(t)$ y la respuesta al impulso del sistema $h(t)$ como†

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau)\, d\tau .$$

Evalúe esta integral a fin de determinar $g(t)$ para la entrada $f(t) = \cos \omega_0 t$, y exprese la respuesta en términos de sen $\omega_0 t$ y cos $\omega_0 t$ (tal vez considere utilizar notación exponencial y luego tomar la parte real después de la integración).

★ **2.20.1** Estime la rapidez de convergencia mínima (para n grande) de los coeficientes de Fourier para las señales periódicas mostradas en la figura P-2.20.1.

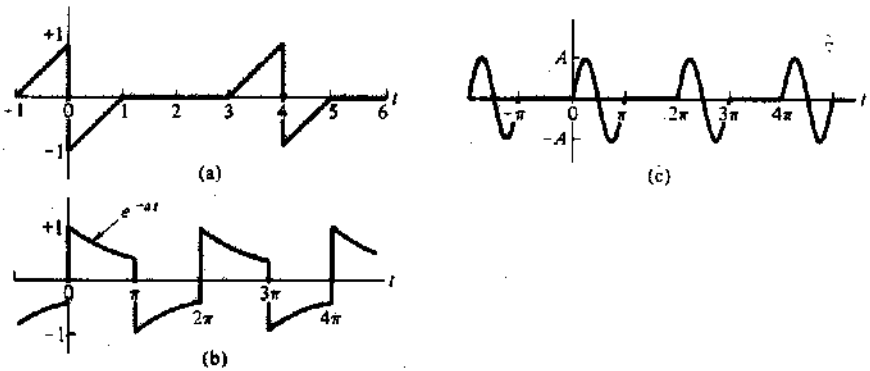


Figura P–2.20.1.

★ **2.20.2** Estime la rapidez de convergencia mínima (para n grande) de los coeficientes de Fourier para las señales descritas en:

a) Problema 2.14.1;

b) Problema 2.14.2;

c) Problema 2.14.3.

† Esta integral, conocida como integral de convolución, se analiza en el capítulo 3.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

CAPÍTULO

3 La transformada de Fourier y sus aplicaciones

En el capítulo 2 se vio cómo representar determinada función en términos de una serie exponencial (o trigonométrica) compleja en un intervalo finito. Para el caso particular en que la función es periódica, esta representación se extiende a todo el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Considérese otro caso limitante: la descripción en el dominio de la frecuencia de un pulso. Se tomará una señal periódica y se representará en forma de exponenciales complejos con un periodo que tiende a infinito para obtener, al menos de manera formal, una representación de la señal aperiódica, que describirá en forma completa la señal dada *para todos los valores de tiempo.*

3.1 REPRESENTACIÓN DE UNA FUNCIÓN APERIÓDICA SOBRE EL EJE REAL COMPLETO

En el capítulo 2 se estudió la representación en serie de Fourier exponencial de una función dada del tiempo. Se observó que a medida que crece el periodo T, la frecuencia fundamental se hace menor y el espectro de frecuencias más denso, mientras que la amplitud de cada componente de frecuencias disminuye. Sin embargo, la *forma* del espectro no cambia al variar T.

Supóngase que se tiene una función aperiódica $f(t)$ como la de la figura 3.1(a). Deseamos representarla como una suma de funciones exponenciales en todo el intervalo $(-\infty, \infty)$. Para ello, se construye una nueva función periódica $f_T(t)$ con periodo T de manera que la función $f(t)$ es forzada a repetirse por completo cada T segundos.

La función original se puede obtener de nuevo haciendo que $T \to \infty$, es decir,

$$\lim_{T \to \infty} f_T(t) = f(t). \tag{3.1}$$

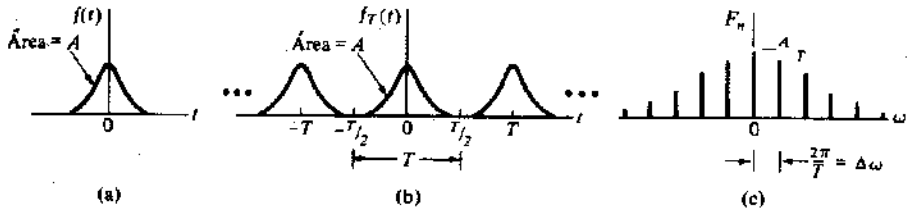


Figura 3.1 Generación de una función periódica y su espectro de línea.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En otras palabras, llevar al límite cuando el periodo tiende a infinito desplaza en forma efectiva al infinito a todos los vecinos más próximos al pulso $f(t)$. Para que este método sea efectivo, se adopta el siguiente procedimiento: (1) el pulso se sitúa en el origen y (2) el límite cuando $T \to \infty$ se toma en forma simétrica con respecto al origen.

La nueva función $f_T(t)$ es periódica y, por tanto, se puede representar por medio de una serie de Fourier exponencial. Esta serie es

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \tag{3.2}$$

donde

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt \tag{3.3}$$

y

$$\omega_0 = 2\pi/T. \tag{3.4}$$

Sin embargo, antes de llevar al límite se deben hacer algunos ajustes para que los componentes de magnitud de los F_n no se hagan cero al aumentar el periodo. Se hacen los siguientes cambios

$$\omega_n \triangleq n\omega_0, \tag{3.5}$$

$$F(\omega_n) \triangleq TF_n. \tag{3.6}$$

Con estas definiciones, las ecuaciones (3.2) y (3.3) quedan así

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} F(\omega_n) e^{j\omega_n t}, \tag{3.7}$$

$$F(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-j\omega_n t}\, dt. \tag{3.8}$$

El espaciamiento entre líneas adyacentes en el espectro de línea de $f_T(t)$ es (véase Fig. 3.1c)

$$\Delta\omega = 2\pi/T. \tag{3.9}$$

Usando esta relación para T en la ecuación (3.7), se obtiene la forma alterna

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \frac{\Delta\omega}{2\pi}. \tag{3.10}$$

Ahora, al hacerse T muy grande, $\Delta\omega$ se hace pequeño y el espectro más denso (es decir, las líneas se acercan mucho y aumentan las componentes de frecuencia en un intervalo dado). En el límite, cuando $T \to \infty$, las líneas discretas del espectro de $f_T(t)$ se mezclan y éste se hace continuo. Matemáticamente, la suma infinita de la ecuación (3.10) se convierte en la integral ordinaria de Riemann, así que

$$\lim_{T\to\infty} f_T(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \Delta\omega$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

se convierte en

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\,. \tag{3.11}$$

De la misma forma, la ecuación (3.8) se convierte en

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt\,. \tag{3.12}$$

Los resultados que expresan las ecuaciones (3.11) y (3.12) se conocen como *par transformado de Fourier*. La ecuación (3.12) se conoce como transformada de Fourier directa de $f(t)$ (comúnmente, *transformada de Fourier*). La ecuación (3.11) es la *transformada de Fourier inversa*. De manera simbólica, se usa la siguiente notación operacional:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt\,, \tag{3.13}$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\,. \tag{3.14}$$

También es útil notar que los coeficientes de la serie de Fourier exponencial compleja se pueden evaluar en términos de la transformada de Fourier combinando las ecuaciones (3.5) y (3.6) para obtener

$$F_n = \frac{1}{T}F(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_0}\,, \tag{3.15}$$

siempre que $F(\omega)$ sea finita en $\omega = n\omega_0$[†] y que $f(\pm T/2) \approx 0$.

Halle la transformada de Fourier de $f(t) = \exp(-at)\,u(t)$, $a > 0$.[‡]

RESPUESTA: $1/(a + j\omega)$.

La transformada de Fourier se puede ver como la representación de una señal dada en términos de una suma infinita de exponenciales complejos, ponderado cada uno por $F(\omega)df$ (véase Ec. 3.11). Para esta visualización es útil el concepto de representación fasorial de los exponenciales complejos y la suma de fasores utilizando las reglas de la suma de vectores descrita en la sección 2.8. Para ilustrar esto, tómese una señal $f(t)$ en la que $F(\omega)$ es constante para toda ω. En $t = 0$, todos los términos exponenciales

[†] Para que esto ocurra, es condición suficiente que la energía de $f(t)$ sea finita; véase la sección 3.3.

[‡] Para quienes están familiarizados con la transformada de Laplace, la transformada de Fourier se puede obtener a partir de aquélla haciendo $s = j\omega$ si se cumplen las dos siguientes condiciones: (1) $f(t) = 0$ para $t < 0$; (2) $f(t)$ tiene energía finita, esto es, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt < \infty$. (p. ej., la referencia 1 al final del capítulo).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

complejos formados por $[F(\omega)\,df]e^{j\omega t}$ tienen magnitudes idénticas y ángulo de fase cero. Puesto que hay un número infinito de ellos, la parte real de la resultante es infinitamente grande. No obstante, en valores del tiempo $t \neq 0$, los términos exponenciales complejos tienen magnitudes idénticas pero fases proporcionales a la frecuencia. El resultado neto es que se suman hasta cero. Por tanto, se concluye que esta señal $f(t)$ se puede describir con una función que es infinita en $t = 0$ y es cero en $t \neq 0$, lo que sugiere la descripción con una función *impulso*. El par transformado 8 de la tabla 3.1 (e ilustrado en la figura 3.3) demostrará que esta conclusión es correcta.

La reconstrucción de $f(t)$ a partir de un conjunto de exponenciales complejos ayuda a la visualización. Sin embargo, estos resultados son cualitativos y se deben examinar en distintos valores del tiempo para poder extraer conclusiones generales. Una forma conveniente de presentar la misma información con mayor precisión y de manera independiente del tiempo —aunque sin los aspectos intuitivos— es trazar una gráfica de $F(\omega)$ contra ω. Esto se investiga en la sección siguiente.

3.2 FUNCIÓN DE DENSIDAD ESPECTRAL

La ecuación (3.14) representa a $f(t)$ como una suma continua de funciones exponenciales cuyas frecuencias se encuentran en el intervalo $(-\infty, \infty)$. La amplitud relativa de las componentes en cualquier frecuencia ω es proporcional a $F(\omega)$. Si la señal $f(t)$ representa una tensión, $F(\omega)$ tiene las dimensiones de tensión por tiempo. Como la frecuencia las tiene de tiempo inverso, se puede considerar a $F(\omega)$ como un espectro de densidad de tensión o, en forma más general, como la *función de densidad espectral* de $f(t)$.

El *área* bajo esta función $F(\omega)$ tiene las dimensiones de tensión (o corriente). Ningún punto de la curva $F(\omega)$ contribuye a la representación de $f(t)$; es el área la que lo hace. Por otra parte, cada punto indica el *peso relativo* de cada componente de frecuencia. La contribución de una banda de frecuencias dada a la representación de $f(t)$ se puede hallar integrando para determinar el área.

Por el contrario, una señal periódica tiene todas sus componentes de amplitud en frecuencias discretas. En cada una de éstas hay una contribución definida; a sus lados, ninguna. De ahí que para representar las componentes de amplitud de una señal periódica en una gráfica de densidad espectral, se requiere un área igual a las respectivas componentes de amplitud, aunque ocupando un ancho de frecuencias cero. Es claro que esto se puede hacer de manera formal, representando cada componente de amplitud de la función periódica por medio de una función impulso. El área (peso) del impulso es igual a la componente de amplitud y la posición del impulso se determina mediante la frecuencia discreta particular.

En resumen, una señal de energía finita se puede describir por medio de una función de densidad espectral continua. Esta función se halla tomando la transformada de Fourier de la señal. Una señal periódica de potencia media finita puede ser descrita tanto por un conjunto de líneas en una gráfica espectral como por un conjunto de funciones

http://libreria-universitaria.blogspot.com

impulso en una gráfica de densidad espectral. Cada impulso de la segunda gráfica tiene un área que corresponde a la altura de cada línea del primero, respectivamente.

Por conveniencia, al dibujar gráficas de densidad espectral de funciones periódicas, a menudo la altura de cada impulso se hace proporcional a su área. Aunque técnicamente no es correcta, esta convención es muy útil porque hace que la gráfica de densidad espectral se parezca al espectro.

La anterior representación sirve muy bien para funciones espectrales expresadas en términos de tiempo inverso (frecuencia), en general en radianes, ω. Por la propiedad de escala de la función impulso [véase Ec. (2.99)], podemos escribir

$$\delta(f) = 2\pi\,\delta(\omega)\,,$$

y, por tanto, se multiplica cada función impulso por 2π si está expresada en radianes.

Ahora se hallará la transformada de Fourier (densidad espectral) de un pulso cuadrado que tiene amplitud unitaria, ancho τ, y está centrada en el origen. Esta función especial se define por medio de[†]

$$\text{rect}\,(t/\tau) \triangleq \begin{cases} 1 & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2\,, \end{cases} \tag{3.16}$$

donde τ representa el ancho. En la figura 3.2 (a) se muestra un pulso cuadrado unitario (es decir, $\tau = 1$).

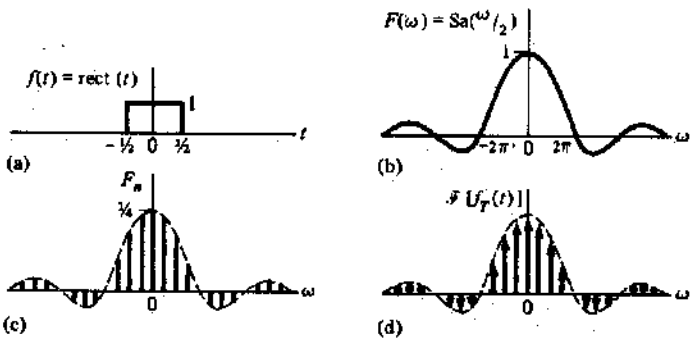


Figura 3.2 (a) Un pulso cuadrado y (b) su transformada de Fourier. (c) El espectro de línea y (d) la densidad espectral del pulso cuadrado.

Utilizando la ecuación (3.12), se tiene

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\,(t/\tau)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= (e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2})/(j\omega) = \tau\frac{\text{sen}\,(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)}$$

[†] Algunos autores usan los símbolos $G(t/\tau)$ o $\Pi(t/\tau)$ para designar el pulso cuadrado. También se puede expresar en términos de escalones unitarios como $[u(t+\tau/2) - u(t-\tau/2)]$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

o, usando la ecuación (2.82),

$$\mathcal{F}\{\text{rect}\ (t/\tau)\} = \tau\ \text{Sa}\ (\omega\tau/2)\,. \tag{3.17}$$

Es interesante anotar que como $\lim_{x\to 0}\text{Sa}(x) = 1$, la amplitud del coeficiente de $\text{Sa}(\omega\tau/2)$ en la ecuación (3.17) es igual al área debajo de $\text{rect}(t/\tau)$. El resultado de la ecuación (3.17) para $\tau = 1$ se muestra en la figura 3.2(b).

EJEMPLO 3.2.1

Determine los coeficientes de la serie de Fourier exponencial (las F_n) para el pulso cuadrado unitario si se repite cada 4 segundos; haga las gráficas del espectro de línea y de densidad espectral.

Solución Utilizando la ecuación (3.15), se tiene

$$F_n = \frac{1}{T}F(\omega)\bigg|_{\omega=n\omega_0} = \frac{1}{4}\ \text{Sa}\ (n\pi/4)\,.$$

El espectro de línea y la densidad espectral se muestran en las gráficas (c) y (d) de la figura 3.2.

Encuentre la transformada de Fourier de la exponencial bilateral $f(t) = \exp(-a|t|)$, $a > 0$.

RESPUESTA: $2a/(a^2 + \omega^2)$.

3.3 ★ EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

En la sección 2.20 se dieron las condiciones de Dirichlet como suficientes para la existencia de las series de Fourier. Estas condiciones, modificadas de manera conveniente, también son suficientes para la existencia de la transformada de Fourier:

1. $f(t)$ tiene sólo un número finito de máximos y mínimos en cualquier intervalo de tiempo finito;
2. $f(t)$ tiene sólo un número finito de discontinuidades finitas en cualquier intervalo de tiempo finito;
3. $f(t)$ es absolutamente integrable, esto es, $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt < \infty$.

La condición $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt < \infty$. es un poco más endeble. Como esta condición es la definición de una señal de energía, es posible establecer que la transformada de Fourier se puede utilizar para representar en forma unívoca cualquier señal de energía.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

3.4 TEOREMA DE PARSEVAL PARA SEÑALES DE ENERGÍA

La energía suministrada a un resistor de un ohm es [véase Ec. (2.5)]:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) \, dt . \tag{3.18}$$

Convendría expresar la energía en términos de las componentes de frecuencia de $f(t)$. Usando la ecuación (3.11) en la (3.18), se tiene

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} \, d\omega \right] dt .$$

Si se intercambia el orden de integración de t y ω,[†]

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} \, dt \right] d\omega . \tag{3.19}$$

Pero de la ecuación (3.12), esto es

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) F(\omega) \, d\omega . \tag{3.20}$$

Si se combinan las ecuaciones (3.18) y (3.20), se obtiene lo que se conoce como *teorema de Parseval para señales de energía*:[‡]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega . \tag{3.21}$$

De aquí puede hallarse la energía de una señal tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia.

En el sistema de unidades MKS, la energía se mide en joules. En la ecuación (3.21) se ve que la cantidad $|F(\omega)|^2$ es una densidad de energía que tiene las unidades de joules por Hz (nótese que $\omega/2\pi$ se mide en Hz).

Calcule la energía de la señal del ejercicio 3.2.1 (a través de una resistencia de un ohm) tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia.

RESPUESTA: $1/a$ joules.

[†] Esto supone que las integrales son absolutamente convergentes, es decir, que son convergentes cuando los integrandos se sustituyen por sus valores absolutos (condición suficiente).

[‡] Esta relación también se conoce como teorema de Plancherel o teorema de Rayleigh.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

3.5 ALGUNAS TRANSFORMADAS DE FOURIER QUE INCLUYEN FUNCIONES IMPULSO

El procedimiento para hallar la transformada de Fourier de señales de energía finita usando la ecuación (3.13) es directo. Por el contrario, esto no siempre es cierto para señales de energía infinita. Los casos que implican las funciones impulso tienen un interés particular. Aquí se hará un análisis somero; quien esté interesado en un estudio más detallado, se puede remitir a las referencias bibliográficas.

3.5.1 Función impulso

Usando las propiedades integrales de la función impulso, la transformada de Fourier del impulso unitario, $\delta(t)$, es

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{j0} = 1. \tag{3.22}$$

Si el impulso está desplazado en el tiempo, tenemos

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}. \tag{3.23}$$

De las ecuaciones (3.22) y (3.23), es evidente que una función impulso tiene un espectro de magnitud uniforme en todo el intervalo de frecuencias $(-\infty, \infty)$. Este tipo de espectro se llama "blanco" por analogía con la luz blanca. El espectro de fase del impulso desplazado en el tiempo es lineal, con pendiente proporcional al desplazamiento en el tiempo.

3.5.2 El eterno exponencial complejo

Se podría esperar que la densidad espectral de $e^{\pm j\omega_0 t}$ se concentre en $\pm\omega_0$. Esto se demuestra a continuación.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{\delta(\omega \mp \omega_0)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega \mp \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{\pm j\omega_0 t}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Tomando la transformada de Fourier en ambos lados de la ecuación (3.24), se tiene

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\{\delta(\omega \mp \omega_0)\} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{e^{\pm j\omega_0 t}\}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

o, intercambiando términos,

$$\mathcal{F}\{e^{\pm j\omega_0 t}\} = 2\pi\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\{\delta(\omega \mp \omega_0)\},$$
$$\mathcal{F}\{e^{\pm j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega \mp \omega_0). \tag{3.25}$$

Este resultado no es sorprendente ya que el exponencial complejo describe un fasor cuya velocidad angular es ω_0. La descripción espectral de dicho fasor es una recta con esa velocidad angular (mayor que $\omega = 0$ si gira en sentido positivo, menor que $\omega = 0$ si lo hace en sentido negativo). La descripción de la densidad espectral es un impulso a esas velocidades angulares. El factor 2π aparece al medir la frecuencia en radianes.†

En general, la ecuación (3.25) puede definir un impulso unitario. Nótese que para $\omega_0 = 0$, la ecuación (3.25) se reduce a

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega). \tag{3.26}$$

De ahí que cualquier señal con valor medio distinto de cero en el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$ tiene un impulso en su función de densidad espectral en $\omega = 0$.

3.5.3 Las eternas señales senoidales

Las señales senoidales $\cos \omega_0 t$ y $\operatorname{sen} \omega_0 t$ se pueden escribir en términos de exponenciales complejos usando las identidades de Euler [véanse Ecs. (2.43) y (2.44)]. Sus transformadas de Fourier se pueden hallar directamente de la ecuación (3.25):

$$\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} = \mathcal{F}\{\tfrac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \tfrac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\}$$
$$= \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0), \tag{3.27}$$
$$\mathcal{F}\{\operatorname{sen}\omega_0 t\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}\right\}$$
$$= [\pi\delta(\omega - \omega_0) - \pi\delta(\omega + \omega_0)]/j. \tag{3.28}$$

En la figura 3.3 se muestran las gráficas de las funciones trigonométricas $\cos \omega_0 t$ y $\operatorname{sen} \omega_0 t$, junto con sus funciones de densidad espectral. Nótese que es conveniente multiplicar la ecuación (3.28) por el factor j a fin de que el resultado tenga valor real para la gráfica.

3.5.4 Función signo y escalón unitario

La función signo, sgn (t), es tal que cambia de signo cuando su argumento es cero:

$$\operatorname{sgn}(t) = \frac{|t|}{t} = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}. \tag{3.29}$$

† Si se escribe en términos de la frecuencia en Hz, el factor 2π desaparece en las ecuaciones (3.25) y (3.26) porque $\delta(\omega) = \delta(2\pi f) = [1/(2\pi)]\delta(f)$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

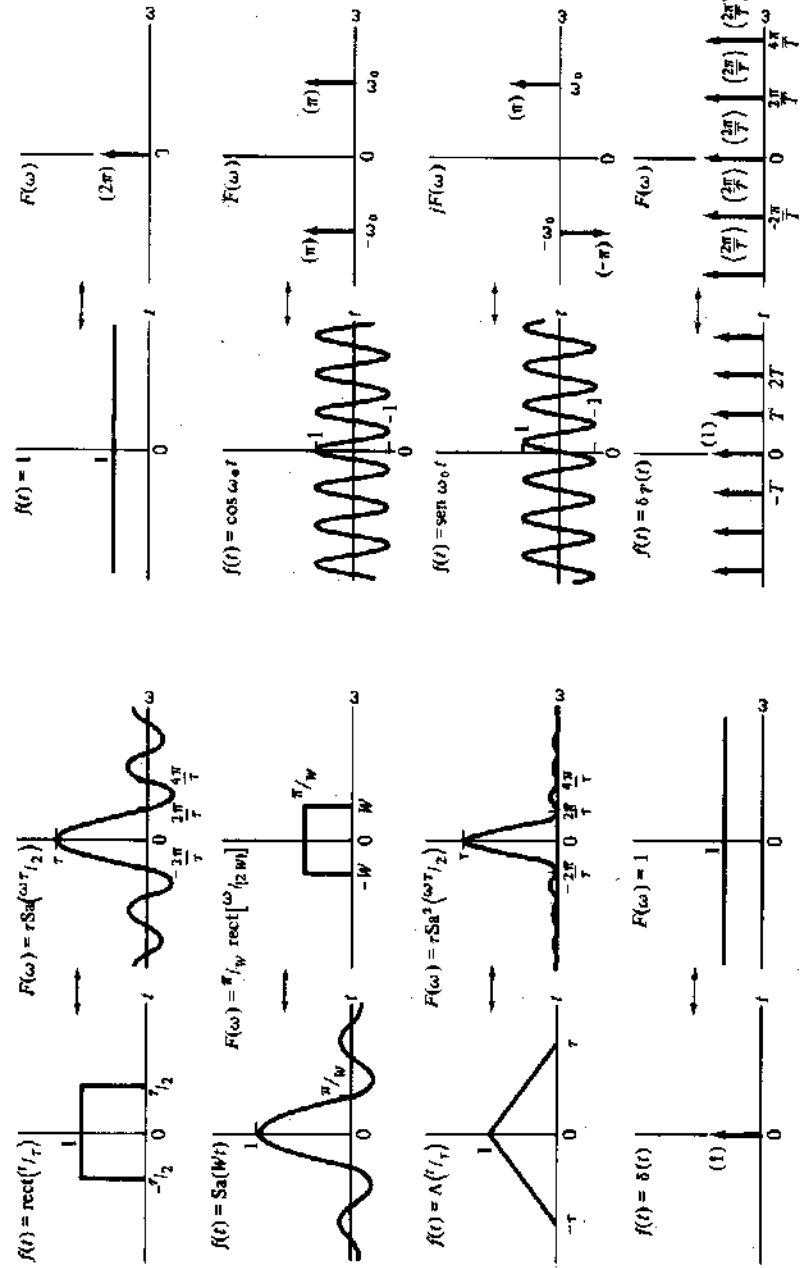


Figura 3.3 Algunas funciones del tiempo y sus funciones de densidad espectral.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Esta función tiene valor promedio de cero y es continua por tramos, pero no es absolutamente integrable. Para conseguir que lo sea, se multiplica sgn (t) por $e^{-a|t|}$ y se lleva al límite cuando $a \to 0$:

$$\mathcal{F}\{\text{sgn }(t)\} = \mathcal{F}\left\{\lim_{a\to 0}\left[e^{-a|t|}\,\text{sgn }(t)\right]\right\}.$$

Si se intercambia el orden de la operaciones de tomar el límite y se integra, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\text{sgn }(t)\} &= \lim_{a\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}\,\text{sgn }(t)e^{-j\omega t}\,dt\right\}\\ &= \lim_{a\to 0}\left\{-\int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\,dt\right\}. \qquad (3.30)\end{aligned}$$

A continuación se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\text{sgn }(t)\} &= \lim_{a\to 0}\left\{\frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2}\right\}\\ &= \frac{2}{j\omega}. \qquad (3.31)\end{aligned}$$

La función escalón unitario, expresada en términos de su valor promedio y la función signo, es

$$u(t) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{sgn }(t). \qquad (3.32)$$

La transformada de Fourier es

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \tfrac{1}{2}\mathcal{F}\{1\} + \tfrac{1}{2}\mathcal{F}\{\text{sgn }(t)\},$$

la cual, usando las ecuaciones (3.26) y (3.31), se convierte en

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \pi\,\delta(\omega) + 1/j\omega. \qquad (3.33)$$

Por tanto, la función de densidad espectral del escalón unitario contiene un impulso en $\omega = 0$ que corresponde al valor promedio $\frac{1}{2}$ de la función escalón. Tiene también todas las componentes de alta frecuencia de la función signo reducidas a la mitad.

Nótese que la ecuación (3.30) es la integral de una función compleja simétrica con respecto al origen. Tomarla en forma no simétrica podría provocar errores. Por ejemplo, si se intentara evaluar en forma directa la transformada de Fourier del escalón unitario,

$$\lim_{a\to 0}\int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}\,dt = 1/j\omega,$$

no se obtendría el resultado correcto de la ecuación (3.33).

3.5.5 Funciones periódicas

En la sección 3.2 se estudiaron en forma cualitativa las características de la función de densidad espectral de una señal periódica. Ahora, la relación se puede formalizar de un modo más cuantitativo.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Se puede expresar una función $f(t)$ periódica con periodo T por medio de su serie exponencial de Fourier

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{donde } \omega_0 = 2\pi/T.$$

Tomando la transformada de Fourier, se tiene

$$\mathcal{F}\{f_T(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}\right\}.$$

Si se supone que se pueden intercambiar las operaciones de integración y sumatoria,

$$\mathcal{F}\{f_T(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\}.$$

Usando la ecuación (3.25), se obtiene

$$\mathcal{F}\{f_T(t)\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0). \tag{3.34}$$

Así, la transformada de Fourier (densidad espectral) de una señal periódica consiste en un conjunto de impulsos localizados en las frecuencias armónicas de la señal. El área (peso) de cada impulso es 2π veces el valor de su coeficiente respectivo en la serie de Fourier exponencial. Esto permite tratar de manera única tanto las funciones periódicas como las no periódicas.

EJEMPLO 3.5.1

Halle la función de densidad espectral de una señal cuadrada periódica par con valor promedio cero, periodo de dos segundos y amplitud pico a pico A.

Solución Se usarán transformadas de Fourier conocidas para obtener los coeficientes de la serie de Fourier y después se hallará la transformada de la serie. Para un pulso rectangular de ancho y altura unitarios A, la ecuación (3.17) da

$$F(\omega) = A \text{ Sa } (\omega/2).$$

Como aquí $\omega_0 = \pi$, la ecuación (3.15) se convierte en

$$F_n = \frac{1}{T} F(\omega)\big|_{\omega = n\omega_0} = (A/2) \text{ Sa } (n\pi/2).$$

Si se escribe la serie y se observa que el valor promedio es cero,

$$f_T(t) = (A/2) \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \text{Sa } (n\pi/2) e^{jn\pi t}.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Usando la ecuación (3.34), la transformada de Fourier de esta función es

$$\mathcal{F}\{f_T(t)\} = \pi A \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \text{Sa}\,(n\pi/2)\,\delta(\omega - \pi n)\,.$$

La función de densidad espectral de este ejemplo aparece en la figura 3.4. Nótese que la ausencia de un impulso en $\omega = 0$ indica que el valor promedio de la señal es cero.

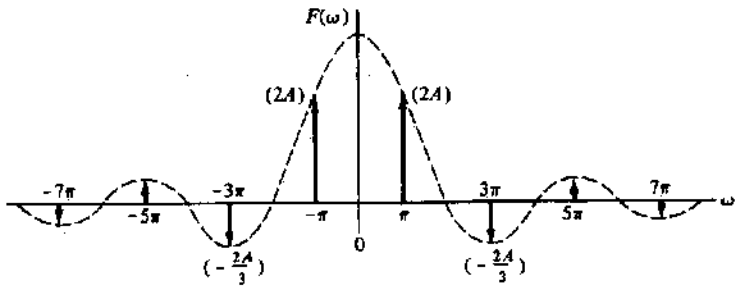


Figura 3.4 Función de densidad espectral de una señal cuadrada periódica con valor promedio cero.

Una función periódica de considerable importancia en capítulos posteriores es una secuencia periodica de funciones impulso unitario (en ocasiones llamada función "peine"). Por conveniencia, esta secuencia, con periodo T, se escribe como

$$\delta_T(t) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\,. \tag{3.35}$$

Como es una función periódica, se puede expresar en términos de una serie de Fourier haciendo $\omega_0 = 2\pi/T$,

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t},$$

donde

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T},$$

de modo que

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}.$$

O sea, la función tren de impulsos (peine) contiene componentes de las frecuencias armónicas $\omega = 0, \pm\omega_0, \pm 2\omega_0, \ldots$ de igual peso. Usando la ecuación (3.34), la transformada de Fourier del tren de impulsos unitarios es

http://libreria-universitaria.blogspot.com

$$\mathcal{F}\{\delta_T(t)\} = \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\omega_0)$$

$$= \omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\omega_0),$$

$$\mathcal{F}\{\delta_T(t)\} = \omega_0\,\delta_{\omega_0}(\omega). \tag{3.36}$$

La transformada de Fourier de un tren de impulsos periódicos en el dominio del tiempo proporciona un tren de impulsos que es periódico en el dominio de la frecuencia. En la figura 3.3 se muestra el tren de impulsos y su transformada. En la tabla 3.1 aparece una lista de algunos pares seleccionados de transformadas de Fourier (no todas las funciones de la tabla se trataron aquí).

TABLA 3.1 Algunos pares seleccionados de la transformada de Fourier

	$f(t)$	$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$
1.	$e^{-at}u(t)$	$1/(a + j\omega)$
2.	$te^{-at}u(t)$	$1/(a + j\omega)^2$
3.	$e^{-a\lvert t\rvert}$	$2a/(a^2 + \omega^2)$
4.	$e^{-t^2/(2\sigma^2)}$	$\sigma\sqrt{2\pi}\,e^{-\sigma^2\omega^2/2}$
5.	sgn (t)	$2/(j\omega)$
6.	$j/(\pi t)$	sgn (ω)
7.	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + 1/(j\omega)$
8.	$\delta(t)$	1
9.	1	$2\pi\delta(\omega)$
10.	$e^{\pm j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega \mp \omega_0)$
11.	$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
12.	$\operatorname{sen}\omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
13.	rect (t/τ)	τ Sa $(\omega\tau/2)$
14.	$\frac{W}{2\pi}$ Sa $(Wt/2)$	rect (ω/W)
15.	$\frac{W}{\pi}$ Sa (Wt)	rect $(\omega/(2W))$
16.	$\Lambda(t/\tau)$	τ[Sa $(\omega\tau/2)$]^2
17.	$\frac{W}{2\pi}$[Sa $(Wt/2)$]^2	$\Lambda(\omega/W)$
18.	cos $(\pi t/\tau)$ rect (t/τ)	$\frac{2\pi}{\pi}\frac{\cos(\omega\tau/2)}{1 - (\omega\tau/\pi)^2}$
19.	$\frac{2W}{\pi^2}\frac{\cos(Wt)}{1 - (2Wt/\pi)^2}$	cos $[\pi\omega/(2W)]$ rect $[\omega/(2W)]$
20.	$\delta_T(t)$	$\omega_0\,\delta_{\omega_0}(\omega)$, donde $\omega_0 = 2\pi/T$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

3.6 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La transformada de Fourier es una forma de expresar una función dada del tiempo (o, para el caso, cualquier otra coordenada apropiada) por medio de un conjunto continuo de componentes exponenciales de frecuencia. La función de densidad espectral resultante da el peso relativo de cada componente.

Se usará la convención de indicar una función del tiempo (una señal) y su transformada de Fourier con letras minúscula y mayúscula, respectivamente.† Una notación compacta apropiada para mostrar la correspondencia entre los dos dominios es el uso de una flecha doble: $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$. Se supone que la relación entre tiempo y frecuencia en la transformada de Fourier es unívoca; es decir, $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f(t)] = f(t)$ para todo t.

¿Qué ocurre en un dominio cuando en el otro se efectúa una operación elemental sobre la función? Una manera de saberlo es hacer la transformación, efectuar la operación deseada y después hacer la transformación inversa. Sin embargo, este procedimiento es tosco y, con frecuencia, bastante difícil. El propósito en esta sección es presentar de manera general algunas propiedades de la transformada de Fourier.

3.6.1 Linealidad (superposición)

La transformada de Fourier es una operación lineal basada en las propiedades de la integración, por lo que puede aplicarse la superposición. Así que para cualesquiera constantes arbitrarias a_1 y a_2,

$$\mathcal{F}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)\,, \tag{3.37}$$

o

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)\,.$$

Esto proviene de la definición integral de la transformada de Fourier. Aunque la prueba es trivial, las consecuencias de esta propiedad son de gran importancia en el estudio de sistemas lineales.

Se deben tomar ciertas precauciones al sumar densidades espectrales. Recuérdese que, en general, $F(\omega)$ es compleja, por lo que la suma debe ser compleja. Es un error común sumar sólo las magnitudes sin tomar en cuenta la fase.

3.6.2 Conjugadas complejas

Para cualquier señal compleja, se tiene

$$\mathcal{F}\{f^*(t)\} = F^*(-\omega)\,. \tag{3.38}$$

† Se permiten excepciones cuando se desea formar símbolos especiales usando más de una letra, por ejemplo rec(t), rect(ω), Sa(t), Sa(ω), etcétera.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Prueba

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f^*(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)e^{-j\omega t}\,dt \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}\,dt\right]^* \\ &= F^*(-\omega)\end{aligned}$$

Una consecuencia importante de esta propiedad es que si la señal $f(t)$ tiene valor real, $f^*(t) = f(t)$ y $F^*(-\omega) = F(\omega)$.

3.6.3 Simetría

Cualquier señal se puede expresar como la suma de una función par $f_e(t)$, y una función impar $f_0(t)$ [véanse Ecs. (2.62) y (2.63)]. Esto da pie a las siguientes propiedades de la transformada de Fourier

$$\mathcal{F}\{f_e(t)\} = F_e(\omega) \qquad \text{(y real)} \tag{3.39}$$

$$\mathcal{F}\{f_o(t)\} = F_o(\omega) \qquad \text{(e imaginaria)} \tag{3.40}$$

Prueba Para la primera parte, se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f_e(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_e(t)e^{-j\omega t}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_e(t)\cos\omega t\,dt - j\int_{-\infty}^{\infty} f_e(t)\,\text{sen}\,\omega t\,dt \\ &= 2\int_{0}^{\infty} f_e(t)\cos\omega t\,dt\,.\end{aligned}$$

Como $\cos\omega t = \cos[(-\omega)t]$, esta expresión es par en ω. La prueba de la segunda parte se hace en forma similar.

Para una señal causal (es decir, que vale cero para $t < 0$) se deben tener combinaciones muy específicas de las funciones par e impar. O sea que las partes real e imaginaria del espectro de una señal causal deben estar relacionadas. En otras palabras, ni la parte real ni la imaginaria del espectro se pueden especificar en forma arbitraria.

3.6.4 Dualidad

Existe dualidad entre el dominio del tiempo y el de la frecuencia. Esto se aprecia en las relaciones de la transformada de Fourier [véanse Ecs. (3.13) y (3.14)] y se puede establecer en forma explícita de la siguiente manera.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Si

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega),$$

entonces

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = 2\pi f(-\omega). \tag{3.41}$$

La ecuación (3.41) se puede probar con un intercambio de t y ω en las integrales de la transformada de Fourier. Esto se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.6.1

Si $\mathcal{F}\{\text{rect}\,(t)\} = \text{Sa}\,(\omega/2)$, determine $\mathcal{F}\{\text{Sa}\,(t/2)\}$.

Solución $F(\omega) = \text{Sa}\,(\omega/2)$; entonces $f(t) = \text{Sa}\,(t/2)$. Usando la ecuación (3.41), se puede escribir

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = 2\pi\,\text{rect}\,(-\omega)$$
$$= 2\pi\,\text{rect}\,(\omega).$$

En la figura 3.5 se ilustra esta simetría.

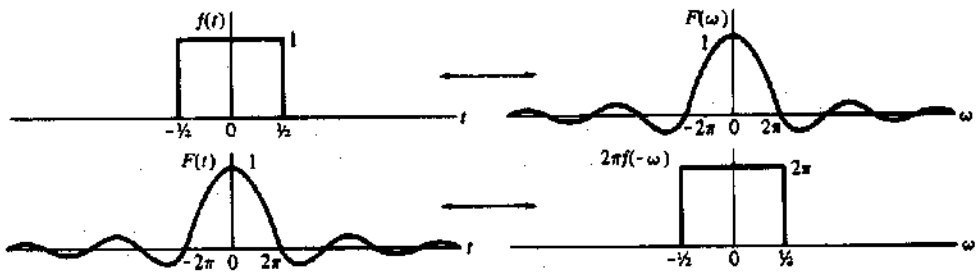


Figura 3.5 Dualidad de la transformada de Fourier.

3.6.5 Escala de coordenadas (expansión recíproca)

La expansión o compresión de una onda en el tiempo afecta su densidad espectral. Para una constante de valor real y escala α y cualquier señal pulso $f(t)$,

$$\mathcal{F}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|}F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right). \tag{3.42}$$

Prueba

$$\mathcal{F}\{f(\alpha t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t)e^{-j\omega t}\,dt$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Los valores positivos y negativos de α se verán por separado. Para α positiva, y cambiando la variable de integración a $x = \alpha t$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(\alpha t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x/\alpha}\,dx/\alpha \\ &= \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \text{ para } \alpha > 0.\end{aligned}$$

Si α es negativa, los límites de la integral se invierten cuando la variable de integración se cambia de manera que

$$\mathcal{F}\{f(\alpha t)\} = -\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \text{ para } \alpha < 0.$$

Ambos casos se pueden combinar en una forma compacta

$$\mathcal{F}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|}F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Si α es positiva y mayor que uno, $f(\alpha t)$ es una versión comprimida de $f(t)$ y su densidad espectral se expande en frecuencia por $1/\alpha$. La magnitud de la densidad espectral también cambia (un efecto necesario para mantener el balance de energía entre los dos dominios). Si α es positiva pero menor que uno, $f(\alpha t)$ es una versión expandida de $f(t)$ y su densidad espectral se comprime. Cuando α es negativa, $f(\alpha t)$ se invierte en el tiempo con respecto a $f(t)$ y se expande o comprime dependiendo de que $|\alpha|$ sea menor o mayor que uno (puede ser útil anotar que el factor $1/|\alpha|$ se llama "amplificación" en óptica). El efecto de un cambio en la escala de tiempo sobre una señal pulso y su densidad espectral se muestra en la figura 3.6.

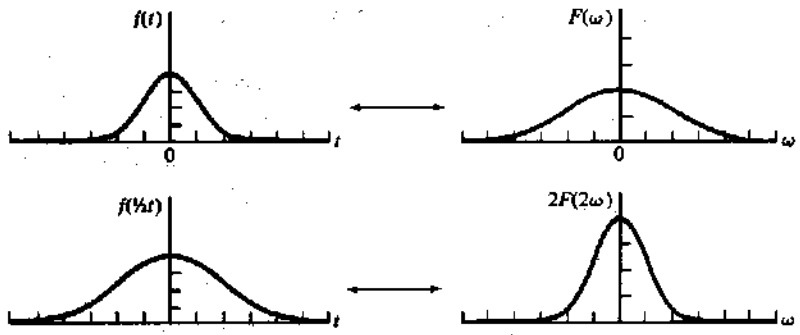


Figura 3.6 Efectos de cambios en la escala de tiempo sobre la densidad espectral de la señal.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Una señal dada se graba en cinta magnética a $7\frac{1}{2}$ pulgadas por segundo y se reproduce a $3\frac{3}{4}$ pulgadas por segundo. Si se supone una respuesta de frecuencia plana, ¿cuál es la magnitud de la densidad espectral de la señal en la reproducción si la densidad espectral original era de la forma (a) $\exp(-|\omega|)$; (b) $1/\sqrt{\omega^2 + 1}$; (c) $\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)$?

RESPUESTA: (a) $2\exp(-2|\omega|)$; (b) $1/\sqrt{\omega^2 + 1/4}$; (c) $\delta(\omega - \omega_0/2) + \delta(\omega + \omega_0/2)$.

3.6.6 Desplazamiento en el tiempo (retardo)

Otra operación geométrica es la traslación del origen del tiempo, haciendo que la señal se retarde (o se adelante) en el tiempo un cierto valor t_0. El efecto correspondiente en la densidad espectral de la señal es

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = F(\omega)e^{-j\omega t_0}. \tag{3.43}$$

Prueba

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-j\omega t}\,dt$$

Cambiando la variable de integración, sea $x = t - t_0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega(x+t_0)}\,dx \\ &= e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega x}\,dx \\ &= e^{-j\omega t_0}F(\omega)\,.\end{aligned}$$

Por tanto, si una señal $f(t)$ se retarda en el tiempo un valor t_0, su densidad espectral no se altera, y a cada componente de frecuencia se le agrega una fase negativa $(-\omega t_0)$. Si t_0 es negativo, la función se adelanta en el tiempo y la densidad espectral de fase agregada tiene pendiente positiva.

EJEMPLO 3.6.2

Determine la transformada de Fourier de los pulsos rectangulares de la figura 3.7.

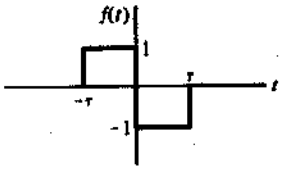


Figura 3.7 Pulsos rectangulares del ejemplo 3.6.2.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Solución $f(t) = \text{rect}\,[(t + \tau/2)/\tau] - \text{rect}\,[(t - \tau/2)/\tau]$

Usando la propiedad de escala de coordenadas, tenemos

$$\mathcal{F}\{\text{rect}\,(t/\tau)\} = \tau\ \text{Sa}\,(\omega\tau/2)\,.$$

Usando la propiedad de retardo, se obtiene

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \tau\ \text{Sa}\,(\omega\tau/2)[e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}] = j(4/\omega)\,\text{sen}^2\,(\omega\tau/2)\,.$$

La densidad espectral de una señal dada $f(t)$ es $F(\omega)$. La señal sufre una distorsión tal que la nueva densidad espectral $F_1(\omega)$ es $F_1(\omega) = F(\omega)[1 + 2\alpha\cos\omega T]$, donde α y T son parámetros. Determine $f_1(t)$ en términos de $f(t)$.

RESPUESTA: $f_1(t) = f(t) + \alpha f(t - T) + \alpha f(t + T)$.

3.6.7 Desplazamiento de frecuencia (modulación)

La propiedad dual a la de retardo es la propiedad de *traslación en frecuencia*,

$$\mathcal{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} = F(\omega - \omega_0)\,. \tag{3.44}$$

Prueba

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}\,dt \\ &= F(\omega - \omega_0)\end{aligned}$$

Por tanto, multiplicar una función del tiempo por $e^{j\omega_0 t}$ hace que su espectro se traslade en frecuencia ω_0 rad/s.

Determine la constante de valor complejo k necesaria para que sea válido el siguiente par transformado:

$$\mathcal{F}\{\exp\,(j\pi t)f(t - \tfrac{1}{2})\} = k\,\exp\,(-j\omega/2)F(\omega - \pi)\,.$$

RESPUESTA: $k = j$.

---

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Para una $f(t)$ con valor real, es ahora relativamente simple hallar la transformada de Fourier de $\mathcal{R}e\{f(t)e^{j\omega_0 t}\}$:

$$f(t)\cos\omega_0 t = \tfrac{1}{2}f(t)\left[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right].$$

Usando la propiedad de traslación en frecuencia, se obtiene

$$\mathcal{F}\{f(t)\cos\omega_0 t\} = \tfrac{1}{2}[F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]. \tag{3.45}$$

Este proceso de multiplicar una señal por una función armónica (es decir, un seno o un coseno) para trasladar la densidad espectral se conoce como *modulación de amplitud*. La ecuación (3.45) se llama *propiedad de modulación* de la transformada de Fourier. Nótese que en el proceso de modulación una mitad de la densidad espectral se mueve a frecuencias más altas y la otra a frecuencias menores.

EJEMPLO 3.6.3

Halle el espectro de una señal pulso,

$$A\ \text{rect}\ (t/\tau)\cos\omega_0 t\,.$$

Solución De la tabla 3.1,

$$\mathcal{F}\{A\ \text{rect}\ (t/\tau)\} = A\tau\ \text{Sa}\ (\omega\tau/2)\,.$$

La propiedad de modulación da

$$\mathcal{F}\{A\ \text{rect}\ (t/\tau)\cos\omega_0 t\} = \tfrac{1}{2}A\tau\{\text{Sa}\ [(\omega + \omega_0)\tau/2] + \text{Sa}\ [(\omega - \omega_0)\tau/2]\}.$$

El pulso y su densidad espectral se muestran en la figura 3.8. Nótese que la propiedad de modulación proporciona una forma conveniente de manejar senoidales de longitud finita.

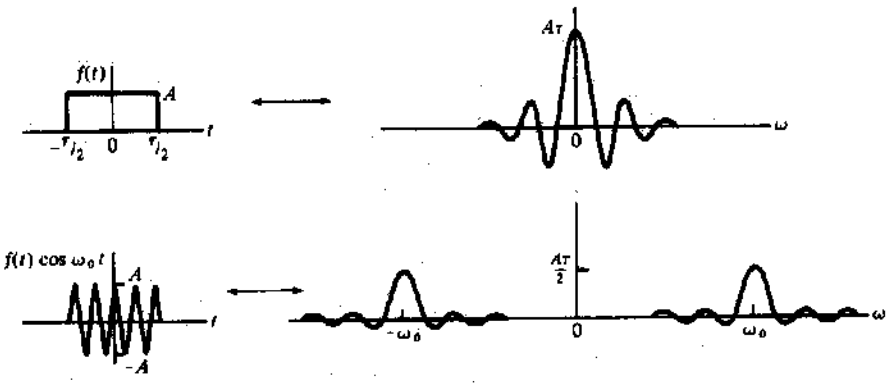


Figura 3.8 Efectos de la modulación en la densidad espectral de la señal.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Sabiendo que

$$\mathcal{F}\{\exp(-at)u(t)\} = 1/(a + j\omega),$$

determine la transformada de Fourier de $\exp(-at)\cos\omega_0 t\, u(t)$ usando la propiedad de modulación.

RESPUESTA: $(a + j\omega)/[(a^2 + \omega_0^2 - \omega^2) + j2a\omega]$.

3.6.8 Derivación e integración

Si *df/dt* es absolutamente integrable, entonces

$$\frac{d}{dt}f(t) \leftrightarrow j\omega F(\omega). \tag{3.46}$$

Prueba Usando la transformada de Fourier inversa, se tiene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega,$$

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}[F(\omega)e^{j\omega t}]\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega.$$

Si se transforman ambos lados,

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = j\omega F(\omega).$$

Por tanto, la derivación con respecto al tiempo incrementa las componentes de alta frecuencia de una señal.

La propiedad de integración correspondiente es

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega}F(\omega) + \pi F(0)\,\delta(\omega), \tag{3.47}$$

donde

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt. \tag{3.48}$$

La integración en el tiempo suprime las componentes de alta frecuencia de la señal. Esta conclusión concuerda con la afirmación de que la integración suaviza las fluctuaciones de una señal en el dominio del tiempo.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Si $F(0) \neq 0$, la prueba de la ecuación (3.47) debe basarse en una función generalizada dado que las integrales pueden no converger. Lo que ocurre, por supuesto, es que un integrador ideal detecta cualquier área positiva o negativa en un pulso y mantiene éste por un tiempo infinito, creando, por tanto, un valor promedio distinto de cero, como en la ecuación (3.48).

Para ilustrar la propiedad de integración, definiremos la *función triangular*:

$$\Lambda(t/\tau) = \begin{cases} 1 - |t|/\tau & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases} \tag{3.49}$$

Esta ecuación se puede obtener integrando la señal del ejemplo 3.6.2 y dividiendo por la constante τ. De la ecuación (3.47) y del resultado del ejemplo 3.6.2 se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\Lambda(t/\tau)\} &= \frac{1}{j\omega}\frac{1}{\tau}[j(4/\omega)\ \text{sen}^2(\omega\tau/2)] \\ &= \tau\ \text{Sa}^2\ (\omega\tau/2)\,. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Este útil par transformado se ilustra también en la figura 3.3.

La derivación en el dominio del tiempo equivale a la multiplicación por el factor algebraico $(j\omega)$ en el dominio de la frecuencia. Por otra parte, la integración en el dominio del tiempo equivale a la división por $(j\omega)$ en el de la frecuencia. La combinación de estas propiedades a menudo resulta conveniente para determinar la transformada de Fourier de funciones continuas por tramos. En seguida se ilustra este procedimiento. [Nótese que la ecuación (3.48) se satisface siempre al derivar porque la derivación elimina cualquier valor promedio distinto de cero.]

EJEMPLO 3.6.4

Determine la transformada de Fourier del pulso trapezoidal de la figura 3.9(a).

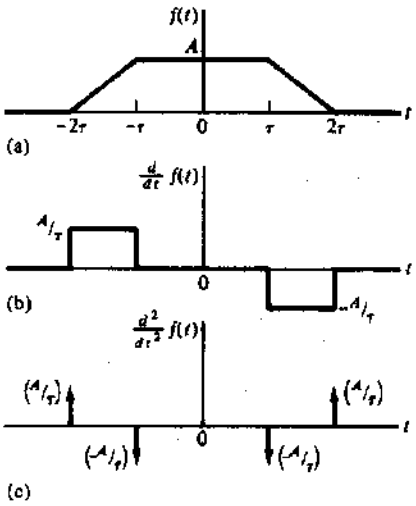


Figura 3.9 Pulso trapezoidal y sus derivadas.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Solución Derivando dos veces, como se muestra en las figuras 3.9(b) y (c), se puede escribir, por inspección,

$$(j\omega)^2 F(\omega) = \frac{A}{\tau}(e^{j2\omega\tau} - e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau} + e^{-j2\omega\tau}).$$

Simplificando, se obtiene

$$(j\omega)^2 F(\omega) = \frac{A}{\tau}(e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2})^2(e^{j\omega\tau} + 1 + e^{-j\omega\tau}),$$

o

$$F(\omega) = A\tau\ \mathrm{Sa}^2\ (\omega\tau/2)[1 + 2\cos\omega\tau].$$

Determine la transformada de Fourier del pulso triangular

$$f(t) = 2t[u(t) - u(t-1)] - (t-3)[u(t-1) - u(t-3)].$$

RESPUESTA: $F(\omega) = [2 + \exp(-j3\omega) - 3\exp(-j\omega)]/(j\omega)^2$.

3.6.9 Convolución en el tiempo

Como se vio en el capítulo 2, una forma de caracterizar un sistema es mediante su función de transferencia en frecuencia; otra forma es por su respuesta al impulso. Ahora se relacionarán ambas usando el principio de convolución.

Para la señal de prueba $f(t) = \delta(t - \tau)$, la respuesta del sistema a un impulso se define como [véase Ec. (2.11)]

$$\mathcal{T}\{\delta(t-\tau)\} = h(t,\tau), \tag{3.51}$$

donde τ es la variable de retardo. Si el sistema es *invariable en el tiempo*, $h(t, \tau)$ toma la forma especial

$$\mathcal{T}\{\delta(t-\tau)\} = h(t-\tau). \tag{3.52}$$

La señal de entrada $f(t)$ se puede expresar en términos de funciones impulso por [véanse Ecs. (2.95) y (2.98)]

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\delta(\tau - t)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Si el sistema es lineal, se puede agregar la respuesta al impulso correspondiente a cada valor de la variable de retardo τ para formar la respuesta,

$$g(t) = \mathcal{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\right\}.$$

De la teoría de integrales, esto se puede escribir como

$$g(t) = \mathcal{T}\left\{\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tau_n)\,\delta(t-\tau_n)\,\Delta\tau\right\}.$$

Usando el principio de superposición, el operador del sistema se introduce en la sumatoria. Además, los $f(\tau_n)$ son los pesos (áreas) de las funciones impulso y son constantes para cada impulso. En consecuencia, se tiene

$$g(t) = \lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tau_n)\mathcal{T}\{\delta(t-\tau_n)\}\,\Delta\tau.$$

Volviendo a la forma integral y utilizando la ecuación (3.51), se tiene

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t,\tau)\,d\tau. \tag{3.53}$$

Éste es un resultado clave en el análisis de señales puesto que liga la entrada a la salida por medio de una operación integral, y es válido para cualquier sistema lineal. En el caso particular en que el sistema también es invariable en el tiempo, la ecuación (3.53) se reduce a la importante forma

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau. \tag{3.54}$$

Este resultado se conoce como *integral de convolución*, para la que resulta conveniente la siguiente notación compacta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \triangleq f(t) \circledast h(t).$$

Una propiedad importante de la transformada de Fourier es que reduce la integral de convolución a un producto algebraico. Matemáticamente, se establece de la manera siguiente. Si

$$f(t) \circledast h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

y

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega), \qquad \mathcal{F}\{h(t)\} = H(\omega);$$

entonces

$$\mathcal{F}\{f(t) \circledast h(t)\} = F(\omega)H(\omega). \tag{3.55}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Prueba

$$\mathcal{F}\{f(t) \circledast h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \right] e^{-j\omega t}\,dt$$

Cambiando el orden de integración e integrando con respecto a t primero, se obtiene

$$\mathcal{F}\{f(t) \circledast h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t}\,dt \right] d\tau\,.$$

Usando la propiedad de desplazamiento en el tiempo (retardo), la integración entre corchetes es

$$\mathcal{F}\{h(t-\tau)\} = e^{-j\tau\omega}H(\omega)\,.$$

Procediendo luego a la integración restante en τ, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t) \circledast h(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)H(\omega)e^{-j\omega\tau}\,d\tau \\ &= H(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau \\ &= H(\omega)F(\omega)\,.\end{aligned}$$

De donde la convolución en el dominio del tiempo corresponde a la multiplicación en el dominio de la frecuencia.

Determine la transformada de Fourier de la señal $g(t) = \exp(-t)u(t) \circledast \exp(-2t)u(t)$ (a) efectuando primero la convolución y transformando después el resultado, y (b) tomando la transformada de cada término y multiplicando después.

RESPUESTA: $1/(2 - \omega^2 + j3\omega)$.

3.6.10 Convolución en la frecuencia

Una propiedad similar a la anterior es la siguiente:

Si

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\} = F_1(\omega), \qquad \mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_2(\omega)\,;$$

entonces†

$$\mathcal{F}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi}[F_1(\omega) \circledast F_2(\omega)]\,, \tag{3.56}$$

† El factor de $(1/2\pi)$ aparece porque se usa la frecuencia en radianes, ω. Conviene recordar que la frecuencia f y el tiempo t, son recíprocos entre sí. La frecuencia en radianes es 2π veces el recíproco del tiempo, sugiriendo así la división por 2π para mantener las unidades correctas.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

donde

$$F_1(\omega) \circledast F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega - u)\,du\,.$$

Esta propiedad se puede probar en la misma forma que la convolución en el tiempo. O sea, *la multiplicación de dos funciones en el dominio del tiempo equivale a la convolución de sus densidades espectrales en el dominio de la frecuencia.*

Evalúe: rect (ω) exp $(-j\omega) \circledast$ exp $(-j\omega)$ at $\omega = \pi$.

RESPUESTA: -1.

TABLA 3.2 Algunas transformadas de Fourier correspondientes a determinadas operaciones matemáticas

Operación	$f(t)$	$\leftrightarrow$	$F(\omega)$
Linealidad (superposición)	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$		$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
Conjugada compleja	$f^*(t)$		$F^*(-\omega)$
Escala	$f(\alpha t)$		$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$
Retardo	$f(t - t_0)$		$e^{-j\omega t_0} F(\omega)$
Traslación en frecuencia	$e^{j\omega_0 t} f(t)$		$F(\omega - \omega_0)$
Modulación de amplitud	$f(t) \cos \omega_0 t$		$\frac{1}{2}F(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0)$
Convolución en el tiempo	$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau)\,d\tau$		$F_1(\omega)F_2(\omega)$
Convolución en la frecuencia	$f_1(t)f_2(t)$		$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega - u)\,du$
Dualidad: tiempo-frecuencia	$F(t)$		$2\pi f(-\omega)$
Simetría: par-impar	$f_e(t)$		$F_e(\omega)$ [real]
	$f_o(t)$		$F_o(\omega)$ [imaginario]
Derivación en el tiempo	$\frac{d}{dt} f(t)$		$j\omega F(\omega)$
Integración en el tiempo	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau$		$\frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0)\,\delta(\omega)$, donde $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

3.6.11 Observaciones sobre las propiedades de la transformada de Fourier

El par transformado de Fourier se obtuvo de una operación de límite de la serie de Fourier exponencial compleja. Suponiendo que sea válido intercambiar operaciones, se puede concluir que todas las propiedades anteriores de la transformada de Fourier son aplicables a la serie exponencial. Las pruebas son casi idénticas, y el mayor cambio reside en la sustitución de la variable de frecuencia discreta $n\omega_0$ por la variable continua ω.

En la tabla 3.2 se incluyen las propiedades de la transformada de Fourier. Nótese la simetría entre el dominio del tiempo y el de la frecuencia.

En este estudio se ha tratado el par transformado de Fourier $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, donde t representa el tiempo y ω la frecuencia en radianes. Sin embargo, el análisis de Fourier no se restringe a los pares de variables tiempo-frecuencia. En general, se puede usar cualquier par de variables x, y, para formar un par transformado de Fourier $f(x) \leftrightarrow F(y)$ siempre que su producto (x, y) sea adimensional. La transformada de Fourier se puede extender también a más de una dimensión, eligiendo los pares de variables apropiados en cada dimensión.

3.7 ALGUNAS RELACIONES DE CONVOLUCIÓN

La integral de convolución, tal como aparece en la ecuación (3.54), rige siempre que el sistema sea lineal e invariable en el tiempo. Además, si es causal (es decir, físicamente realizable), entonces $h(t) = 0$ para todo $t < 0$ y no hay contribución a la integración en la ecuación (3.54) para $(t - \tau) < 0$:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)h(t - \tau)\,d\tau; \qquad h(t) \text{ causales.} \tag{3.57}$$

Ocurre a menudo que la entrada, $f(t)$, también satisface la condición $f(t) = 0$ para $t < 0$, y la ecuación (3.57) se simplifica:

$$g(t) = \int_{0}^{t} f(\tau)h(t - \tau)\,d\tau; \qquad f(t),\ h(t) \text{ causales.} \tag{3.58}$$

3.7.1 Propiedades de la convolución

A continuación se enumeran algunas propiedades útiles de la convolución.

Ley conmutativa

$$f_1(t) \circledast f_2(t) = f_2(t) \circledast f_1(t) \tag{3.59}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Ley distributiva

$$f_1(t) \circledast [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) \circledast f_2(t) + f_1(t) \circledast f_3(t) \tag{3.60}$$

Ley asociativa

$$f_1(t) \circledast [f_2(t) \circledast f_3(t)] = [f_1(t) \circledast f_2(t)] \circledast f_3(t) \tag{3.61}$$

Las pruebas de estas propiedades se hacen a partir de las definiciones de la integral y los posibles cambios en el orden de integración.

3.7.2 Convolución que implica funciones singulares

La respuesta a un escalón unitario es la integral indefinida de la respuesta a un impulso unitario. Esto se muestra como sigue:

$$u(t) \circledast h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t - \tau)\,d\tau = \int_{0}^{\infty} h(t - \tau)\,d\tau\,.$$

Si se cambia la variable de integración, sea $x = t - \tau$, entonces,

$$u(t) \circledast h(t) = \int_{-\infty}^{t} h(x)\,dx\,. \tag{3.62}$$

Este resultado proporciona un método para determinar en el laboratorio la respuesta al impulso de un sistema. Aunque técnicamente la función escalón unitario existe por siempre, la mayoría de los sistemas tiene una respuesta al impulso de duración relativamente corta. Si usamos un generador de ondas cuadradas de baja frecuencia cuya razón de repetición sea mucho mayor que la duración de la respuesta al impulso de un sistema, éste, para todo propósito práctico, percibe un escalón. Tras registrar la respuesta al escalón del sistema, se puede tomar la derivada de la gráfica de salida en función del tiempo. Ésta será la respuesta del sistema a un impulso.

La convolución con la función impulso unitario se hace a partir de las propiedades integrales de la función impulso

$$\begin{aligned} f(t) \circledast \delta(t - t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\delta(t - t_0 - \tau)\,d\tau \\ &= f(t - t_0)\,. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Por tanto, la convolución de una función con el impulso unitario reproduce exactamente esa función aunque la retarda (o adelanta) por el retardo (o adelanto) del impulso.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJEMPLO 3.7.1

Halle $f(t) \circledast h(t)$ para los $f(t)$, $h(t)$ mostrados en la figura 3.10(a), (b).

Solución De la figura 3.10, $f(t) = A \operatorname{sen} \pi t\, u(t)$, $h(t) = \delta(t) - \delta(t-2)$,

$$g(t) = f(t) \circledast h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [A \operatorname{sen} \pi\tau\, u(\tau)][\delta(t-\tau) - \delta(t-2-\tau)]\, d\tau$$

$$= [A \operatorname{sen} \pi t]u(t) - [A \operatorname{sen} \pi(t-2)]u(t-2)$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A \operatorname{sen} \pi t & 0 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}.$$

En la figura 3.10(c) se muestra la gráfica de $g(t)$. Este tipo de sistema se emplea a veces en el radar y en la navegación para determinar el tiempo de arribo de señales parcialmente conocidas. Nótese que el $h(t)$ que se requiere es el del ejemplo 2.19.1 sin el integrador.

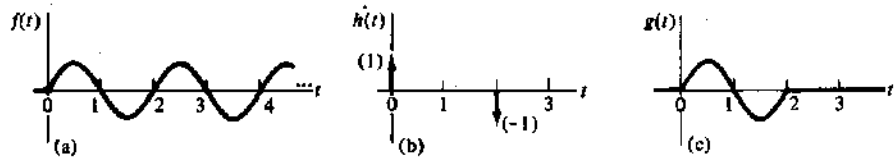


Figura 3.10 El sistema de diferenciación de retardo del ejemplo 3.7.1.

Una extensión de la ecuación (3.63) es que la convolución de una función impulso con otra da una nueva función impulso. En forma matemática, se tiene

$$A\,\delta(t-t_0) \circledast B\,\delta(t-t_1) = AB \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_0)\,\delta(t - t_1 - \tau)\, d\tau$$

$$= AB\,\delta(t - t_0 - t_1). \qquad (3.64)$$

Esto se prueba por la aplicación del método de funciones generalizadas (véase Sec. 2.18); aquí no insistiremos en este tema.

3.8 INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA CONVOLUCIÓN

La interpretación gráfica de la convolución permite visualizar los resultados de las más abstractas operaciones matemáticas. Supóngase que se quiere hallar la convolución de dos funciones dadas $f_1(t)$ y $f_2(t)$. Las operaciones por efectuar se basan en la integral de convolución:

$$f_1(t) \circledast f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Primero se enumeran, paso a paso, las operaciones necesarias:

1. Reemplazar t por τ en $f_1(t)$, lo que da $f_1(\tau)$.
2. Reemplazar t por $(-\tau)$ en $f_2(t)$. Esto hace girar a la función $f_2(\tau)$ alrededor del eje vertical pasando por el origen del eje τ.
3. Trasladar todo el sistema de referencia de $f_2(-\tau)$ por medio de una cantidad t.† (Por lo que concierne a la integración, t no es más que un parámetro.) Entonces, la cantidad de traslación t es la diferencia entre el sistema de referencia móvil y el fijo. El origen del sistema móvil está en $\tau = t$; el origen del fijo, en $\tau = 0$. La función en el sistema móvil representa $f_2(t - \tau)$; la función en el sistema fijo, $f_1(\tau)$.
4. En cualquier desplazamiento relativo entre los ejes de referencia, por ejemplo t_0, debe hallarse el área bajo el producto de las dos funciones, esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t_0 - \tau)\, d\tau = [f_1(t) \circledast f_2(t)]_{t=t_0}.$$

5. Este procedimiento debe repetirse para diferentes valores de $t = t_0$ desplazando en forma progresiva el sistema móvil y hallando los valores de la integral de convolución en esos valores de t. Para funciones continuas, esto puede hacerse por integración directa. Para funciones continuas por tramos, el producto será continuo por tramos y deberá integrarse sobre cada sección continua.
6. Si el desplazamiento del sistema móvil es a lo largo del eje negativo τ (es decir, hacia la izquierda), t es negativo. Si es sobre el eje positivo τ (hacia la derecha), t es positivo.

EJEMPLO 3.8.1

Halle la convolución del pulso rectangular $f_1(t)$ y el pulso triangular $f_2(t)$ de la figura 3.11.

Solución Los pasos descritos se muestran en la figura 3.11.

Halle la convolución rect $(t/\alpha) \circledast$ rect (t/α).

RESPUESTA: $\alpha\Lambda(t/\alpha)$.

† Esta traslación es análoga al movimiento relativo entre sistemas de referencia rígidos en la mecánica relativista. En la teoría de la relatividad, lo importante es la velocidad entre sistemas coordenados, mientras que en la convolución lo que interesa es la distancia y dirección entre sistemas coordenados.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

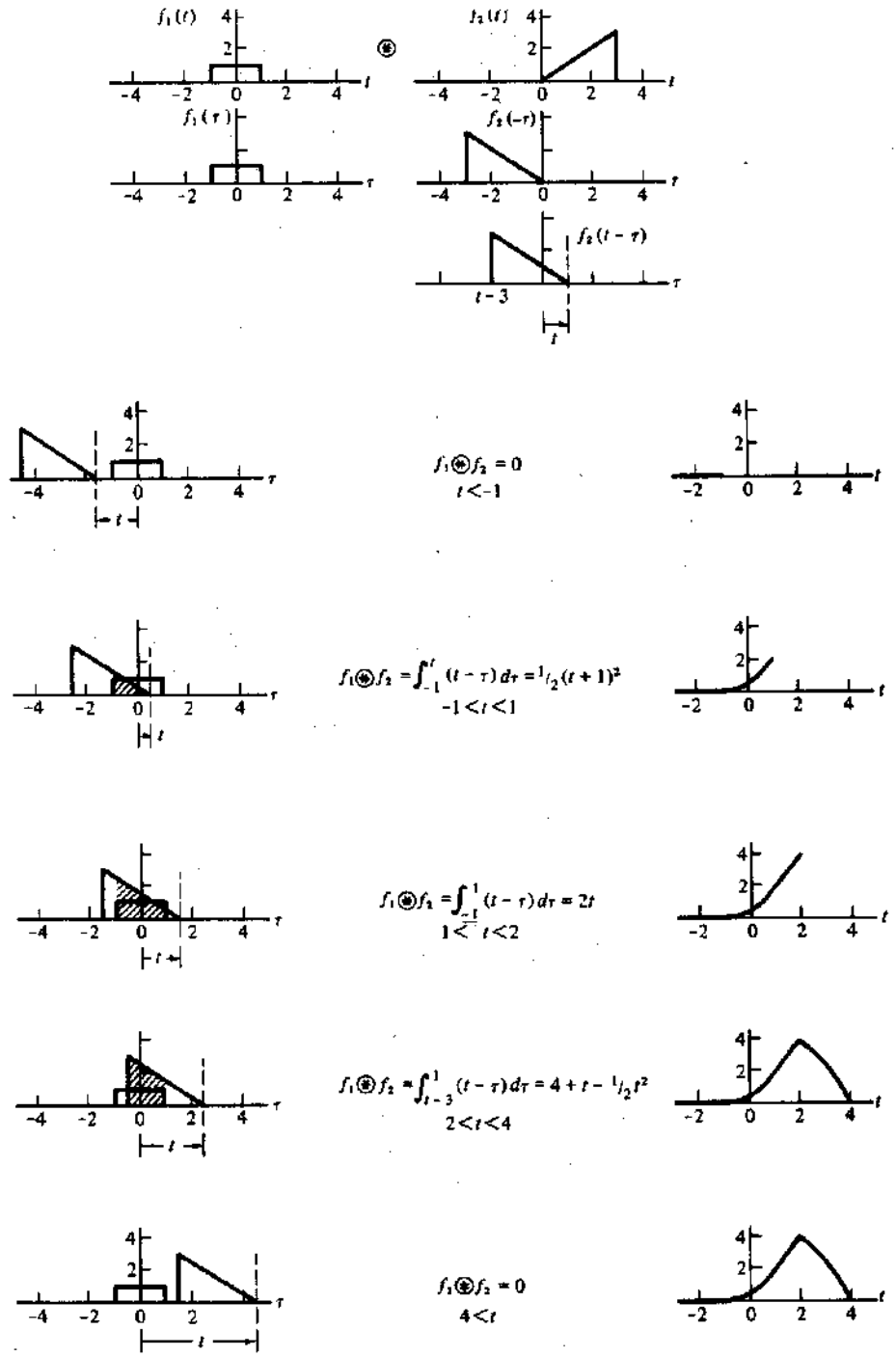


Figura 3.11 Convolución de un pulso rectangular y uno triangular.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Al sistema del ejercicio 2.19.1 se le aplica un grupo de cinco pulsos rectangulares estrechos, de amplitud A y espaciados por un intervalo T. Usando la convolución, determine la señal pico de salida (este tipo de sistema es útil en la detección de señales periódicas cuado sólo se conoce el periodo).

RESPUESTA: $A(1 + K + K^2 + K^3 + K^4)$.

El procedimiento de cálculo de la integral de convolución se programa fácilmente en un computador digital. Por tanto, si $f(t)$ y $g(t)$ son cero para $t < 0$, se puede escribir

$$f(t) \circledast g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)\,d\tau$$

$$\cong \alpha \sum_{m=1}^{n} f(m\alpha)g(n\alpha - m\alpha),$$

donde m y n son enteros. Otros casos se hacen en forma similar.

3.9 CARACTERÍSTICAS DE FILTRO DE LOS SISTEMAS LINEALES

La aplicación de una señal de entrada $f(t)$ a un sistema lineal invariable en el tiempo provoca una salida $g(t)$, como se muestra en la figura 3.12. Las densidades espectrales de la entrada y la salida están dadas, respectivamente, por $F(\omega)$ y $G(\omega)$. La respuesta a un impulso y la función de transferencia en frecuencia del sistema se designan por $h(t)$ y $H(\omega)$, respectivamente. La siguiente relación es válida:

$$g(t) = f(t) \circledast h(t), \tag{3.65a}$$

$$G(\omega) = F(\omega)H(\omega). \tag{3.65b}$$

Por tanto, la función de transferencia en frecuencia es la transformada de Fourier de la respuesta al impulso de un sistema lineal invariable en el tiempo. En el dominio del tiempo, el sistema modifica la forma de la señal de entrada. En frecuencia, modifica la densidad espectral de dicha señal. Estos efectos se relacionan por medio de la transformada de Fourier.

Un sistema lineal invariable en el tiempo actúa como filtro de las diferentes componentes de frecuencia aplicadas al sistema. Algunas componentes de frecuencia pueden

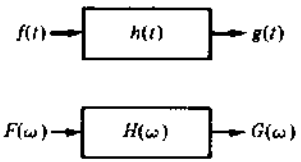


Figura 3.12 Representación de un sistema en el tiempo y en la frecuencia.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

amplificarse, otras atenuarse y otras más permanecer inalteradas. Cada componente se puede desfasar al pasar por el sistema. Reescribiendo la ecuación (3.65b) para separar estos dos efectos,

$$|G(\omega)|e^{j\theta_g(\omega)} = |F(\omega)|e^{j\theta_f(\omega)}|H(\omega)|e^{j\theta_h(\omega)},$$

$$|G(\omega)| = |F(\omega)|\,|H(\omega)|, \tag{3.66}$$

$$\theta_g(\omega) = \theta_f(\omega) + \theta_h(\omega). \tag{3.67}$$

En otras palabras, la magnitud de la respuesta está dada por el producto de la magnitud de la densidad espectral de la señal por la magnitud de la función de transferencia del sistema. La fase de la respuesta está dada por la suma de las fases individuales. Esto se puede extender al caso de varios sistemas conectados en cascada, siempre que cada sistema no altere la función de transferencia de ningún otro.

Determine la magnitud de la respuesta de un filtro pasabajas RC a un pulso cuadrado de amplitud unitaria y duración τ; suponga que $\tau = 4RC$.

Solución

$$|F(\omega)| = \tau\ \text{Sa}\ (\omega\tau/2),$$

$$|H(\omega)| = \left|\frac{1}{1 + j\omega RC}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau/4)^2}},$$

$$|G(\omega)| = |F(\omega)|\,|H(\omega)| = \frac{\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau/4)^2}}\left|\text{Sa}\ (\omega\tau/2)\right|.$$

Las gráficas de magnitud se muestran en la figura 3.13. Este sistema atenúa las altas frecuencias de la densidad espectral de la entrada y permite el paso de las frecuencias más bajas con relativamente poca atenuación. La transmisión desigual de todas las componentes produce una réplica algo distorsionada de la señal de entrada, como se ilustra en la figura 3.13(e).

Un sistema retarda la señal de entrada en t_0 unidades de tiempo y después resta la versión retardada de la señal original. Calcule la función de transferencia de este sistema.

RESPUESTA: $|H(\omega)| = 2\ \text{sen}\ (\omega t_0/2)$; $\theta(\omega) = \tan^{-1}[(\text{sen}\ \omega t_0)/(1 - \cos\ \omega t_0)]$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

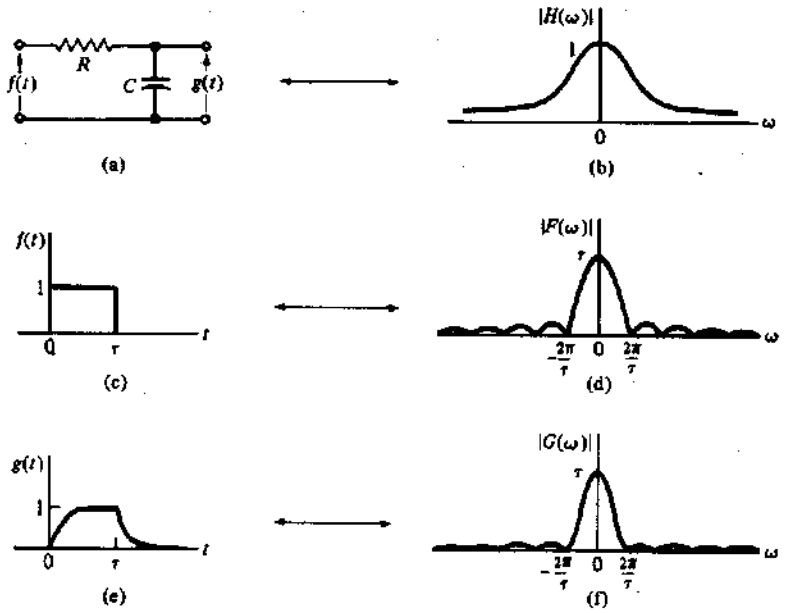


Figura 3.13 Magnitud de la respuesta de un filtro pasabajas.

3.10 FILTROS TRANSVERSALES

La síntesis de un sistema lineal invariable en el tiempo comprende el diseño de un sistema para obtener una respuesta al impulso y una función de transferencia en frecuencia dadas. Una forma de lograrlo para el caso general es observar que la respuesta al impulso de un sistema lineal invariable en el tiempo se puede aproximar por medio de una línea de retardo con derivaciones en varios puntos, ponderadas por un conjunto de factores de ganancia. Para ver esto, escribimos la integral de convolución para un sistema causal cuya respuesta al impulso es $h(t)$ y cuya señal de entrada $f(t)$ también es causal.

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f(t-\tau)h(\tau)\,d\tau\,. \tag{3.68}$$

La integración de la ecuación (3.68) se puede aproximar por medio de

$$g(t) \approx \sum_{k=0}^{t/\Delta\tau} f(t-k\,\Delta\tau)h(k\,\Delta\tau)\,\Delta\tau\,. \tag{3.69}$$

Este resultado se puede realizar utilizando una línea de retardo con derivaciones cada $k\,\Delta\tau$, la salida de cada derivación se multiplica por el factor prefijado $h(k\,\Delta\tau)\Delta\tau$. Este sistema se muestra en la figura 3.14.

Un filtro construido con una línea de retardo con derivaciones ponderadas y un sumador en la forma mostrada en la figura 3.14 se llama filtro *transversal*. Las

http://libreria-universitaria.blogspot.com

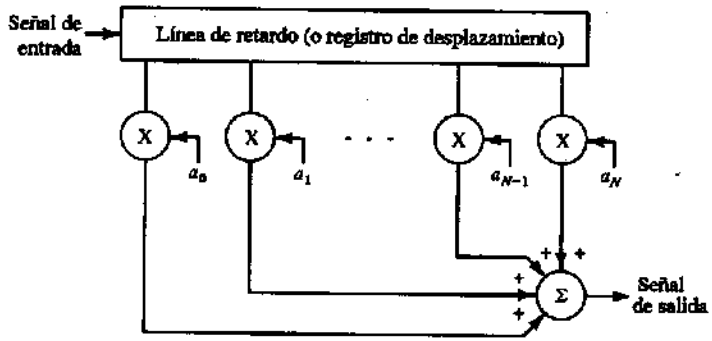


Figura 3.14 Filtro (transversal) de línea de retardo con derivaciones.

restricciones teóricas son más flexibles para un filtro transversal que para filtros amortiguados *RLC*, y su importancia va en aumento conforme se desarrollan métodos nuevos y más efectivos de realizarlos.

Se pueden usar tanto el método digital como el analógico en el diseño de filtros transversales. En la fabricación digital, el retardo se lleva a cabo con un registro de desplazamiento, y el incremento básico de retardo es igual al periodo del reloj. Se puede utilizar un computador para construir el filtro (en cuyo caso se denomina filtro digital). Otro método utilizado son los dispositivos de carga acoplada (CCD, *charge-coupled device*), que eliminan la necesidad de digitalizar la señal.

La realización del circuito básico del CCD es una línea de transistores de efecto de campo (FET, *field-effect transistors*) con sus drenajes y fuentes conectados en serie y los drenajes conectados por medio de capacitores a las compuertas. Esto se ilustra en la figura 3.15. Se utilizan dos líneas de reloj desfasadas para proporcionar señales de control a las compuertas, en forma alternada. El CCD toma una muestra de la señal de entrada y la almacena como carga en el primer capacitor. Esta carga pasa de etapa en etapa bajo el control de los pulsos de reloj que van encendiendo los FET de manera alternada. Esta acción transfiere la carga al siguiente capacitor hasta que, por último, la carga alcanza el final de la línea de FET. Se pueden ponderar y combinar las derivaciones en varios retardos para sintetizar el filtro transversal. Los CCD operan a frecuencias hasta de 10 MHz y se pueden producir grandes retardos (hasta de un segundo). Al CCD se le conoce, en ocasiones, como un dispositivo tipo "*bucket brigade*" (fila de personas que pasan una cubeta de agua de mano en mano para apagar un incendio).

Una manera común de sintetizar los filtros transversales usando métodos analógicos es la del filtro de onda acústica de superficie (SAW, *surface-acoustic-wave*). Como se

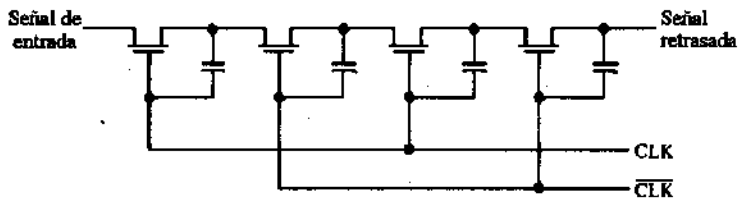


Figura 3.15 Línea de retardo con un dispositivo de carga acoplada (CCD).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

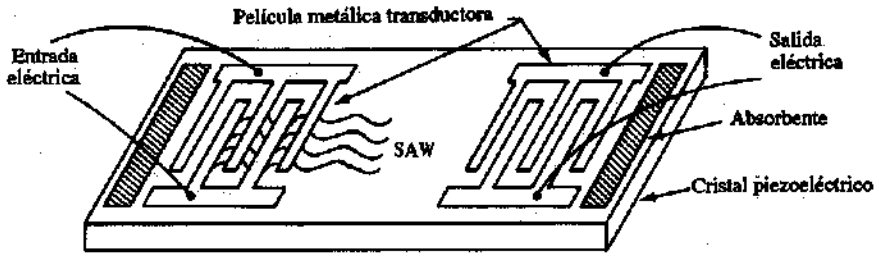


Figura 3.16 Dispositivo de onda acústica de superficie (SAW).

muestra en la figura 3.16, los componentes esenciales de un filtro transversal SAW son dos transductores colocados en extremos opuestos de un sustrato piezoeléctrico pulido. Cuando se aplica una señal eléctrica a la entrada del transductor, esta señal ocasiona una distorsión física de la superficie del transductor, creando ondas acústicas viajeras. Al llegar a la salida del transductor, la energía mecánica de estas ondas se transforma en una señal eléctrica en la salida. El sustrato puede ser cuarzo o niobato de litio, y la velocidad de propagación sobre el sustrato es de alrededor de 3000 m/s. El tamaño del sustrato, la conveniencia de fabricación y la atenuación acústica limitan las frecuencias de operación entre 2 MHz y 2 GHz. En general, las frecuencias de los dispositivos en producciones estándar van de 20 MHz a 500 MHz.

Cada transductor SAW es un conjunto de películas metálicas delgadas entrelazadas, como se muestra en la figura 3.16. El propósito del transductor no sólo es convertir señales de energía eléctrica a acústica sino también filtrarlas. La respuesta al impulso del transductor está ligada en forma directa a su geometría; la posición relativa de las películas determina la fase, y el traslapo entre películas adyacentes determina la ponderación de la amplitud.[†] Por tanto, la línea de retardo con derivaciones se construye con los espaciamientos entre las películas, y las ponderaciones, por el traslapo entre películas adyacentes. La función de transferencia total en frecuencia del filtro SAW está dada por el producto de la transformada de Fourier de la respuesta al impulso de cada transductor.

Los filtros SAW se usan ampliamente para aplicaciones en filtros de alta calidad. Por supuesto, una vez que el filtro SAW ha sido diseñado y construido, sus características no se pueden reajustar. La investigación y el desarrollo sobre otros métodos para construir filtros transversales aún continúa.

3.11 ANCHO DE BANDA DE UN SISTEMA

La permanencia de la magnitud de $|H(\omega)|$ en un sistema suele especificarse por medio de un parámetro llamado *ancho de banda*. El ancho de banda W de un sistema se define como el intervalo de frecuencias *positivas* en el que la magnitud de $|H(\omega)|$ se mantiene

[†] J.D. Maines y E.G.S. Paige, "Surface-Acoustic-Wave Devices for Signal Processing Applications", *Proceedings of the IEEE* [número especial acerca de dispositivos y aplicaciones de ondas acústicas de superficie], 64, mayo de 1976, págs. 639-671.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

dentro de determinado factor numérico.† Aunque el criterio exacto puede variar, un factor numérico usual es -3 dB (esto es, $1/\sqrt{2}$ en tensión o $\frac{1}{2}$ en potencia). Según este criterio, se habla del "ancho de banda de -3 dB" o del "ancho de banda de potencia media" del sistema.

De acuerdo con esta definición, el ancho de banda del sistema cuya gráfica de $|H(\omega)|$ se muestra en la figura 3.17(a) es $W = \omega_1$ radianes por segundo. El ancho de banda del sistema cuya gráfica de $|H(\omega)|$ se muestra en la figura 3.17(b) es $W = (\omega_2 - \omega_1)$ radianes por segundo.

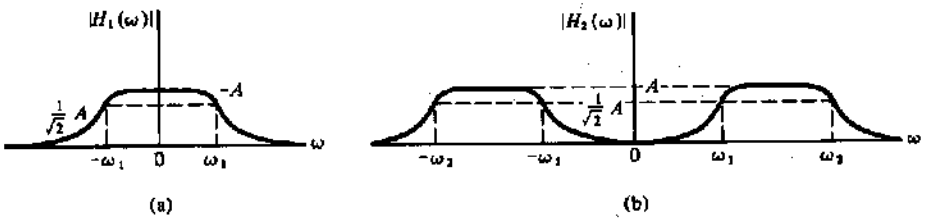


Figura 3.17 El ancho de banda de un sistema se mide en los puntos de -3 dB.

3.12 REQUISITOS PARA LA TRANSMISIÓN SIN DISTORSIÓN

En general, ¿qué requisitos se deben cumplir para que un sistema lineal invariable en el tiempo se comporte como un sistema de transmisión ideal? Para responder a esta pregunta, supongamos que se va a transmitir una señal dada $f(t)$ a través de dicho sistema e insistimos en que la señal resultante sea igual a la entrada. Permitimos que esta réplica tenga una magnitud diferente y algún retardo siempre que la forma quede inalterada. Por tanto, si la señal de entrada es $f(t)$, la salida deseada es

$$g(t) = Kf(t - t_0). \tag{3.70}$$

Si se toma la transformada de Fourier en ambos lados de la ecuación (3.70) y se utiliza la propiedad de desplazamiento en el tiempo, se obtiene

$$G(\omega) = Ke^{-j\omega t_0}F(\omega). \tag{3.71}$$

Comparando las ecuaciones (3.65b) y (3.71), se ve que para una transmisión sin distorsión es necesaria una función de transferencia del sistema:

$$H(\omega) = Ke^{-j\omega t_0}. \tag{3.72}$$

Por tanto, para obtener una transmisión sin distorsión, la respuesta global del sistema debe tener una magnitud constante y su desplazamiento de fase debe ser lineal en

† Las unidades de frecuencia se pueden expresar como radianes por segundo o como ciclos por segundo (Hz). En lo posible, se usará W para frecuencia en radianes y B para frecuencia en Hz (o sea, $W = 2\pi B$). La utilización del decibel (dB) se revisa en el apéndice B.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

frecuencia. No es suficiente que el sistema atenúe (o amplifique) por igual todas las componentes de frecuencia. Éstas también deben llegar con el mismo retardo para que se sumen correctamente. Esto demanda un desplazamiento de fase que sea proporcional a la frecuencia.[1] Nótese que se puede incluir un factor $e^{j2\pi n}$, para toda n entera, en la ecuación (3.71) sin ningún efecto neto.

En la práctica, una señal se puede distorsionar al pasar por ciertas partes del sistema. Se pueden introducir redes de corrección de amplitud o fase (igualación) en cualquier parte del sistema para corregir esta distorsión. La característica global de entrada y salida del sistema es lo que determina su comportamiento.

3.13 RESPUESTA DE LOS FILTROS EN EL TIEMPO

Debido a limitaciones físicas, no se puede construir un sistema con un ancho de banda infinito. A pesar de esta dificultad, las ideas desarrolladas para la transmisión sin distorsión son muy útiles para entender los filtros. Como una aproximación, se elegirá un sistema truncado de transmisión sin distorsión y se le llamará filtro ideal. De manera más específica, un filtro ideal deja pasar sin distorsión todas las componentes de frecuencia entre la frecuencia baja de corte, que se llamará ω_ℓ, y la frecuencia superior de corte, ω_u. Fuera de este intervalo, se supone que el filtro ideal tiene una respuesta en magnitud nula. El intervalo de frecuencia definido por $\omega_\ell < |\omega| < \omega_u$ se llama "banda de paso" del filtro. El ancho efectivo de la banda de paso se especifica por el ancho de banda $W = (\omega_u - \omega_\ell)$ radianes por segundo (el ancho de banda en Hz es designado por B, donde $W = 2\pi B$). Al filtro ideal se le permite un factor de ganancia K y un retardo t_0 dentro de la banda de paso.

El filtro ideal descrito antes se denomina filtro pasabanda ideal (BPF, *bandpass filter*). El filtro pasabajas ideal (LPF, *low-pass filter*) tiene una $\omega_\ell = 0$ y una $\omega_u = W$. El

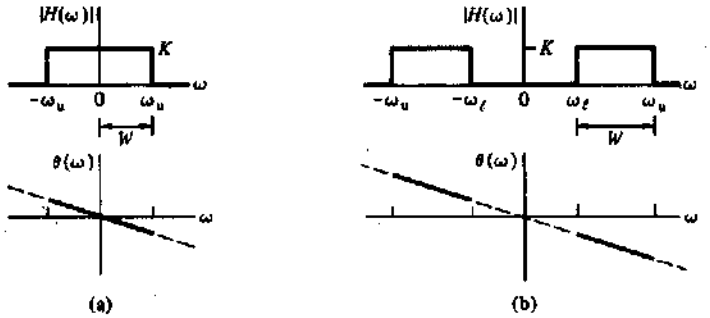


Figura 3.18 Filtro ideal: (a) pasabajas; (b) pasabanda.

[1] Para una frecuencia fija, el desplazamiento de fase es proporcional al retardo. Por tanto, el deplazamiento de fase debe variar en forma lineal con la frecuencia para proporcionar un retardo fijo.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

filtro pasaaltas ideal (HPF, *high-pass filter*) tiene una $\omega_0 \to \infty$. El aspecto de los filtros pasabajas y pasabanda ideales se muestra en la figura 3.18.

Ahora se verá con algún detalle el filtro pasabajas ideal. Haciendo que, por conveniencia, la constante de atenuación K valga uno, la función de transferencia de este filtro es

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta(\omega)} = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right)e^{-j\omega t_0}. \tag{3.73}$$

La respuesta al impulso $h(t)$ del filtro pasabajas ideal es (usando el par transformado número 15 de la tabla 3.1 y la propiedad de desplazamiento en tiempo)

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{W}{\pi}\,\text{Sa}\,[W(t - t_0)]. \tag{3.74}$$

Esta respuesta al impulso se muestra en la figura 3.19. De esta gráfica, se observa que el ancho de la respuesta al impulso y el ancho de banda están inversamente relacionados (a consecuencia de la propiedad de escala de la transformada de Fourier). Nótese también que la respuesta del filtro pasabajas aparece en $t < 0$, lo que indica que el filtro pasabajas no es causal (físicamente realizable). Un razonamiento similar muestra que filtro pasabanda ideal tampoco es causal.

¿Por qué los filtros ideales no son causales? Tienen anchos de banda finitos y características de fase lineales. El problema del filtro ideal radica más en la pérdida infinita fuera de la banda libre que en la pendiente infinita del corte, aunque esto también es imposible en la práctica.[†] Por supuesto, el corte súbito y la pérdida infinita fuera de la banda libre es lo que hace tan deseable al filtro ideal. Por tanto, a menudo intentamos

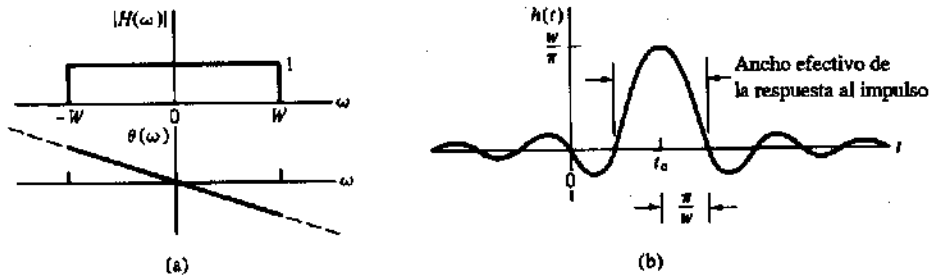


Figura 3.19 Filtro pasabajas ideal: (a) su función de transferencia y (b) su respuesta al impulso.

[†] Se puede demostrar que, para toda $H(\omega)$ que satisfaga $\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2\,d\omega < \infty$, una condición necesaria y suficiente en el espectro de magnitud, para que un filtro sea físicamente realizable, es que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\ln |H(\omega)|}{1 + \omega^2}\right| d\omega < \infty.$$

Esto se conoce como criterio de Paley-Wiener. De este resultado se puede concluir que, para un filtro realizable, la magnitud de $H(\omega)$ no debe decaer a cero con mayor rapidez que una exponencial de orden simple (p. ej., $e^{-k|\omega|}$, pero no como $e^{-k\omega^2}$) y la atenuación puede no ser infinita en cualquier banda de frecuencias de ancho distinto de cero.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

construir filtros realizables cuyas características se aproximen lo más posible a las del filtro ideal. Una medida —llamada "factor de forma"— de cuán bien puede lograrse esto es la razón entre los anchos de banda del filtro a -60 dB y -6 dB. Puede hacerse un filtro pasabanda de corte empinado con un factor de forma que baje hasta 2; por el contrario, el factor de forma de un simple filtro pasabajas *RC* es de ¡casi 600!

Los conceptos de función impulso y respuesta al impulso pueden evaluarse en forma analítica, pero una prueba más práctica del sistema consiste en aplicar un escalón unitario a su entrada y observar su respuesta. Con los resultados anteriores, la respuesta a un escalón se obtiene de la propiedad de convolución:

$$\begin{aligned} g(t) &= h(t) \circledast u(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)\,d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau . \end{aligned} \tag{3.75}$$

Por tanto, la respuesta a un escalón de un sistema lineal invariable en el tiempo es la integral indefinida de su respuesta al impulso. Combinando las ecuaciones (3.74) y (3.75), se tiene

$$g(t) = \frac{W}{\pi}\int_{-\infty}^{t} \text{Sa}\,[W(\tau - t_0)]\,d\tau .$$

Haciendo un cambio de variable, sea $x = W(\tau - t_0)$ de manera que

$$g(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{W(t-t_0)} \text{Sa}\,(x)\,dx .$$

Usando el hecho de que $\int_{-\infty}^{0} \text{Sa}\,(x)\,dx = \pi/2$, se tiene

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{W(t-t_0)} \text{Sa}\,(x)\,dx . \tag{3.76}$$

La integral de la ecuación (3.76) aparece con frecuencia en problemas anlíticos y está tabulada en tablas numéricas estándar o se calcula en forma sencilla utilizando integración numérica. Se llama "integral del seno", se denota con Si (x) y se define como

$$\text{Si}\,(x) \triangleq \int_{0}^{x} \text{Sa}\,(u)\,du . \tag{3.77}$$

La integral del seno tiene simetría impar alrededor de $x = 0$, es lineal para x pequeñas y se aproxima a $\pi/2$ para x grandes.

Usando la notación de la integral del seno, la respuesta a un escalón del filtro pasabajas ideal es

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\text{Si}\,[W(t - t_0)] . \tag{3.78}$$

En la figura 3.20 se muestran las respuestas de un filtro pasabajas a un impulso y a un escalón.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

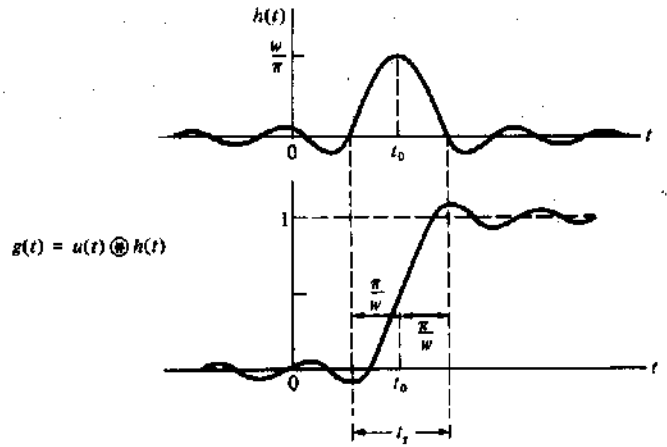


Figura 3.20 Respuesta a un escalón unitario de un filtro pasabajas ideal.

Se pueden hacer varias observaciones importantes a partir de la figura 3.20. Nótese que a medida que disminuye el ancho de banda W, la salida del filtro $g(t)$ alcanza en forma más lenta su valor final. Una medida de esto es el "tiempo de elevación" del filtro. Se puede concluir, pues, que el tiempo de elevación t_r de un filtro es inversamente proporcional a su ancho de banda. La medida exacta del tiempo de elevación dependerá, por supuesto, de la definición particular que se elija. Para circuitos de pulso, una medida conveniente de t_r es el tiempo necesario para que la onda de salida se eleve del 10% al 90% de su valor final. Para el filtro pasabajas anterior, esto da $t_r \approx 0.44/B$, con $B = W/2\pi$. Para el filtro pasabajas, una elección adecuada es el tiempo necesario para que la onda de salida pase del valor mínimo al máximo. Con base en la figura 3.20, esto da $t_r = 1/B$. Se pueden elegir otros criterios, pero la conclusión es siempre la misma: el tiempo de elevación es inversamente proporcional al ancho de banda del filtro.

Una aproximación práctica para filtros pasabajas de un orden mayor que el segundo es

$$t_r \approx 1/(2B)\,, \tag{3.79}$$

donde t_r es el tiempo de elevación en segundos del 10% al 90% y B es el ancho de banda a −3 dB en Hz. Como ésta es una aproximación utilizada con frecuencia para aplicaciones de filtrado en los sistemas de comunicación, en capítulos posteriores se usará esta aproximación.

Otra conclusión importante que se puede sacar de la figura 3.20 es que el tiempo de elevación es una medida del ancho efectivo de la respuesta al impulso del sistema. Recuérdese que la respuesta al impulso es la derivada de la respuesta al escalón. La relación inversa entre el tiempo de elevación y el ancho de banda es un ejemplo de la propiedad de espaciamiento recíproco de la transformada de Fourier. Por tanto, constituye una propiedad general y no está necesariamente limitada al ejemplo anterior.

Antes de dejar este análisis, se hará un planteamiento de orden general. Ninguna señal de banda limitada estricta puede estar limitada de manera estricta en el tiempo, y

http://libreria-universitaria.blogspot.com

viceversa. Se puede ver que esto es cierto para las señales y sistemas de tipo rectangular que se han venido tratando. Que esto es cierto en general escapa al propósito de este libro.

El concepto de ancho efectivo de la respuesta al impulso se relaciona en forma directa con el de la respuesta de un sistema lineal invariable en el tiempo del análisis anterior. Sin embargo, las ideas básicas subyacentes son las de la teoría de la transformada de Fourier y no se limitan a los sistemas ni a las respuestas de los sistemas. Se pretende ampliar estos conceptos también al ancho efectivo de las señales. A este ancho efectivo se le llama *duración temporal*, T_d. Si para definir T_d se usara la misma definición que se usó para el ancho de elevación, se diría que es el tiempo durante el cual una señal dada tiene el 80% central de su área bajo la gráfica de una señal en función del tiempo. El ancho de banda B de la señal se puede definir de la misma forma que la banda de -3 dB definida antes para los sistemas. Sin embargo, también se podrían utilizar otras definiciones y, en la sección siguiente, se presentan definiciones analíticas más generales.

Un parámetro adimensional importante en el análisis de señales es el producto *tiempo (duración) por ancho de banda*, T_dB. Una razón de su importancia es que este producto tiene una cota inferior pero no está limitado por una cota superior. En consecuencia, el producto tiempo por ancho de banda se puede aumentar de manera intencional para una señal dada, y los sistemas concebidos con este propósito se llaman sistemas de "espectro expandido". Como el ancho de banda no depende de la fase, un método para obtener esta dispersión espectral es hacer alteraciones a la fase de la señal para aumentar el producto tiempo por ancho de banda. Otra razón de su importancia es que el producto tiempo por ancho de banda es un parámetro útil para especificar algunos sistemas de procesamiento de señales, en particular los que utilizan dispositivos de retardo y los concebidos para aplicaciones de espectro expandido.

Empleando el criterio del tiempo de elevación del 10% al 90%, compare el tiempo de elevación y el ancho de banda en -3 dB del filtro pasabajas RC (véase Ej. 2.12.1).

RESPUESTA: $t_r = 0.35/B$.

3.14 ★ PRODUCTO TIEMPO POR ANCHO DE BANDA MÍNIMO

La investigación de un producto tiempo por ancho de banda mínimo requiere algunas definiciones nuevas de duración y ancho de banda que son más fáciles de manejar en forma analítica. Estas cantidades se vulevan a definir en términos de una definición de "radio de giro", llamada así por su analogía con la definición de momento de inercia con respecto al centro de masa, usada en mecánica. Con este enfoque, se define la duración T_d de una señal dada $f(t)$ como

$$T_d^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |f(t)|^2 \, dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt}, \tag{3.80}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

donde t_0 es el retardo de $f(t)$. Así mismo, el ancho de banda del "radio de giro" W se puede hallar de

$$W^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |F(\omega)|^2 \, d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega}, \tag{3.81}$$

donde ω_0 es la frecuencia central. Se pueden obtener fórmulas explícitas de t_0 y ω_0 minimizando las ecuaciones (3.80) y (3.81). Sin embargo, como $|F(\omega)|^2$ es independiente del retardo y $|f(t)|^2$ es independiente de la frecuencia central, en el siguiente análisis hemos prescindido tanto de t_0 como de ω_0.

De las ecuaciones (3.80) y (3.81), y haciendo t_0 y ω_0 iguales a cero, el producto tiempo por ancho de banda (al cuadrado) es

$$(T_d W)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 \, dt \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 \, d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega}. \tag{3.82}$$

Usando el teorema de Parseval (véase Ec. 3.21) y poniendo un punto sobre la función para denotar la derivada, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{f}(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 \, d\omega,$$

y la ecuación (3.82) se convierte en

$$(T_d W)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 \, dt \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{f}(t)|^2 \, dt}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt\right]^2}. \tag{3.83}$$

Fijando la energía de la señal, se fija el término del denominador de la ecuación (3.83). Usando la desigualdad de Schwartz (véase Ejer. 2.5.2) en el numerador, se tiene

$$(T_d W)^2 \geq \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} t f(t) \dot{f}(t)^* \, dt\right|^2}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt\right]^2}. \tag{3.84}$$

Integrando por partes y recordando que $f(t) \to 0$ cuando $t \to \pm\infty$, el numerador de la ecuación (3.84) es

$$\left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt\right]^2,$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

y la ecuación (3.84) se convierte en

$$(T_d W)^2 \geq \tfrac{1}{4}.$$

Por tanto, el producto tiempo por ancho de banda mínimo, según las anteriores definiciones de T_d y W, está dado por

$$T_d W \geq \tfrac{1}{2}. \tag{3.85}$$

EJEMPLO 3.14.1

Halle el producto tiempo por ancho de banda de la señal pulso gaussiano: $f(t) = \exp[-t^2/(2\sigma^2)]$.

Solución De las ecuaciones (3.80) y (3.81) del apéndice A, y haciendo t_0 y ω_0 iguales a cero, se tiene

$$T_d^2 = \frac{\int_0^\infty t^2 e^{-t^2/\sigma^2}\,dt}{\int_0^\infty e^{-t^2/\sigma^2}\,dt} = \frac{\sigma^2}{2},$$

y

$$W^2 = \frac{\int_0^\infty \omega^2 e^{-\sigma^2\omega^2}\,d\omega}{\int_0^\infty e^{-\sigma^2\omega^2}\,d\omega} = \frac{1}{2\sigma^2}.$$

Por tanto, para este ejemplo tenemos

$$T_d W = \tfrac{1}{2},$$

y concluimos que la señal pulso gaussiano es aquella que presenta un producto tiempo por ancho de banda mínimo.

3.15 TEOREMA DEL MUESTREO

Las señales que portan información deben ser asequibles, ya sea en forma analógica o en forma digital o discreta. Habría que determinar qué condiciones son necesarias para convertir una señal analógica en discreta, o viceversa, sin perder información. Como un criterio para conseguir esto, debe insistirse en que es posible reconstruir en su totalidad la señal original por medio de filtros.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

El enlace entre la señal analógica y la señal discreta correspondiente es proporcionado por lo que se conoce como *teorema del muestreo*. Este teorema se puede enunciar en forma simple como:

> Una señal de banda limitada de valor real sin componentes espectrales por encima de una frecuencia de B Hz, se determina en forma unívoca por sus valores equidistantes en intervalos no mayores que $1/(2B)$ segundos.†

Ésta es una condición suficiente para que una señal analógica pueda ser totalmente reconstruida a partir de un conjunto de muestras discretas equidistantes en el tiempo.

La validez del teorema del muestreo se puede demostrar por medio de la propiedad de modulación o de la propiedad de convolución en frecuencia de la transformada de Fourier. Sea una señal de banda limitada $f(t)$ que no tiene componentes espectrales por encima de B Hz. A esta señal se le tomarán muestras usando la función pulso cuadrado periódico. Cada pulso rectangular de muestra tiene amplitud unitaria y τ segundos de ancho, y ocurre en intervalos de T segundos.

Denotando la señal muestreada por $f_s(t)$ y la función pulso cuadrado periódico por $p_T(t)$, se puede escribir

$$f_s(t) = f(t)p_T(t)\,. \tag{3.86}$$

Sin embargo, como $p_T(t)$ es periódica, se puede representar por medio de una serie de Fourier

$$p_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\omega_0 t}, \tag{3.87}$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$. Combinando las ecuaciones (3.86) y (3.87), se tiene

$$f_s(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\omega_0 t} \tag{3.88}$$

Si se transforman ambos lados de la ecuación (3.88) y se intercambia el orden, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f_s(t)\} &= \mathcal{F}\left\{f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\omega_0 t}\right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \mathcal{F}\{f(t)e^{jn\omega_0 t}\}\,. \end{aligned} \tag{3.89}$$

Usando la propiedad de traslación de frecuencias de la transformada de Fourier en la ecuación (3.89), la densidad espectral de $f_s(t)$, designada por $F_s(\omega)$, es

$$\begin{aligned} F_s(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n F(\omega - n\omega_0) \\ &= P_0 F(\omega) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} P_n F(\omega - n\omega_0)\,. \end{aligned} \tag{3.90}$$

† Este enunciado se conoce como "teorema del muestreo uniforme". Los requisitos de espaciado uniforme se pueden hacer algo flexibles, aunque las conclusiones generales no cambian. Véase, por ejemplo, el capítulo 4 de la referencia 7.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Por tanto, se concluye que la densidad espectral (transformada de Fourier) de la señal muestreada $f_s(t)$ es, excepto por un factor constante, exactamente igual a la de $f(t)$ dentro del ancho de banda original. Además, se repite a sí misma de manera periódica en la frecuencia cada ω_0 radianes por segundo. Estas réplicas de la densidad espectral original están ponderadas por las amplitudes de los coeficientes de la serie de Fourier de la señal muestreada, como se muestra en la figura 3.21. Nótese que la densidad espectral de la función original $f(t)$ se puede recuperar en forma simple utilizando un filtro pasabajas en $F_s(\omega)$.

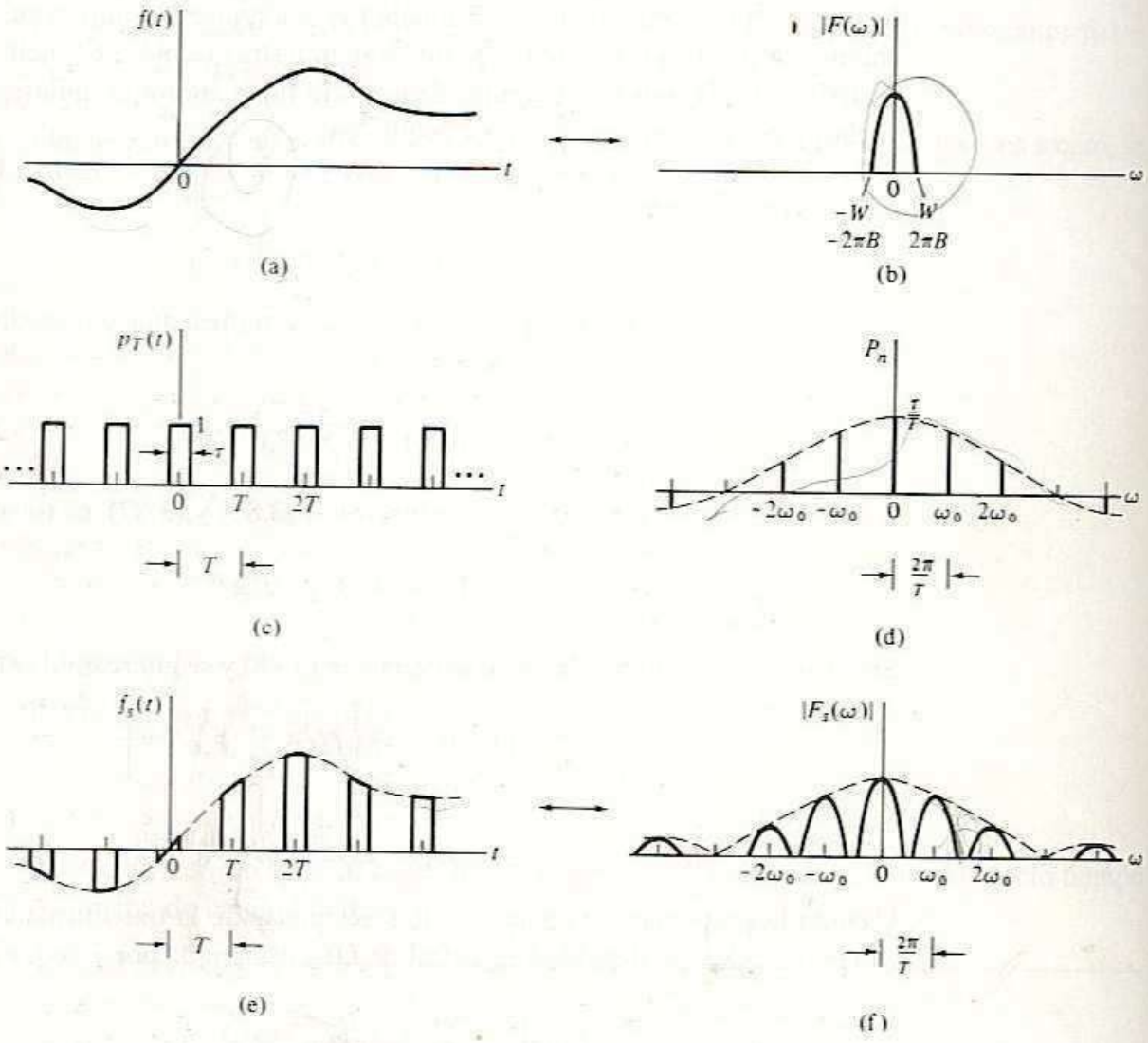


Figura 3.21 Etapas en el muestreo de una señal de banda limitada.

Veamos qué sucede con un cambio en la tasa de muestreo. Para un aumento en la rapidez de muestreo, ω_0 aumenta, T disminuye y todas las réplicas de $F(\omega)$ se separan entre sí. Por otra parte, conforme se reduce la tasa de muestreo, ω_0 disminuye, T aumenta y todas las réplicas se acercan, hasta que se alcanza un punto más allá del cual una

http://libreria-universitaria.blogspot.com

reducción en la tasa de muestreo provocará un traslapo entre las densidades espectrales. De la figura 3.21(f) se puede ver que este punto se alcanza cuando

$$\frac{2\pi}{T} = 2W,$$

o, ya que $W = 2\pi B$,

$$T = \frac{1}{2B}. \tag{3.91}$$

En el punto dado por la ecuación (3.91), todas las réplicas de la densidad espectral son tangenciales entre sí y se puede utilizar un filtro pasabajas ideal para recuperar la original de la señal muestreada. Sin embargo, si el intervalo de muestreo T se vuelve un poco mayor que el dado por la ecuación (3.91), existe un traslapo entre las densidades espectrales y la señal original no se puede recuperar por filtrado de la señal muestreada. Para evitar este caso, insistimos en que

$$T < \frac{1}{2B}. \tag{3.92}$$

La ecuación (3.92) es una expresión matemática concisa del teorema del muestreo. El intervalo máximo de muestreo T, dado por la ecuación (3.91), se llama *intervalo de Nyquist*; el inverso se denomina *frecuencia (tasa) de muestreo de Nyquist*.

En la práctica, no se puede alcanzar el potencial total del teorema del muestreo y las expresiones anteriores sirven como topes superiores del desempeño real. El primer compromiso que se debe enfrentar es que no se pueden construir filtros pasabajas ideales. Si la característica del filtro tiene una pendiente finita en los bordes, las componentes de frecuencia de las réplicas espectrales se pueden transmitir a través del filtro aunque se satisfaga la ecuación (3.92). Esta frecuencias espurias se pueden suprimir diseñando filtros con una tasa de atenuación lo más rápida posible y aumentando luego la tasa de muestreo para tener algún espacio de frecuencia antes de que aparezca la siguiente réplica. Por esta razón, en los sistemas prácticos se sobremuestrea.

Una segunda razón por la que no se puede alcanzar el potencial máximo del teorema del muestreo viene del hecho de que una señal limitada en el tiempo nunca es estrictamente de banda limitada. Cuando dicha señal se muestrea, siempre existirá un inevitable traslapo de componentes espectrales. Al reconstruir la señal, las componentes de frecuencia originales localizadas por encima de la mitad de la frecuencia de muestreo aparecerán por debajo de este punto y serán transmitidas por el filtro pasabajas. Esto se conoce como *alias* y el resultado es la distorsión de la señal. Los efectos del alias se pueden combatir haciendo una labor de filtrado (es decir, limitación de banda) tan buena como sea posible *antes* del muestreo y tomando muestras a tasas mayores que la tasa de Nyquist. Esto se analiza en la siguiente sección.

Hasta este punto de nuestro análisis del muestreo, se ha supuesto que todas las señales consideradas eran pasabajas. Sin embargo, muchas señales de importancia son pasabanda. ¿Nos dice el teorema del muestreo que una señal pasabanda se debe muestrear al doble de la frecuencia más alta?

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La respuesta a la pregunta es no, porque la tasa de muestreo mínima depende principalmente del ancho de banda de la señal limitada en banda más que de su frecuencia más alta. Para el caso pasabajas, por supuesto, las dos condiciones coinciden. Al muestrear una señal pasabanda, se pueden colocar todas las réplicas espectrales posibles entre las densidades espectrales originales, haciendo por tanto un uso más eficiente del espacio espectral. Para un ancho de banda dado, este requisito de tasa mínima para una señal pasabanda se aproxima al límite de dos veces el ancho de banda conforme aumenta la frecuencia central de la señal.† Esto se ilustra en la figura 3.22. Se supondrá que, a menos que se especifique otra cosa, la tasa de muestreo mínima para una señal pasabanda es el doble del ancho de banda de la señal.

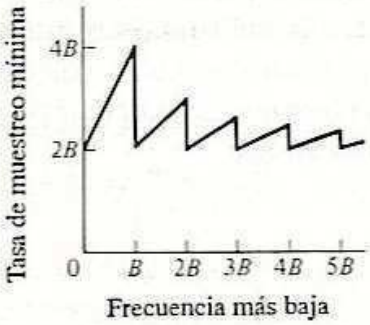


Figura 3.22 Tasa de muestreo periódico mínima para una señal con ancho de banda B Hz.

Una reconsideración de la figura 3.21 revela que para el caso de una señal de valor complejo con densidad espectral *unilateral* es necesario muestrear a una tasa mínima igual a la frecuencia más alta, no el doble de la máxima frecuencia que para el caso de señales de valor real [y dadas como en la ecuación (3.92)]. Los principios básicos ilustrados en la figura 3.21 permanencen iguales, pero no se puede sacar una conclusión rápida con base en la ecuación (3.92). Por supuesto, en la realidad el número total de muestras permanece igual para ambos casos porque cada muestra de una señal de valor complejo es un par ordenado (esto es, una parte real y una imaginaria). El muestreo para el caso de una densidad espectral unilateral se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.15.1

Es posible reconstruir una función a partir de una de las réplicas espectrales después del muestreo. Un dispositivo de muestreo común que hace uso de este principio es el *estroboscopio*. Éste es una fuente de luz que se pulsa en forma periódica. En un estudio del movimiento rotatorio, la tasa de repetición de la luz se ajusta en forma tal que el movimiento rotatorio aparece sin movimiento. El ojo, actuando como un filtro pasabajas, reconstruye una frecuencia baja "alias" a partir de la señal pasabanda muestreada.

† Véase, por ejemplo, W.W. Harman, *Principles of the Statistical Theory of Communication*, Nueva York, McGraw-Hill, 1963, Cap. 2.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Por ejemplo, supóngase que se observa una diligencia tirada por caballos en una película del lejano Oeste. La diligencia está a punto de ser alcanzada por los bandidos, ¡*pero parece que las ruedas no giran*! Si cada rueda tiene 4 pies de diámetro y 12 radios idénticos, ¿cuál es la mínima velocidad de la diligencia? La rapidez de la película es de 24 cuadros por segundo.

Solución La frecuencia de muestreo mínima necesaria de los radios es de $\frac{24}{12} = 2$ Hz.

$$v = r\omega = (2)(4\pi) = 8\pi \text{ ft/sec} \approx 17 \text{ mph}.$$

Nótese que las velocidades ligeramente menores que ésta harán que las ruedas aparezcan girando *hacia atrás*. Aquí los alias tienen una correspondencia uno a uno con los fasores rotatorios analizados en el capítulo 2 (dibuje el espectro de la señal muestreada para convencerse).

EJERCICIO 3.15.1

Empezando con la ecuación (3.86), derive el teorema del muestreo utilizando la propiedad de convolución en frecuencia de la transformada de Fourier.

3.16 ★ EFECTOS ALIAS EN EL MUESTREO

Se ha visto que el muestreo de datos introduce réplicas espectrales alrededor de múltiplos de la frecuencia de muestreo, y que la banda de frecuencias para mediciones espectrales se debe limitar a un medio de la tasa de muestreo. Regresemos ahora al tema del alias que se analizó de manera breve en el capítulo 2.

Cuando una función $f(t)$ continua se representa por medio de M muestras espaciadas de manera uniforme, se presentan réplicas de la densidad espectral de $f(t)$, espaciadas a múltiplos de M unidades de frecuencia. La magnitud comparativa de cada réplica espectral depende de la forma del pulso de muestreo y la de tasa de muestreo. Si las formas de los pulsos de muestreo son impulsos, todas las réplicas espectrales tendrán área o peso igual (véase Problema 2.18.1). Aquí se supondrá muestreo por impulsos por conveniencia y porque es apropiado para la aplicación de técnicas digitales en el cálculo. De acuerdo con el teorema del muestreo, la medida o cálculo del contenido espectral se restringe al intervalo $0 - M/2$. Sin embargo, la existencia de componentes de frecuencia en las réplicas espectrales podría caer dentro del intervalo de medidas, provocando errores.

Estos efectos se analizan considerando la densidad espectral de cierta función $f(t)$, como se muestra en la figura 3.23(a). Si la señal $f(t)$ se muestrea utilizando M puntos o muestras impulsivas, la densidad espectral resultante es periódica en frecuencia, repitiéndose en intervalos de M, como se ve en la figura 3.23(b). Nuestro intervalo de medición se restringe a $M/2$, pero se ve que las componentes de frecuencia medidas

http://libreria-universitaria.blogspot.com

incluyen porciones de las réplicas espectrales. Este efecto, que se conoce como alias, se muestra con el área sombreada en la figura 3.23(b) (dicho efecto también se conoce con el término descriptivo de *doblaje*). Nótese que para una densidad espectral dada, los efectos alias disminuyen si las réplicas espectrales se separan entre sí y si las componentes espectrales disminuyen con mayor rapidez para frecuencias superiores a $M/2$. Lo primero se puede controlar por medio de la tasa de muestreo; lo último, a través de un filtro que atenúe aquellas componentes de frecuencia que se encuentren fuera de la banda de interés. Los filtros que se utilizan con este propósito se llaman filtros *prealias*.

Los conceptos anteriores se pueden extender fácilmente a las series de Fourier. Los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se relacionan en forma directa con la transformada de Fourier [véase Ec. (3.15)] y la densidad espectral continua se convierte en un espectro de línea, como se muestra en la figura 3.23(c).

Estimemos ahora la exactitud de los coeficientes medidos en la serie de Fourier exponencial. Usando las ecuaciones (2.87), (2.88) y (2.93) se puede escribir

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt, \\ F_n &\cong \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} f(mT/M)[\cos(2\pi mn/M) - j\,\text{sen}\,(2\pi mn/M)] \\ &= \frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2}. \end{aligned} \tag{3.93}$$

Designando los valores verdaderos de los coeficientes de la serie exponencial de Fourier por F'_n y refiriéndose a la figura 3.23(c), se puede escribir una expresión para los coeficientes de Fourier medidos dentro del intervalo de frecuencias $-M/2 \le n \le M/2$ como

$$F_n = F'_n + F'_{n-M} + F'_{n-2M} + F'_{n-3M} + \cdots + F'_{n+M} + F'_{n+2M} + F'_{n+3M} \cdots . \tag{3.94}$$

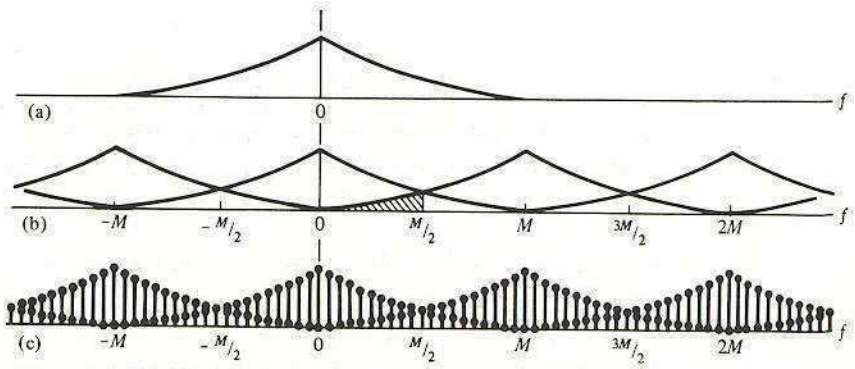


Figura 3.23 (a) Una densidad espectral dada; (b) efectos alias para espectros continuos, y (c) espectros de línea.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Sin embargo, para $f(t)$ con valor real también se puede escribir [véase Ec. (2.46)] $F_{-n} = F_n^*$ de manera que la ecuación (3.94) se vuelve

$$F_n = F'_n + \sum_{k=1}^{\infty} [F'_{kM+n} + (F'_{kM-n})^*] . \tag{3.95}$$

Nótese que los términos alias se han agrupado en el segundo término de la ecuación (3.95).

La ecuación (3.95) proporciona el valor medido (es decir, calculado) de los coeficientes de una serie de Fourier dada en términos del valor verdadero y los términos alias. Usando la ecuación (3.93) en la (3.95), se puede obtener un conjunto similar de relaciones de los efectos alias para la serie trigonométrica [véanse Ecs. (2.91) y (2.92)].

Los efectos alias en la señal reconstruida que representa a $f(t)$ dependen de las relaciones de fase así como de la magnitud y son difíciles de predecir con exactitud. Para generalizar el método, se usará un criterio de energía que descarta a la fase. Para obtener una medida simplificada del alias con base en la energía, se supone que (1) sólo la primera réplica espectral proporciona componentes alias, y que (2) los efectos alias son proporcionales a las componentes espectrales ponderadas por su distancia en frecuencia desde del origen (esto da énfasis a los efectos cerca de $M/2$). Poniendo esto en forma de ecuación, sean F_n los coeficientes de la serie de Fourier exponencial en la entrada de un filtro prealias cuya función de transferencia en magnitud es $|H(\omega)|$. Por tanto $|G_n| = |F_n|\,|H(n\omega_0)|$ y se define el porcentaje de alias como

$$\% \text{ de alias} \triangleq \frac{\sum_{n=1}^{M/2} (n - M/2)^2 |G_{n+M/2}|^2}{\sum_{n=1}^{M/2} n^2 |G_n|^2} \times 100\% . \tag{3.96}$$

A pesar de que estos cálculos no toman en cuenta las relaciones de fase, son bastante confiables en una base comparativa y resultan fáciles de calcular. En el siguiente ejemplo se muestra una aplicación de este resultado.

EJEMPLO 3.16.1

Se aplica una señal cuadrada a un filtro prealias cuya función de transferencia en magnitud es $|H(\omega)| = 1/\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^{2k}}$ y luego se muestrea a una tasa de 20 muestras por periodo. (a) Calcule el porcentaje de alias si no se utiliza el filtro prealias. (b) Calcule el porcentaje de alias para $k = 1, 2, \ldots, 8$ y para ω_c normalizada a la frecuencia media de muestreo, de 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0.

Solución a) Usando la ecuación (3.96) y $H(n) = 1$, se puede escribir

$$\% \text{ de alias} = \frac{\sum_{n=1}^{10} (n - 10)^2 H^2(n + 10)\ \mathrm{Sa}^2\,[(n + 10)\pi/2]}{\sum_{n=1}^{10} n^2 H^2(n)\ \mathrm{Sa}^2\,(n\pi/2)} = 22.0877\% .$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

b) Aquí se utiliza un filtro prealias (conocido como filtro Butterworth de k-ésimo orden) con frecuencia de -3 dB variable (ω_c) y tasa de atenuación variable ($\approx$ -20 dB/década). Los resultados se presentan en forma tabular en seguida.

Porcentaje de alias

k	$\frac{\omega_c}{\omega_s/2} =$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1		5.9830	7.2209	8.4080	9.5283	10.5723	11.5357
2		1.3154	2.2456	3.4790	4.9851	6.6896	8.4894
3		0.2676	0.6606	1.4020	2.6271	4.4042	6.6545
4		0.0538	0.1915	0.5584	1.3803	2.9390	5.3708
5		0.0108	0.0556	0.2221	0.7236	1.9719	4.4120
6		0.0022	0.0162	0.0885	0.3792	1.3251	3.6634
7		0.0004	0.0048	0.0354	0.1988	0.8902	3.0604
8		0.0001	0.0014	0.0142	0.1044	0.5976	2.5642

Nótese que el porcentaje de alias (o error de alias) disminuye al aumentar la tasa de atenuación en el filtro prealias y al bajar la frecuencia de -3 dB. Sin embargo, esto también provoca atenuaciones indeseables dentro de la banda de frecuencias de interés. Una solución es muestrear a una tasa mayor, permitiendo una banda extra de frecuencia para las características del filtro por realizar.

✓ EJERCICIO 3.16.1

Una señal triangular se muestrea a una tasa de 20 muestras por segundo. (a) Calcule el porcentaje de alias. (b) Repita si se utiliza un filtro pasabajas *RC* como filtro prealias con la frecuencia de -3 dB ubicada en la mitad de la frecuencia de muestreo.

RESPUESTA: (a) 0.6637%; (b) 0.2903%.

En resumen, la medida exacta de las componentes de frecuencia espectral a partir de datos muestreados requiere una frecuencia de muestreo bastante alta para que se pueda utilizar un filtro prealias a fin de atenuar las componentes de alta frecuencia y no atenuar en forma apreciable aquellas frecuencias dentro de la banda de interés. Todas las mediciones prácticas que utilizan datos muestreados implican compromisos cuidadosos entre estos factores.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

3.17 ★ TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA

El aumento en la utilización de métodos digitales para ayuda en los cálculos y para aplicaciones de procesamiento de señales ha provocado un interés creciente en una versión discreta de la transformada de Fourier. Este tema se analiza aquí en forma breve, con particular interés en la relación entre las transformadas de Fourier discreta y continua.

La notación usada por convención para la transformada de Fourier discreta difiere un poco de la utilizada para la transformada continua. Seguiremos lo más posible la convención en uso, y el lector debe estar al tanto de que la notación usada en esta sección difiere un poco de la utilizada en las otras secciones del capítulo.

Sea la representación de una secuencia de N muestras uniformemente espaciadas sobre el intervalo $(0, NT)$ la siguiente

$$f(kT) = f(0), f(T), f(2T), \ldots, f[(N-1)T].$$

La *transformada de Fourier discreta* (DFT, *discrete Fourier transform*) se define como la secuencia de N muestras de valor complejo en el dominio de la frecuencia dada por†

$$F_D(n\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT)e^{-j\Omega Tnk}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{3.97}$$

donde $\Omega = 2\pi/(NT)$. Nótese que $\Omega T = 2\pi/N$ y Ω y T no aparecen en forma explícita en la DFT. Estos parámetros son sólo factores de escala para interpretar los resultados y no son necesarios en los pasos del cálculo.

Al utilizar aproximaciones numéricas a la transformada de Fourier, es necesario restringir el intervalo de observación a un valor finito. Por tanto, definamos la función truncada $\tilde{f}(t)$ en términos de $f(t)$ por

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \le t < NT \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \tag{3.98}$$

La transformada de Fourier, $\tilde{F}(\omega)$, de esta función truncada es

$$\tilde{F}(\omega) = \int_0^{NT} f(t)e^{-j\omega t}\,dt. \tag{3.99}$$

Haciendo los cambios de variable $\omega \to n\Omega$, $t \to kT$, $dt \to T$, la ecuación (3.99) se puede aproximar por medio de

$$\tilde{F}(n\Omega) \cong \sum_{k=0}^{N-1} f(kT)e^{-jn\Omega kT}T. \tag{3.100}$$

† Algunos autores usan definiciones un poco diferentes de ésta, y la sumatoria va desde $k = 1$ hasta $k = N$. Nótese que aquí se utiliza T como intervalo entre muestras.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En las ecuaciones (3.97) y (3.100) se muestra que

$$\tilde{F}(\omega)\big|_{\omega=n\Omega} \cong TF_D(n\Omega)\,. \tag{3.101}$$

Una comparación con la transformada de Fourier continua muestra que las dos son análogas si (1) la señal $f(t)$ se trunca en el intervalo $(0, NT)$; (2) dentro de este intervalo la señal $f(t)$ está disponible como una secuencia de N valores igualmente espaciados; y (3) el intervalo se extiende en forma periódica dando lugar a frecuencias armónicas discretas $n\Omega = 2\pi n/(NT)$. Nótese que la segunda condición implica que los espectros de frecuencia calculados son periódicos con periodo $N\Omega$. Para demostrar esto, considérese el cálculo de $F_D(n\Omega)$ para $n > rN$, con r como cualquier entero, tal que $n = rN + n_1$, $n_1 < N$. Usando esto en la ecuación (3.97), se tiene

$$F_D[(rN + n_1)\Omega] = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT)e^{-j\Omega T(rN+n_1)k}.$$

Sin embargo, se puede escribir $e^{-j\Omega TNr} = e^{-j2\pi r} = 1$, por lo que

$$F_D[(rN + n_1)\Omega] = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT)e^{-j\Omega Tn_1 k} = F_D(n_1\Omega)\,. \tag{3.102}$$

Por tanto, cualquier valor de $F_D(n\Omega)$ para $n > rN$ se puede expresar en términos de un argumento más pequeño $n_1\Omega$, donde $n_1 = n$ módulo N.† En otras palabras, $F_D(n\Omega)$ es periódico con periodo $N\Omega$.

Como resultado de la periodicidad de $F_D(n\Omega)$, la exactitud en el cálculo de la transformada de Fourier continua utilizando la DFT se ve afectada por el alias. Estos efectos son análogos a los vistos en el análisis previo de la serie de Fourier (véanse Secs. 2.17 y 3.16) y se pueden minimizar eligiendo una tasa de muestreo alta (es decir, una T pequeña).

Los coeficientes de la serie de Fourier exponencial se pueden calcular usando la DFT para luego multiplicar por $1/N$ [véanse Ecs. (2.85), (2.88) y (2.94)]. La frecuencia más alta que se puede determinar corresponde a $n = N/2$, o $(N/2)\Omega = (2T)^{-1}$ Hz. Esto va de acuerdo con el teorema del muestreo.

EJERCICIO 3.17.1

Deduzca la ecuación (3.100) multiplicando $f(t)$ por $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t/T - k)$ en la ecuación (3.99) y haciendo que $\omega \to n\Omega$. [En la ecuación (3.99) defina los límites como $0_-, NT_-$.]

En forma análoga al caso continuo, la *transformada de Fourier discreta inversa* (IDFT, *inverse DFT*) es

$$f(kT) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} F_D(n\Omega)e^{j\Omega Tkn}. \tag{3.103}$$

† Un número se expresa como módulo N para indicar el residuo después de que se le han restado todos los múltiplos enteros de N; así, 14 módulo 4 es 2, 14 módulo 5 es 4, etcétera.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La DFT y la IDFT forman un par transformado exacto; sólo al comparar con la transformada continua pueden surgir diferencias.

Las propiedades de la DFT son análogas a las de la transformada de Fourier continua, con las restricciones dadas antes. Como ejemplo, la IDFT del producto de la DFT de dos secuencias es la convolución de las secuencias. Sin embargo, la convolución resultante es periódica.† De hecho, como la IDFT tiene básicamente la misma forma que la DFT, todas las funciones que tienen DFT se extienden en forma automática y periódica con periodo NT. Para una función truncada, una forma conveniente para minimizar los efectos de la periodicidad es añadir ceros a la secuencia como puntos extra de muestra. Estos ceros añadidos se llaman *ceros aumentados*. Los ceros aumentados disminuyen el espaciamiento entre frecuencias armónicas y los efectos del alias para una señal dada, a costa de un tiempo de cálculo mayor. Su utilización se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.17.1

Calcule la transformada de Fourier de $f(t) = u(t) - u(t-1)$ usando cuatro muestras sobre el intervalo (0, 1).

Solución La secuencia de muestras es {1, 1, 1, 1} y la DFT es

$$F_D(n\Omega) = \sum_{k=0}^{3} f(kT)e^{-j2\pi nk/4} = \begin{cases} 4 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}.$$

Usando la ecuación (3.101), se obtiene

$$F(\omega) \cong \begin{cases} 1 & n\Omega = 0 \\ 0 & n\Omega \neq 0 \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, 3.$$

Sin embargo, expresando esta función como $f(t) = \text{rect}\,(t - \frac{1}{2})$, la transformada de Fourier continua es (véanse Tablas 3.1 y 3.2)

$$F(\omega) = e^{-j\omega/2}\,\text{Sa}\,(\omega/2).$$

Estos dos resultados en verdad no se parecen. Si se convierte el último resultado usando la ecuación (3.101),

$$F_D(n\Omega) = 4e^{-jn\pi}\,\text{Sa}\,(n\pi) = \left\{\begin{matrix} 4 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{matrix}\right\} \text{ en } \quad (0, 4),$$

lo que confirma el primer resultado.

Aquí la aparente inconsistencia radica en la interpretación incorrecta del truncamiento de $f(t)$. La extensión periódica de $f(t)$ no proporciona la señal deseada, sino un nivel constante de una unidad. Esta constante posee sólo una componente de frecuencia localizada en $\omega = 0$, ¡y es exactamente lo que se obtuvo! En la figura 3.24(a) se ilustra

† La convolución periódica suele llamarse convolución circular; véase por ejemplo el capítulo 5 de la referencia 1.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

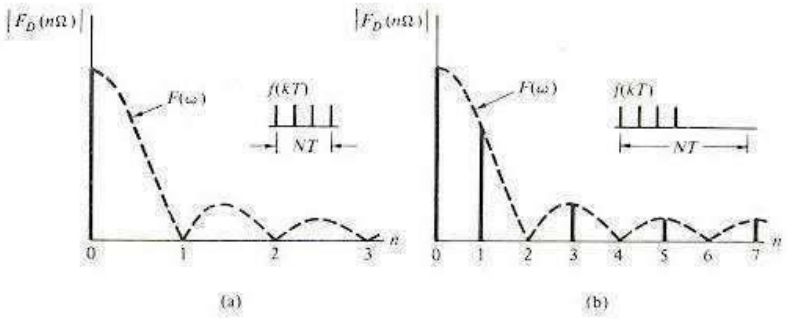


Figura 3.24 Espectro muestreado de un pulso unitario: (a) sin ceros aumentados; (b) con ceros aumentados.

lo que sucede mostrando tanto $F(\omega)$ como $F_D(n\Omega)$. Nótese que las componentes de frecuencia discreta se localizan en los puntos nulos del espectro continuo para $\omega \neq 0$.

Esta situación se puede mejorar colocando algunos ceros aumentados después de la secuencia de 4 muestras. Por ejemplo, si se usan cuatro ceros, la nueva secuencia es {1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0}. La DFT para esta secuencia aumentada se muestra en la figura 3.24(b). La inclusión de estos ceros aumentados incrementa el número de componentes de frecuencia. Nótese que la extensión periódica de esta secuencia aumentada produce una señal cuadrada (¿se verifica esto por medio del espectro discreto resultante?).

EJERCICIO 3.17.2

Encuentre la DFT de las siguientes secuencias para $N = 4$: (a) {1, 0, 1, 0}; (b) {1, 1, 0, 0}.

RESPUESTA: (a) {2, 0, 2, 0}; (b) {2, $1 - j1$, 0, $1 + j1$}.

Se supuso que los datos se muestrean en los enteros $k = 0, 1, 2, \ldots, (N - 1)$ [o, en forma equivalente, $k = 1, 2, 3, \ldots N$†]. Cuando la DFT aproxima una transformada continua, las muestras para valores del tiempo negativos se pueden asignar al intervalo $(N/2, N)$. Las relaciones de simetría resultantes se muestran en la figura 3.25. Si se utilizan ceros aumentados, se pueden añadir en forma simétrica alrededor de $k = N/2$. Existen relaciones de simetría análogas en el dominio de la frecuencia discreta con la consideración adicional de que las componentes de frecuencia positiva y negativa son conjugadas complejas para valores reales de $f(t)$.

A menudo, nuestro interés es hacer una buena estimación de las componentes de frecuencia de $F(\omega)$ basándonos en los datos del intervalo $(0, NT)$. Para funciones de duración finita, es posible elegir el intervalo de cálculo para que equivalga (o sea mayor) a la duración de $f(t)$. Éste fue el caso en el ejemplo 3.17.1. Otro caso de interés es cuando el intervalo elegido para el cálculo es sólo una parte de la duración de $f(t)$.

† Como resultado de la periodicidad por extensión, los puntos de muestra $k = 0$ y $k = N$ son idénticos.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

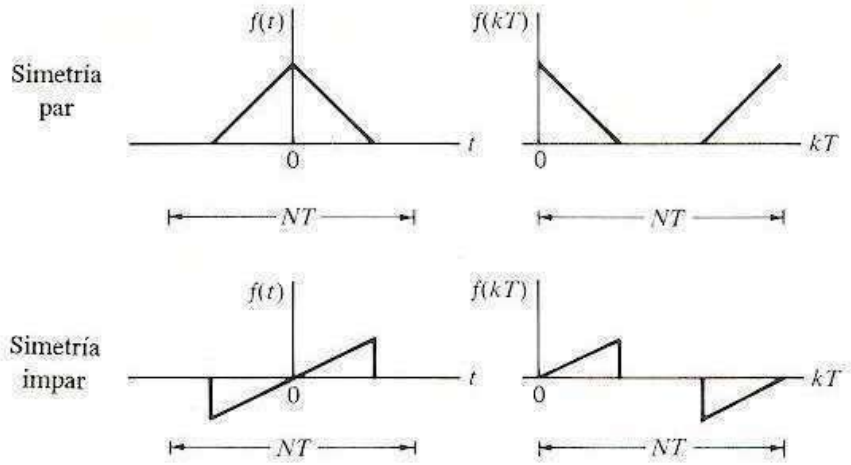


Figura 3.25 Relaciones de simetría para la transformada de Fourier discreta.

Para investigar algunos de los efectos de este truncamiento de $f(t)$, la ecuación (3.99) se reescribe como

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{ rect } [(t - NT/2)/(NT)]e^{-j\omega t}\, dt\,. \tag{3.104}$$

Escrito de esta forma, el truncamiento se puede ver como una ventana que nos permite observar sólo un intervalo finito de $f(t)$. De ahí que estas funciones, como la segunda función en la integral de la ecuación (3.104), se llamen *funciones ventana.*

La ecuación (3.104) también se puede expresar como una convolución en frecuencia:

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi}[F(\omega)] \circledast [NT \text{ Sa } (\omega NT/2)e^{-j\omega NT/2}]\,. \tag{3.105}$$

En teoría, el segundo término encerrado entre corchetes de la ecuación (3.105) debe ser una función impulso para dar una medida correcta de $F(\omega)$. Sin embargo, esto requiere que $(NT) \to \infty$, y no es una alternativa práctica.

Para una longitud de registro finita NT, un valor de interés es la mínima separación de frecuencia mensurable entre componentes de frecuencia. Esta separación mínima se llama *resolución en frecuencia* en la estimación de $F(\omega)$ a partir de $\tilde{F}(\omega)$. Si dos componentes de frecuencia adyacentes tienen amplitudes iguales, la resolución en frecuencia simplemente se fija por medio de la longitud del registro NT:

$$\Delta\Omega = 2\pi/(NT)\,. \tag{3.106}$$

Si las dos componentes tienen amplitud diferente, también se requiere que la transformada de Fourier de la función ventana disminuya con rapidez para $\omega \neq 0$. El patrón sen x/x que corresponde a la ventana rectangular es relativamente pobre a este respecto porque el lóbulo principal (esto es, cerca de $\omega = 0$) tiene magnitud unitaria y el primer lóbulo lateral tiene una magnitud pico de 0.217 (esto es, -13 dB). Por tanto, las componentes de frecuencia adyacentes cuyas magnitudes difieren en más de 5 pueden ser indistinguibles aun cuando se satisfaga la ecuación (3.106).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Un remedio es elegir una función ventana que trunque $f(t)$ y cuya transformada de Fourier tenga lóbulos laterales bajos. Esto ha sido tema de mucha investigación, y no existen soluciones ideales. Una función ventana algo simple aunque efectiva es la ventana coseno elevado (Hann),

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi t}{NT}\right) & |t| < NT/2 \\ 0 & |t| > NT/2 \end{Bmatrix}, \tag{3.107}$$

la cual se muestra en la figura 3.26. La transformada de Fourier de la ventana coseno elevado tiene lóbulos laterales más bajos que la ventana rectangular a expensas de un lóbulo principal más ancho y alguna atenuación. En distinta medida, estos compromisos son típicos de las diferentes funciones ventana de uso común.

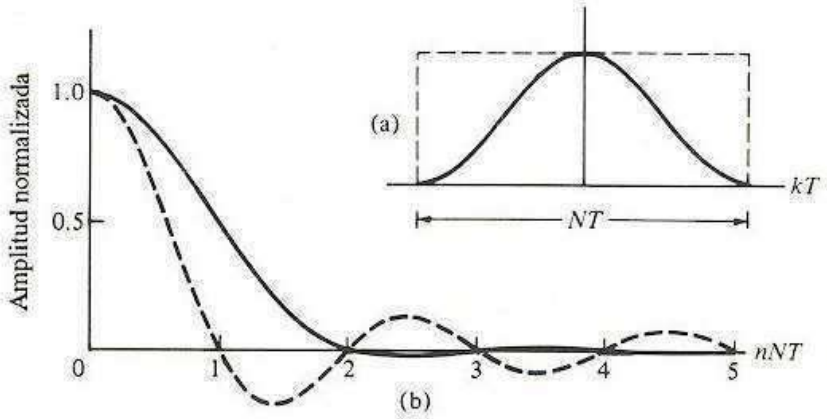


Figura 3.26 (a) Funciones ventana rectangular y coseno elevado, y (b) sus transformadas de Fourier.

EJEMPLO 3.17.2

Calcule la magnitud de la transformada de Fourier de $f(t) = \text{sen}\sqrt{2}t + 0.1\ \text{sen}\,7\pi t$ en el intervalo (0, 2) utilizando la DFT con 32 puntos de muestra y (a) una ventana rectangular; y (b) una ventana coseno elevado.

Solución $\Omega = 2\pi/2 = \pi$, $T = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$; para la ventana coseno elevado (el término dentro de corchetes es 1 para la ventana rectangular):

$$F_D(n\Omega) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{31} f(kT)\{1 + \cos[\pi(k - 16)/16]\}e^{-j\pi nk/16},$$

donde $f(kT) = \text{sen}(\sqrt{2}k/16) + 0.1\ \text{sen}(7\pi k/16)$ y $F(\omega)$ está dada por la ecuación (3.101). Los resultados de este cálculo se muestran en seguida y, graficados en escala logarítmica, se muestran en la figura 3.27. Son evidentes los efectos de los lóbulos laterales de la ventana coseno elevado, así como el lóbulo principal más ancho.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

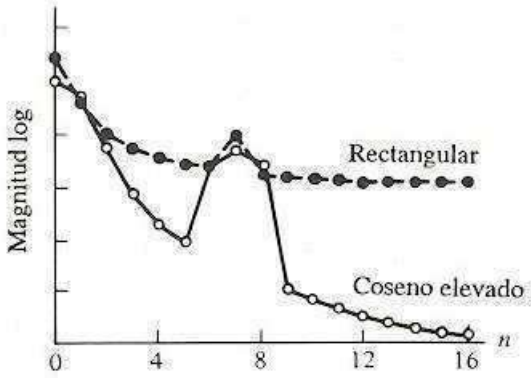


Figura 3.27 Resultados de las funciones ventana rectangular y coseno elevado del ejemplo 3.17.2.

Magnitud calculada de la transformada de Fourier

n	Rectangular	Coseno elevado	n	Rectangular	Coseno elevado
0	1.36930	.86525			
1	.38146	.50423	9	.01622	.00009
2	.09842	.06028	10	.01499	.00006
3	.05336	.00734	11	.01408	.00005
4	.03679	.00211	12	.01340	.00003
5	.02842	.00086	13	.01291	.00002
6	.02343	.02476	14	.01258	.00002
7	.08971	.05015	15	.01239	.00001
8	.01787	.02490	16	.01232	.00001

EJERCICIO 3.17.3

Calcule la transformada de Fourier de $\Lambda(t/2)$ usando la DFT y ocho muestras, tomadas en intervalos de 1 segundo.

RESPUESTA: $\{2, 1 + 1/\sqrt{2}, 1, 1 - 1/\sqrt{2}, 0, 1 - 1/\sqrt{2}, 1, 1 + 1/\sqrt{2}\}$.

3.18 ★ TRANSFORMADA DE FOURIER RÁPIDA

El cálculo de la DFT requiere N^2 multiplicaciones (esto es, $0 \le k < N$, $0 \le n < N$), y el tiempo de cálculo resultante se vuelve excesivo cuando N se hace muy grande. La clave de los métodos de cálculo más eficientes es el empleo de toda la simetría posible de los exponentes complejos antes de realizar las multiplicaciones.

Avances recientes en esta área han dado lugar a una clase de algoritmos eficientes conocidos como *transformada de Fourier rápida* (FFT, *fast Fourier transform*), los

http://libreria-universitaria.blogspot.com

cuales ofrecen reducciones significativas en el tiempo de cálculo. La FFT es un algoritmo (es decir, un método sistemático para realizar una serie de cálculos en secuencia) que permite al usuario calcular la DFT con un tiempo de cálculo mínimo. Aparte del algoritmo mismo, la interpretación de la FFT es igual que la de la DFT.

El algoritmo particular que se trata aquí es el de uso común, formulado por Cooley y Tukey.† Este algoritmo calcula N componentes de frecuencia discreta a partir de N muestras en el tiempo discretas donde $N = 2^r$, con r como cualquier entero. Esta restricción de una potencia de dos no es seria en la práctica, siempre que 2^r sea mayor que el número de puntos de muestra; se puede completar con ceros aumentados.

Como se observó en la sección anterior, los parámetros Ω y T en realidad no se incluyen en el cálculo de la DFT. Por tanto, se adopta una notación más corta desechándolos y escribiendo la ecuación (3.97) como

$$F_D(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)W^{nk}, \tag{3.108}$$

donde

$$W^\ell = e^{-j2\pi\ell/N}, \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.109}$$

La ecuación (3.109) describe un fasor de magnitud unitaria y ángulo de fase de $\theta_\ell = -2\pi\ell/N$. Como ejemplo, sea $N = 2^3 = 8$; los valores correspondientes de la ecuación (3.109) se muestran en la figura 3.28. De esta figura, se puede ver que W^ℓ y $W^{-\ell}$ están localizados en forma simétrica alrededor del eje real, y se cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} W^N &= W^0 = 1, \\ W^{N/2} &= -1 = -W^0, \\ W^{N-\ell} &= [W^\ell]^*. \end{aligned} \tag{3.110}$$

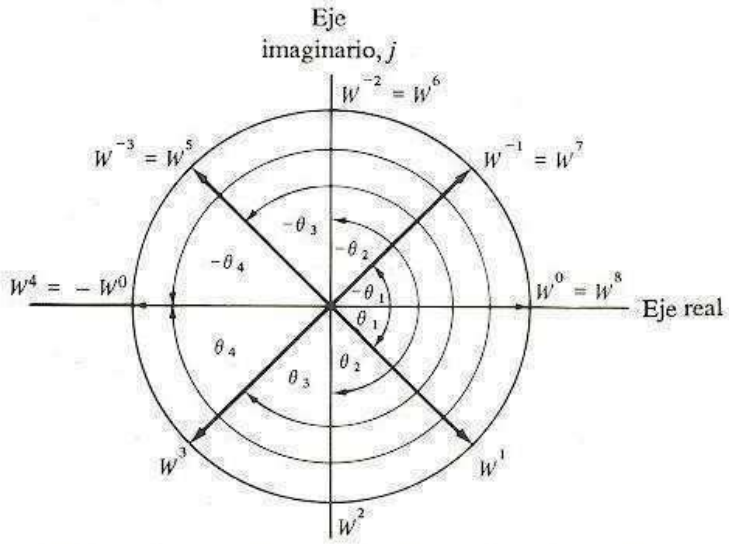


Figura 3.28 Potencias de la función exponencial W para $N = 8$.

† J.W. Cooley y J.W. Tukey, "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series", *Mathematics of Computation* 19, abril de 1965, págs. 297-301.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Con el fin de sacar el mayor provecho del uso de $N = 2^r$, se expresan n, k como números binarios. Supóngase que $r = 2$ (esto es, $N = 4$) y

$$\begin{aligned} k &= (k_1, k_0) = \{00, 01, 10, 11\}, \\ n &= (n_1, n_0) = \{00, 01, 10, 11\}, \end{aligned} \tag{3.111}$$

donde n_0, n_1, k_0, k_1 sólo pueden tomar valores de 0 y 1. Un método compacto de escribir el valor numérico de k y n es

$$\begin{aligned} k &= 2k_1 + k_0, \\ n &= 2n_1 + n_0. \end{aligned} \tag{3.112}$$

Usando las ecuaciones (3.111) y (3.112) en la ecuación (3.108), se obtiene

$$F_D(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^{1} \sum_{k_1=0}^{1} f(k_1, k_0) W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)}, \tag{3.113}$$

donde ahora es necesaria una doble sumatoria para enumerar la representación binaria completa de k.

Considérese el término exponencial en la ecuación (3.113),

$$\begin{aligned} W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} &= W^{(2n_1+n_0)2k_1} W^{(2n_1+n_0)k_0} \\ &= W^{2n_0k_1} W^{(2n_1+n_0)k_0}, \end{aligned} \tag{3.114}$$

porque $W^{4n_1k_1} = 1$ para todos los enteros n_1, k_1. Este último paso es crucial para la eficiencia de la FFT porque ahora la ecuación (3.113) se puede escribir como[†]

$$F_D(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^{1} \left[\sum_{k_1=0}^{1} f(k_1, k_0) W^{2n_0k_1} \right] W^{(2n_1+n_0)k_0}. \tag{3.115}$$

Ahora se puede mostrar el algoritmo reescribiendo la suma entre corchetes de la ecuación (3.115) como

$$f_1(n_0, k_0) = \sum_{k_1=0}^{1} f(k_1, k_0) W^{2n_0k_1}, \tag{3.116}$$

y la sumatoria externa como

$$f_2(n_0, n_1) = \sum_{k_0=0}^{1} f_1(n_0, k_0) W^{(2n_1+n_0)k_0}. \tag{3.117}$$

De las ecuaciones (3.115) y (3.117), se obtiene

$$F_D(n_1, n_0) = f_2(n_0, n_1). \tag{3.118}$$

Este último paso se incluye porque el mencionado algoritmo mezcla el orden en la salida. Una variante es mezclar el orden de entrada para que la salida esté en el orden correcto.

[†] Para una interpretación matricial de esto véanse, por ejemplo, los capítulos 10 y 11 de la referencia 5.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Las ecuaciones (3.116) a (3.118) son las relaciones recursivas que constituyen el algoritmo de Cooley y Tukey para $N = 4$. En la figura 3.29 se muestra una gráfica del flujo de señales de estas relaciones. Los algoritmos para potencias de dos mayores son similares, con una suma en la ecuación (3.113) por cada potencia de dos considerada.

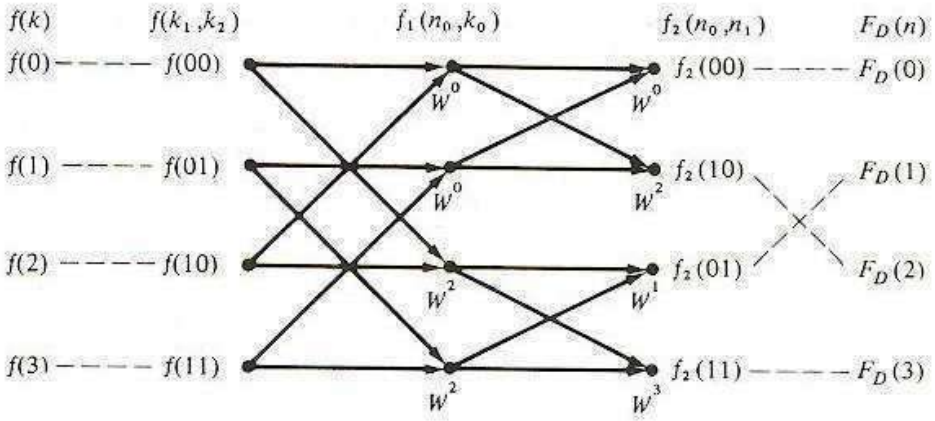


Figura 3.29 Gráfica del flujo de señales para $N = 4$ del algoritmo de Cooley y Tukey.

Se necesitan alrededor de N^2 operaciones complejas de suma y multiplicación en una evaluación directa de la DFT, mientras que el algoritmo de la FFT requiere sólo alrededor de $N \log_2 N$ operaciones. Los ahorros netos se vuelven apreciables para N grande. Por ejemplo, el tiempo de cálculo para una DFT de 1024 puntos por evaluación directa es casi 100 veces superior al que se necesita usando el algoritmo de la FFT. Sin embargo, el algoritmo de la FFT requiere una cantidad considerable de memoria y esto puede limitar su aplicación en situaciones donde se tiene disponible una cantidad limitada de memoria.

Por último, se presentan en seguida algunos puntos que son útiles al procesar funciones del tiempo continuas con la FFT. Nótese que la mayoría son el resultado de las consideraciones previas de la DFT y la transformada de Fourier.

1. Se elige el número de muestras N tal que $N = 2^r$, con r entero. Este número puede incluir ceros aumentados [véase el punto (7) más adelante].
2. Para N muestras en el tiempo existen N frecuencias discretas.
3. Como resultado de la extensión periódica, los puntos de muestra 0 y N son idénticos en ambos dominios.
4. Se considera que las componentes de frecuencia positiva están en $(0, N/2)$; las componentes de frecuencia negativa se hallan en $(N/2, N)$. Esta simetría también se puede utilizar para las muestras del tiempo en tiempos negativos y positivos.
5. Para funciones de valor real, las componentes de frecuencia positiva son conjugadas complejas de las componentes de frecuencia negativa. Los puntos $n = 0, N/2$ son comunes a ambos y tienen valor real.
6. La componente de frecuencia más alta (esto es, $n = N/2$) es $(2T)^{-1}$ Hz; ésta se puede aumentar disminuyendo el espaciamiento entre muestras en el tiempo.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

7. El espaciamiento entre componentes de frecuencia es $(NT)^{-1}$ Hz; éste puede disminuir añadiendo ceros aumentados a la secuencia de muestras.
8. La relación exacta de los valores de la FFT depende de las constantes de multiplicación particulares asignadas en el algoritmo; un procedimiento común es dividir entre N de tal forma que los valores calculados sean $1/N$ veces los de la DFT.

✓ EJERCICIO 3.18.1

(a) Repita el ejemplo 3.17.2 usando un algoritmo FFT y verifique sus resultados con los dados. (b) Añada 96 ceros aumentados, vuelva a ejecutar su programa y verifique los resultados. (c) Determine el espaciamiento entre las componentes de frecuencia y la máxima frecuencia calculada para las partes (a) y (b).

RESPUESTA: (b) Cada cuarto coeficiente debe corresponder a los resultados dados en el ejemplo 3.17.2. (c) 0.5000 Hz, 8 Hz; 0.125 Hz, 8 Hz.

3.19 RESUMEN

Una señal no periódica se puede representar en términos de funciones exponenciales sobre todos los reales $(-\infty, \infty)$. A fin de que sea válida para todo tiempo, debe representrase por medio de una suma continua de funciones exponenciales con frecuencias en el intervalo $(-\infty, \infty)$. La transformada de Fourier es un método de expresar una señal dada en términos de dicho conjunto continuo de componentes de frecuencia exponenciales. La función de frecuencia resultante, $F(\omega)$, proporciona el peso relativo de cada componente de frecuencia en la señal y se denomina función de densidad espectral de la señal.

Una señal de energía finita siempre se puede describir en forma única mediante una función de densidad espectral continua. Las componentes periódicas (incluyendo niveles de cd) en la señal se pueden manejar introduciendo impulsos en las funciones de densidad espectral.

El valor absoluto al cuadrado de la función de densidad espectral es un indicador de la energía relativa por unidad de frecuencia y se llama función de densidad espectral de energía. El área debajo de la función de densidad espectral de energía es igual a la energía de la señal.

A menudo es conveniente utilizar las propiedades establecidas de los pares transformados de Fourier sin evaluar las transformadas mismas. Estas propiedades se demuestran usando las propiedades integrales de la transformada de Fourier. Una de las propiedades más útiles es la de la convolución. Esta propiedad establece que la transformada de Fourier reduce las operaciones de convolución a multiplicaciones. Un resultado directo de esta propiedad es que la función de transferencia del sistema es la transformada de Fourier de la respuesta al impulso del sistema.

Un sistema lineal invariable en el tiempo actúa como filtro en las diferentes componentes de frecuencia aplicadas al sistema. Los filtros transversales se pueden sintetizar utilizando un conjunto de salidas ponderadas de una línea de retardo con derivaciones.

 http://libreria-universitaria.blogspot.com

Las formas comunes de construir filtros transversales incluyen dispositivos de carga acoplada (CCD) y líneas de retardo de ondas acústicas de superficie (SAW).

El ancho de banda de un sistema se define como el intervalo de frecuencias positivas sobre las cuales la magnitud de la función de transferencia del sistema permanece constante dentro de un factor numérico dado. Para una transmisión sin distorsión, la respuesta total de un sistema debe tener una respuesta en magnitud constante (es decir, plana) y una respuesta de fase lineal en frecuencia.

Una prueba experimental conveniente de un sistema lineal es aplicar una función escalón a la entrada. La salida es la integral indefinida de la respuesta al impulso del sistema. El tiempo de elevación del sistema es el tiempo necesario para que la salida alcance el nivel del valor final luego de haberse aplicado la función escalón. El tiempo de elevación es una medida del ancho de la respuesta al impulso del sistema y es inversamente proporcional al ancho de banda del sistema.

La duración temporal es una medida del ancho de una señal de pulso. La duración temporal multiplicada por el ancho de banda se denomina producto tiempo por ancho de banda de la señal. Aunque existe un límite inferior, el producto tiempo por ancho de banda de una señal puede aumentar.

Cualquier señal de banda limitada está determinada por sus valores en intervalos uniformes espaciados no más de $1/(2B)$ segundos. Este enunciado se conoce como teorema del muestreo. La tasa de muestreo mínima, $(2B)$ segundos^{-1}, se llama tasa de muestreo de Nyquist.

Los datos muestreados introducen réplicas espectrales alrededor de múltiplos de la frecuencia de muestreo. En estas réplicas, las componentes de frecuencia pueden caer dentro de las restricciones impuestas por el teorema del muestreo, provocando errores conocidos como alias. Estos errores pueden disminuir utilizando tasas de muestreo más elevadas y filtros antes de muestrear para limitar en banda a la señal.

Se puede utilizar la transformada de Fourier discreta (DFT) para representar una señal muestreada en términos de un conjunto finito de exponenciales complejos. La DFT se puede utilizar para aproximar la serie de Fourier y la transformada de Fourier. La exactitud de esta aproximación está limitada por efectos de truncamiento y alias.

La transformada de Fourier rápida (FFT) es un algoritmo eficiente para el cálculo numérico de la DFT. La versión más utilizada de la FFT calcula N componentes de frecuencia a partir de N muestras en el tiempo para $N = 2^r$, con r como cualquier entero positivo.

Referencias seleccionadas para lectura adicional

1. McGillem, C.D. y Cooper, G.R., *Continuous and Discrete Signal and System Analysis*, 2a. ed., Nueva York, Holt, Rinehart & Winston, 1984.
   Tratamiento muy paralelo al de este capítulo, con más énfasis en métodos de convolución numérica.
2. Gabel, R.A. y Roberts, R.A., *Signals and Linear Systems*, 3a. ed., Nueva York, John Wiley & Sons, 1987.
   El capítulo 3 tiene un buen tratamiento de la convolución y la respuesta al impulso.
3. Ziemer, R.E., Tranter, W.H. y Fanin, D.R., *Signals and Systems*, Nueva York, Macmillan, 1983.
   Este texto tiene un buen desarrollo y análisis de la FFT, de su relación con la DFT y de aplicaciones.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

4. Oppenheim, A.V., Willsky, A.S. y Young, I.T., *Signals and Systems*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1983.
Buen tratamiento de la transformada de Fourier tanto en sistemas continuos como discretos en el tiempo.
5. Brigham, E.O., *The Fast Fourier Transform*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1974.
Un buen y bastante completo análisis de la DFT y la FFT, así como un tratamiento conciso de la transformada de Fourier continua.
6. Bracewell, R., *The Fourier Transform and Its Applications*, 2a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1978.
Aunque un poco avanzado, este libro es fácil de leer y desarrolla la intuición física.
7. Black, H.S., *Modulation Theory*, Princeton, N.J., D. Van Nostrand, 1953.
Presenta un análisis extendido del teorema del muestreo y sus aplicaciones; un clásico en el campo.
8. Papoulis, A., *The Fourier Integral and Its Applications*, Nueva York, McGraw Hill, 1962.
Tratamiento avanzado de la transformada de Fourier y sus aplicaciones desde una perspectiva más matemática.

PROBLEMAS

3.1.1 a) Determine la función $f(t)$ cuya transformada de Fourier se muestra en la figura P-3.1.1(a).
b) Determine la función $g(t)$ cuya transformada de Fourier se muestra en la figura P-3.1.1(b).
c) Dibuje $f(t)$ y $g(t)$ cerca de $t = 0$. ¿Qué efectos tiene la fase en la simetría de esta señal?

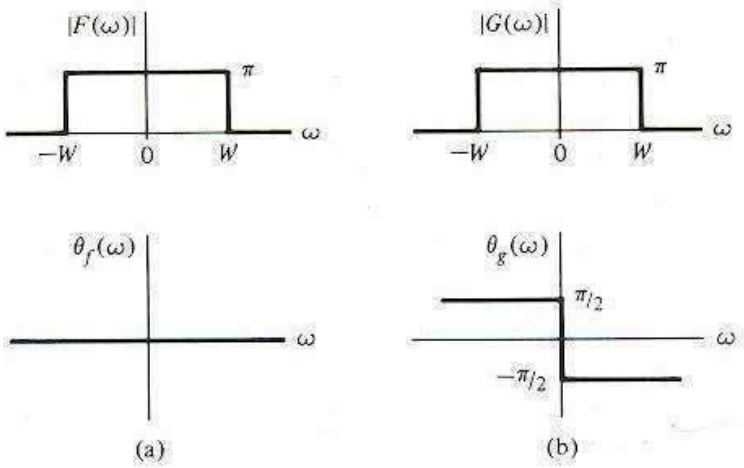


Figura P–3.1.1.

3.1.2 Demuestre que si $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, entonces

a) $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$;

b) $|F(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$;

c) $\frac{d^2f}{dt^2} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|\,d\omega$;

d) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau\,d\omega\,dt = 2\pi F(0)$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

3.2.1 a) Encuentre la transformada de Fourier de la señal de pulso coseno elevado definida como

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \cos \pi t & -1 < t < 1, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Exprese su respuesta en términos de Sa (ω).

b) Utilice la ecuación (3.15) y su respuesta a la parte (a) para encontrar los coeficientes de la serie de Fourier exponencial para el siguiente tren de pulsos periódico para el caso $T = 2$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kT).$$

c) Dibuje la señal en el tiempo del tren de pulsos periódicos de la parte (b) y luego encuentre de manera directa los coeficientes de la serie de Fourier exponencial utilizando las identidades de Euler.

3.2.2 a) Encuentre la densidad espectral de la función de valor real:

$$f(t) = \begin{cases} a \exp(-at) & t > 0, \\ b \exp(at) & t < 0. \end{cases}$$

b) Examine su respuesta a la parte (a) para los casos especiales $b = a$ y $b = -a$, en particular con respecto a la siguiente tabla:

$f(t)$	$F(\omega)$	$F(\omega)$
par	par	real
impar	impar	imag.

3.2.3 Una señal de pulso descrita por $f(t) = \exp(-a|t|)\ \text{rect}(t/T)$ se repite en forma periódica con periodo T.

a) Encuentre la serie de Fourier exponencial empezando con la transformada de Fourier de $\exp(-a|t|)$ y luego convirtiendo a la serie.

b) Compare su respuesta con el problema 2.7.1.

c) ¿En qué condiciones se puede utilizar la ecuación (3.15) para obtener los coeficientes de la serie de Fourier?

3.2.4 La función del tiempo $f(t) = (1/\sigma\sqrt{2\pi})e^{-t^2/2\sigma^2}$ (σ = constante) se conoce como función gaussiana. Esta función posee energía finita y, por tanto, tiene transformada de Fourier. Encuentre dicha transformada. Al buscar la solución será útil combinar exponentes, completar cuadrados en el exponente, y luego usar la integral definida $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$. Observe que $f(t)$ y $F(\omega)$ tienen la misma forma matemática; es decir, la función gaussiana es su propia transformada de Fourier.

★ **3.3.1** Establezca si existen las transformadas de Fourier de las siguientes funciones, definidas en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Defienda sus respuestas.

a) $\exp(t^2)$;
b) $\exp(-t^2)$;
c) $1/t$;
d) $\cos(1/t)$;
e) $f(t) = \begin{cases} 1 & t = 0, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

3.4.1 Calcule la fracción de la energía total en $f(t)$ dentro del intervalo de frecuencia $|\omega| < a$ para las primeras tres funciones de la tabla 3.1.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

3.4.2 Demuestre que un enunciado más general que la ecuación (3.21) del teorema de Parseval para señales de energía es

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, G^*(\omega)\, d\omega .$$

3.4.3 Evalúe las siguientes integrales definidas utilizando el teorema de Parseval:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{sen} x/x]^2\, dx;$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} dx/(a^2 + x^2);$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} dx/(a^2 + x^2)^2.$

3.4.4 Utilice el resultado del problema 3.4.2 para evaluar las siguientes integrales, para $a > 0$, $b > 0$:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)};$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Sa}(bx)}{x^2 + a^2} dx.$

3.5.1 Utilice la ecuación (3.25) y un intercambio en el orden de integración para demostrar que

a) $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(t)\}\} = f(t);$
b) $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(t)\}\} = f(-t).$

3.5.2 Determine el valor promedio (cd) de cada una de las siguientes señales, y verifique su respuesta encontrando primero $f(t)$ para luego calcular el valor promedio.

a) $F(\omega) = \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 3\omega^2 + 2} + \pi\delta(\omega);$

b) $F(\omega) = \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 3\omega^2 + 2} \pi\delta(\omega).$

3.5.3 Una función $f(t)$ se multiplica por una serie de funciones impulso igualmente espaciadas para formar $g(t)$, la cual se puede escribir como

$$g(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT).$$

a) Demuestre que la densidad espectral de $g(t)$ se puede escribir como una serie de exponenciales complejas.
b) Si $F(\omega)$ se define sobre $|\omega| < W$, establezca una condición entre W y T tal que los coeficientes de la serie sean linealmente independientes.
c) ¿Es $F(\omega)$ periódica en las condiciones de las partes (a) y (b)?

3.5.4 Suponga que el término exponencial en la transformada de Fourier se aproxima por medio de los primeros dos términos de una serie de McLaurin. Si se designa esta integral como $F_1(\omega)$, se tiene

$$F_1(\omega) = \lim_{T \to \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)[1 - j\omega t]\, dt .$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Encuentre $F_1(\omega)$ para las siguientes funciones, compare sus resultados con las transformadas de Fourier correspondientes dadas por la ecuación (3.13) e investigue su comportamiento si $\omega \to 0$.

a) A rect (t/τ);
b) $A \exp(-at)\,u(t)$;
c) $A \exp(-a|t|)$;
d) $A\,\delta(t - t_0)$.

3.6.1 a) Encuentre $F(\omega)$ para la $f(t)$ mostrada en la figura P-3.6.1(a), (b).
b) Grafique $|F(\omega)|$ para $\tau \ll T$ en ambos casos, y compare.

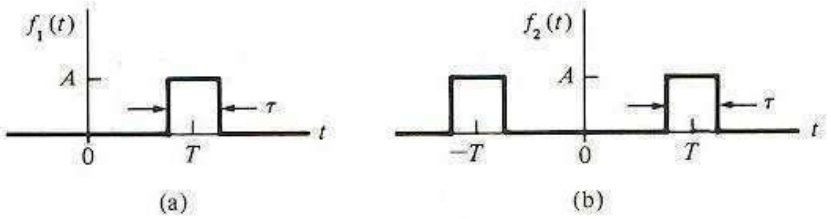


Figura P–3.6.1.

3.6.2 Utilice la propiedad de modulación para encontrar la función $f(t)$ cuya transformada de Fourier se muestra en la figura P-3.6.2 para las condiciones
a) $B = A$; b) $B = -A$.

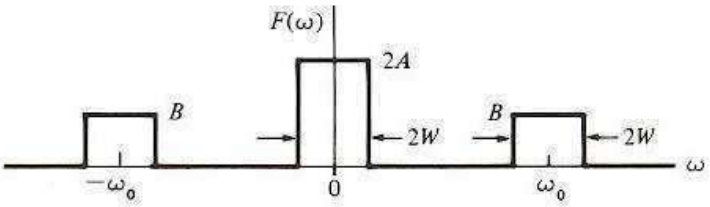


Figura P–3.6.2.

3.6.3 Suponga que se define la transformada integral $F_1(\omega)$ como en el problema 3.5.4. Pruebe las siguientes propiedades para esta transformada.

a) $\mathcal{F}_1\{f(at)\} = \dfrac{1}{|a|} F_1\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$;

b) $\mathcal{F}_1\{f_{\text{par}}(t)\} = F(0)$ (es decir, una constante independiente de ω);

c) $\mathcal{F}_1\{f_{\text{impar}}(t)\} = \omega\left[\dfrac{dF(\omega)}{d\omega}\right]_{\omega=0}$;

d) $\mathcal{F}_1\{f(t - t_0)\} = F_1(\omega) - j\omega t_0 F(0)$.

3.6.4 Si $f(t) \leftrightarrow F\omega)$, determine la transformada de Fourier de

a) $f(2 - t)$;
b) $f[(t/2) - 1]$;
c) $f(t) \cos \pi(t - 1)$;
d) $\dfrac{d}{dt}[f(2t)]$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

3.6.5 Encuentre la transformada de Fourier de la señal de pulso $f(t)$ mostrada en la figura P-3.6.5 derivando para obtener funciones impulso, y luego escriba la transformada utilizando las propiedades de retardo e integración. [*Sugerencia:* Considere la utilización de superposición.]

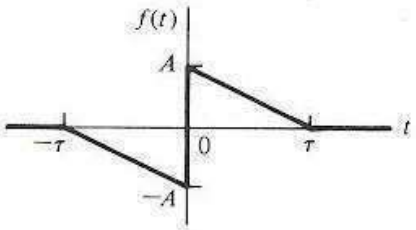


Figura P–3.6.5.

3.6.6 En la figura P-3.6.6 se muestra una señal de pulso aproximada luego de pasar a través de un filtro pasabajas *RC*, utilizando secciones parabólicas.

a) Encuentre la transformada de Fourier de esta aproximación utilizando las instrucciones del problema 3.6.5.

b) Con base en sus resultados, ¿cuál característica de la señal predomina al determinar la transformada de Fourier para valores altos de ω?

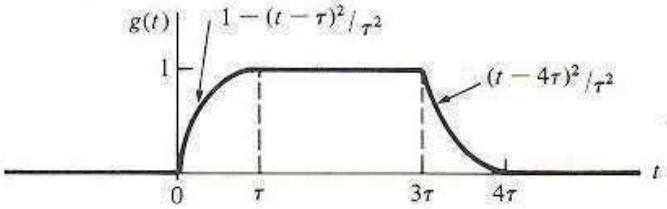


Figura P–3.6.6.

3.6.7 Una señal de pulso es

$$f(t) = \begin{cases} \cos \pi t & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}.$$

a) Grafique df/dt y d^2f/dt^2.

b) Usando el resultado para d^2f/dt^2, escriba una ecuación diferencial en términos de $f(t)$ y encuentre $F\omega)$.

3.6.8 Se sabe que dos funciones del tiempo, $f(t)$ y $g(t)$, satisfacen la siguiente ecuación integral

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t - \tau)\, d\tau + \delta(t)\,.$$

a) Si $f(t) = \exp(-at)\, u(t)$, encuentre $g(t)$.

b) Si $f(t) = \exp(-a|t|)$, encuentre $g(t)$.

3.6.9 Una técnica de aproximación numérica para evaluar la integral de una función $f(t)$ es dividirla en k tiras rectangulares de ancho Δt y altura t_k.

a) Deduzca una expresión para la transformada de Fourier de $f(t)$ utilizando este método.

b) Utilizando las propiedades de la transformada de Fourier, deduzca una fórmula para la transformada de Fourier exacta de $f(t)$ a través de este método. Compare sus resultados con los de la parte (a).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

3.6.10 Una señal de la forma $f(t) = \exp(-at)\,u(t)$ se aplica a un sistema lineal invariable en el tiempo, y la densidad espectral resultante de la salida $g(t)$ es

$$G(\omega) = c_0/(c_2^2 - \omega^2 + jc_1\omega),$$

donde las c_k son constantes. Si se sabe que la respuesta al impulso del sistema es de la forma: $h(t) = b_0 \exp(-b_1 t)\,u(t)$, determine las constantes a, b_k en términos de las c_k.

3.7.1 Considere la siguiente integral (de volumen):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)h(v)\,\delta[t - (u + v)]\,du\,dv.$$

a) Demuestre que esta integral describe la integral de convolución, $f(t) \circledast h(t)$.

b) Utilizando esta integral y el resultado de (a), demuestre que $f(t) \circledast h(t) = h(t) \circledast f(t)$.

c) Utilice esta integral para demostrar que el área debajo de la convolución de dos funciones dadas es igual al producto de las áreas debajo de las dos funciones.

d) Repita la parte (c) utilizando la transformada de Fourier inversa de una función en $f(t) \circledast h(t)$ e intercambiando el orden de integración.

3.7.2 A menudo un sistema global se compone de grupos de sistemas más pequeños, cada uno diseñado para un objetivo específico. Utilizando la integral de convolución, demuestre que en estas condiciones:

a) El orden de operación de los subsistemas no interesa.

b) La respuesta al impulso del sistema global es la convolución de las respuestas al impulso de todos los subsistemas que lo conforman.

c) El resultado de la convolución también es válido para sistemas pasabanda; es decir,

$$f_1(t)\exp(j\omega_0 t) \circledast f_2(t)\exp(j\omega_0 t) = g(t)\exp(j\omega_0 t), \qquad \text{si } g(t) = f_1(t) \circledast f_2(t).$$

d) El retardo del sistema global está dado por la suma de los retardos individuales en los diferentes subsistemas. [*Sugerencia*: Utilice respuestas al impulso limitadas en tiempo, por ejemplo respuestas al impulso de forma rectangular, y defina el retardo en el centro de la respuesta al impulso.]

3.7.3 Utilice la convolución en frecuencia para probar las siguientes identidades trigonométricas (véase también Fig. 3.3):

a) $2\cos^2 \omega_0 t = 1 + \cos 2\omega_0 t$;
b) $2\,\text{sen}^2\, \omega_0 t = 1 - \cos 2\omega_0 t$;
c) $2\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t = \cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t$.

3.8.1 Dibuje los resultados de las siguientes operaciones de convolución (donde $t_0 > 0$ en todos los casos); verifique sus resultados escribiendo la transformada de Fourier de cada función, multiplicandolas y escribiendo la correspondiente función del tiempo.

a) $A\,\delta(t) \circledast B\,\delta(t - t_0)$;
b) $A\,\delta(t + t_0) \circledast B\,\delta(t - t_0)$;
c) $A\,\delta(t - t_1) \circledast B\,\delta(t - t_0)$, $t_0 > t_1$;
d) $A[\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0)] \circledast B[\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0)]$;
e) $A[\delta(t + t_1) + \delta(t - t_1)] \circledast B[\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0)]$, $t_0 > t_1$.

3.8.2 Evalúe las siguientes integrales de convolución; luego verifique sus resultados tomando la transformada de Fourier de cada función, multiplicándolas y encontrando la transformada de Fourier inversa.

a) $u(t) \circledast e^{-t}u(t)$;
b) $e^{-at}u(t) \circledast e^{-bt}u(t)$;
c) $e^{-a|t|} \circledast \cos\omega_0 t$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

3.8.3 Evalúe $f_1(t) \circledast f_2(t)$, $f_1(t) \circledast f_3(t)$ y $f_2(t) \circledast f_3(t)$ para las funciones definidas por las señales mostradas en la figura P-3.8.3.

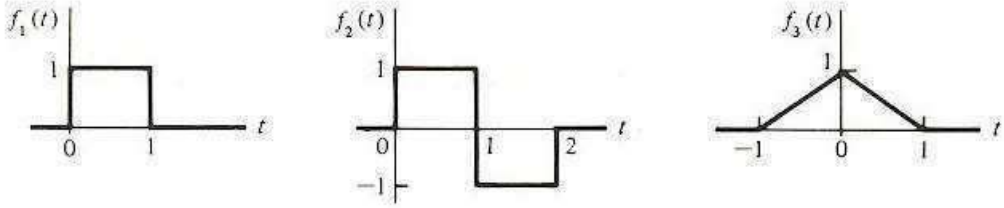


Figura P–3.8.3.

3.8.4 Como la convolución de dos funciones impulso es otra función impulso, la convolución de dos señales lineales por tramos se puede llevar a cabo (1) tomando las derivadas hasta que aparezcan funciones impulso, (2) realizando la convolución con las funciones impulso y (3) integrando el resultado tantas veces como el número total de derivadas. Utilice este método para realizar las convoluciones indicadas en el problema 3.8.3.

3.8.5 Utilizando el método descrito en el problema 3.8.4 para la señal de entrada, encuentre la salida de un filtro pasabajas *RC* para la señal pulso de entrada que se muestra en

a) La figura P-3.8.3(a);

b) La figura 3.9(a)

3.8.6 Dibuje $f_1(t) \circledast h(t)$, $f_2(t) \circledast h(t)$ y $f_3(t) \circledast h(t)$ para las funciones mostradas en la figura P-3.8.6.

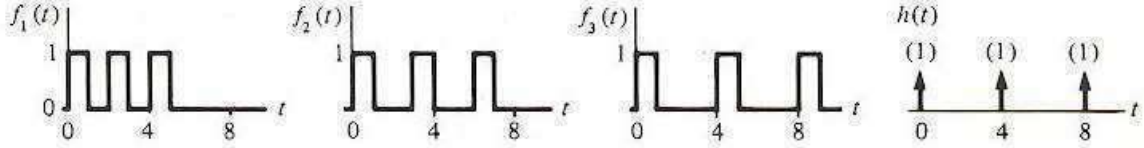


Figura P–3.8.6

3.8.7 Dos funciones del tiempo, $f(t)$ y $g(t)$, se definen como

$$f(t) = \begin{cases} e^{-j\omega_1 t} & 0 \le t < T \\ 0 \quad \text{en caso contrario} \end{cases},$$

$$g(t) = \begin{cases} e^{j\omega_1 t} & 0 \le t < T \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}.$$

Determine y dibuje $f(t) \circledast g(t)$ para cada una de las siguientes condiciones:

a) $\omega_1 = 0$;

b) $\omega_1 = \pi/(2T)$.

3.8.8 Una operación de promediar, o suavizado, que se usa en análisis de señales se define por medio del operador integral

$$g(t) = \int_{t-T}^{t} w(t - \tau) f(\tau)\, d\tau,$$

donde t indica el tiempo presente, T es la duración de la operación de promediar, $f(t)$ es la función por promediar y $w(t)$ es una función ventana.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

a) Exprese $g(t)$ como la convolución de $f(t)$ con una segunda función, $h(t)$, para el caso especial en el que $w(t) = 1$. Grafique y dimensione $h(t)$. [*Sugerencia*: Exprese los límites de la integración en términos de funciones escalón en el integrando de manera que los límites de la integración se puedan extender.]

b) Encuentre la transformada de Fourier de $g(t)$ para investigar los efectos relativos, en el dominio de la frecuencia, de los diferentes factores en la operación de promediar. [*Sugerencia*: Utilice un intercambio en el orden de las operaciones.]

3.8.9 Cierta función del tiempo, $f(t)$, tiene la transformada de Fourier que se muestra en la figura P-3.8.9.

a) Dibuje la transformada de Fourier de $f(2t)$.

b) Dibuje la transformada de Fourier de $[f(t)]^2$.

c) Dibuje la transformada de Fourier de $[f(t) \cos (15t)]$.

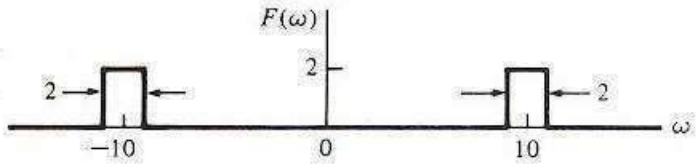


Figura P–3.8.9.

✓ **3.8.10** La señal mostrada en la figura P-3.8.10 se aplica a un filtro cuya respuesta al impulso es $h(t) = ae^{-at}u(t)$. Encuentre la señal de salida en forma gráfica. Utilice métodos numéricos y coloque los puntos de muestra en intervalos de 0.1 s. Suponga continuidad a la izquierda en la señal. Calcule y grafique sobre (0, 5) para $a = 0.5, 1, 4$.

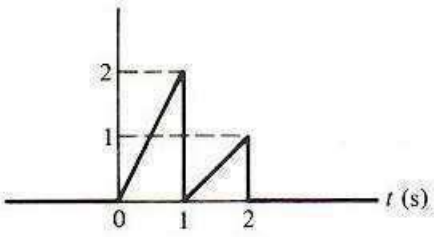


Figura P–3.8.10.

✓ **3.8.11** Calcule la convolución numérica de $x(t) \circledast h(t)$ sobre el intervalo $0 \leq t < 5$, donde

$$x(t) = \begin{cases} \text{sen } \pi t & 0 \leq t < t_0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$h(t) = \exp(-t)u(t).$$

Utilice puntos de muestra con incrementos de 0.1 en cada función y grafique el resultado para a) $t_0 = 1$; b) $t_0 = 2$.

3.9.1 En este problema se investiga el uso de fasores, muy utilizados en análisis de circuitos. Se supone que $h(t)$ es la respuesta al impulso de un sistema lineal invariable en el tiempo con función de transferencia en frecuencia $H(\omega)$.

a) Sea $f(t) = Ae^{j\phi}e^{j\omega_0 t}$, y escriba una expresión integral para $g(t) = f(t) \circledast h(t)$. Usted debe reconocer una transformada de Fourier, dada la salida en términos de $H(\omega_0)$. Exprese $H(\omega_0)$ en términos de magnitud y ángulo, y combine éstos con la magnitud y el ángulo

http://libreria-universitaria.blogspot.com

de $f(t)$. En seguida tome la parte real para expresar la respuesta en términos de cosenos. Observe que no debe utilizar la transformada de Fourier (o la integral de convolución) en este método, ya que requiere entradas senoidales.

b) Utilice el método de fasores, como el desarrollado en la parte (a), para encontrar la salida $g(t)$ si $f(t) = 10 \cos(20\pi t - \pi/6)$, y $H(\omega) = 30\pi/(j\omega + 30\pi)$.

c) Verifique su respuesta en la parte (b) usando transformadas de Fourier.

d) Verifique su respuesta en la parte (b) usando convolución.

3.10.1 a) Encuentre la función de transferencia en frecuencia del filtro transversal de cuatro derivaciones mostrado en la figura P-3.10.1.

b) Determine el valor de esta función de transferencia en frecuencia a las siguientes frecuencias normalizadas: $\omega T = 0$; $\omega T = \pi$; $\omega T = \pi/2$.

c) Determine y dibuje la magnitud de la función de transferencia en frecuencia sobre $-\pi < \omega T < \pi$ para el caso particular en que $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$.

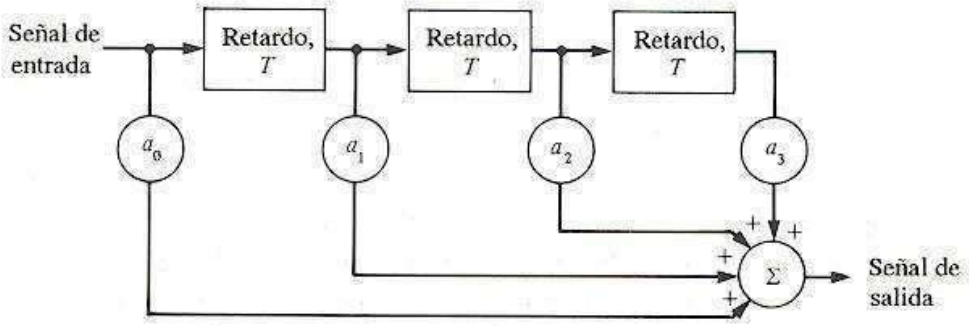


Figura P–3.10.1.

3.10.2 Un problema que se presenta en sistemas de comunicación de alta frecuencia es que si se envía la señal $f(t)$, la señal recibida puede estar formada por $f(t)$ más una réplica retardada que llega a través de una trayectoria de transmisión más larga. Esto se denomina *trayectoria múltiple*. Suponiendo que la señal recibida es

$$g(t) = f(t) + \alpha f(t - \tau),$$

diseñe un filtro transversal que compense esta trayectoria múltiple si $\alpha << 1$.

✓ **3.10.3** Un filtro transversal como el mostrado en la figura P-3.10.1 se utiliza en algunos sistemas de radar para la detección de objetivos móviles en presencia de retornos de señal de objetivos fijos. El retardo T se elige como el tiempo entre pulsos de radar sucesivos, de manera que la frecuencia de muestreo del radar es $f_s = 1/T$. Este filtro debe rechazar aquellas componentes de frecuencia cercanas a $\omega = 0$ y hacer énfasis en aquéllas cercanas a $f_s/2$. Los pesos del filtro, las a_k, se eligen para cumplir con estas características.

a) Utilizando un mínimo de 50 puntos, calcule y grafique la magnitud de la función de transferencia en frecuencia de un filtro transversal de cuatro derivaciones para la siguiente elección de pesos del filtro: +1, −1, +1, −1.

b) Repita la parte (a) para los pesos: −1, +1, +1, −1.

3.11.1 Determine el ancho de banda de −3 dB del filtro cuya función de transferencia en frecuencia es: $H(\omega) = 1/[(j\omega)^2 + 1.4(j\omega) + 1.5]$. También para este filtro, calcule la razón de los anchos de banda de −60 dB a −6 dB (esta relación se utiliza a menudo como una medida conveniente de la selectividad del filtro).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

3.11.2 La magnitud normalizada de funciones de transferencia en frecuencia de una clase de filtros pasabajas conocidos como filtros Butterworth está dada por la ecuación $|H_n(\omega)| = 1/\sqrt{1 + \omega^{2n}}$, donde n es el orden del filtro. Las funciones de transferencia en frecuencia de los primeros tres filtros son

$$n = 1 \quad H_1(\omega) = [(j\omega) + 1]^{-1}$$
$$n = 2 \quad H_2(\omega) = [(j\omega)^2 + \sqrt{2}(j\omega) + 1]^{-1}$$
$$n = 3 \quad H_3(\omega) = [(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 1]^{-1}$$

Calcule la relación de los anchos de banda de -60 dB a -6 dB para estos tres filtros.

3.12.1 En la figura P-3.12.1 se muestra un circuito atenuador que se usa con frecuencia en las medidas de señales con osciloscopio. La sección de la punta del osciloscopio en el atenuador tiene resistencia R_1 y capacitancia C_1. La impedancia de entrada del osciloscopio es R_2 en paralelo con C_2.

a) Deduzca la función de transferencia en frecuencia de este circuito atenuador.

b) Demuestre que la atenuación es sin distorsión si $R_1C_1 = R_2C_2$.

c) Deduzca la respuesta al impulso del atenuador para $R_1C_1 \neq R_2C_2$. ¿Qué sucede conforme $R_1C_1 \to R_2C_2$? Explique su respuesta en términos de la respuesta al impulso.

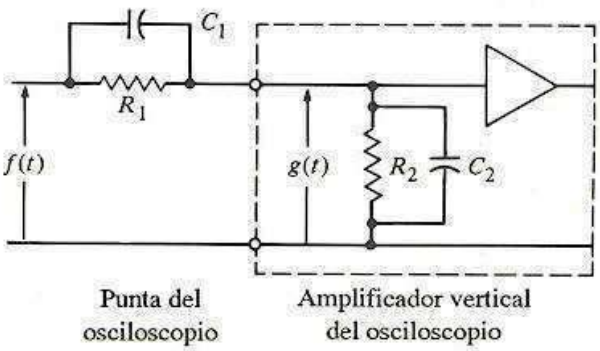


Figura P-3.12.1.

3.12.2 Considere los tres filtros Butterworth descritos en el problema 3.11.2. Si se insiste en que la desviación de los requisitos de transmisión sin distorsión no sean superiores al 1%, determine el máximo ancho de banda, normalizado al ancho de banda de -3 dB, que puede manejar cada uno de estos filtros:

a) Con base en la magnitud de la función de transferencia en frecuencia.

b) Con base en la fase de la función de transferencia en frecuencia.

3.12.3 En este problema se investigan los efectos de pequeñas desviaciones de amplitudes no constantes y retardos en la respuesta del filtro ideal. La salida $g(t)$ en términos de la entrada $f(t)$, la magnitud de la respuesta $|H(\omega)|$ y la fase de la respuesta $\theta(\omega)$ es

$$g(t) = \mathcal{R}e\{\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)\,|H(\omega)|e^{j\theta(\omega)}]\}.$$

Para desviaciones pequeñas, se utiliza la aproximación en series de Taylor:

$$|H(\omega)| \approx A + a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3 + \cdots$$
$$e^{j\theta(\omega)} \approx 1 + j\theta(\omega) - [\theta(\omega)]^2/2 + \cdots$$
$$\theta(\omega) \approx b_0 - t_0\omega + b_2\omega^2 + b_3\omega^3 + \cdots$$

donde A, t_0 constituyen la magnitud y el retardo del filtro ideal.

Si $H(\omega)$ es un filtro pasabajas, demuestre que

$$g(t) \approx \mathcal{R}e\{Af(t - t_0) - a_2f^{(2)}(t - t_0) - jAb_3f^{(3)}(t - t_0) + \cdots\},$$

donde $f^{(n)}(t)$ denota la enésima derivada de $f(t)$. Observe que el término $Af(t - t_0)$ representa la salida sin distorsión, y los otros términos constituyen la distorsión.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

3.13.1 La función de transferencia en frecuencia de un sistema dado es

$$H(\omega) = 10^{18}/(\omega^2 + 10^{16}).$$

a) Determine el ancho de banda de -3 dB de este sistema.

b) Determine la relación de anchos de banda de -60 dB a -3 dB.

c) Encuentre el tiempo de elevación del 10% al 90%, en nanosegundos, y compárelo con el inverso del ancho de banda a -3 dB de este sistema. [*Sugerencia*: Encuentre primero la respuesta al impulso.]

d) ¿Es físicamente realizable este sistema?

3.13.2 Considere los dos sistemas lineales invariables en el tiempo cuyas respuestas al impulso (ideales) se muestran en la figura P-3.13.2.

a) El retardo t_d se define como el tiempo necesario para que la salida del sistema alcance el 50% de su valor final como respuesta a una función escalón aplicada a la entrada en $t = 0$. El tiempo de elevación t_r es el tiempo necesario para que la salida del sistema pase del 10% al 90% del valor final como respuesta a una función escalón aplicada a la entrada en $t = 0$. Determine el retardo t_d y el tiempo de elevación t_r para cada uno de los sistemas. Observe que t_d es una medida del centro de la respuesta al impulso y t_r es una medida del ancho de la respuesta al impulso.

b) Los dos sistemas se conectan en cascada. Encuentre la respuesta al impulso del sistema global.

c) Determine el retardo de todo el sistema y compárelo con la suma de retardos individuales.

d) Determine el tiempo de elevación del sistema global. [*Sugerencia*: Haga uso de simetrías cuando sea posible.]

e) Normalice sus resultados de la parte (e) dividiendo por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los tiempos de subida individuales. Investigue esta razón en forma numérica en un intervalo de (t_1/t_2) de 0.1 a 10. ¿Cuál es su conclusión?

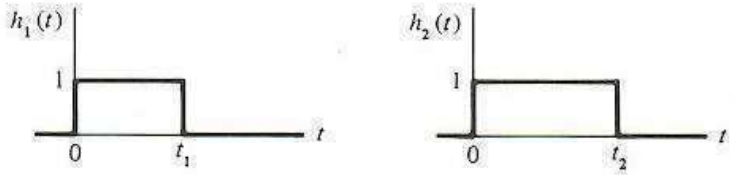


Figura P-3.13.2.

3.13.3 Una regla común en el diseño y operación de los analizadores de espectro es que "la tasa de barrido de la frecuencia debe ser menor que el cuadrado del ancho de banda del filtro". De hecho, en algunos analizadores de espectro se utiliza una luz de advertencia para alertar al usuario, si esta desigualdad no se satisface. Defienda esta regla.

3.13.4 Si la corriente de excitación a un diodo emisor de luz (LED, *light emitting diode*) semiconductor se varía a una frecuencia ω, la intensidad de la salida óptica varía como

$$I(\omega) = I_0[1 + \omega\tau_{ef}]^{-1/2}$$

donde I_0 es la intensidad emitida en $\omega = 0$ y τ_{ef} es el tiempo de vida efectivo de la portadora.

a) ¿Cuál es el ancho de banda a -3 dB del dispositivo?

b) Utilizando la aproximación dada en la ecuación (3.79), estime el tiempo de subida del dispositivo.

★ **3.14.1** Usando las ecuaciones (3.80) y (3.81), determine el producto tiempo por ancho de banda de la señal de pulso $f(t) = t \exp(-at)$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

★ **3.14.2** Determine el producto tiempo por ancho de banda de la señal de pulso $f(t) = \exp(-a|t|)$.

3.15.1 Un dispositivo común para medir la rapidez rotacional de los tocadiscos es un disco con líneas oscuras equidistantes sobre un fondo de alto contraste y colocadas en forma radial en el disco. Cuando el disco se ve bajo una luz estroboscópica, el patrón diseñado permanece estacionario si la velocidad de rotación es correcta. Por ejemplo, suponga que la velocidad del tocadiscos se fija a 33 1/3 rpm. Se conecta un estroboscopio (p. ej., una luz de neón o incluso una luz fluorescente) a la línea de ca a 60 Hz, el cual centellea a 120 s^{-1}. Calcule el número mínimo de líneas que son necesarias en el disco. Repita el cálculo si la frecuencia de la línea es de 50 Hz.

3.15.2 Una señal $f(t)$ cuya densidad espectral se muestra en la figura P-3.15.2 se muestrea usando una señal de pulso rectangular periódica. El ancho de cada pulso de muestreo es de 15 ms y el periodo es igual al intervalo de Nyquist. Dibuje la magnitud de la densidad espectral de la señal muestreada de cero a 100 Hz, etiquetando los puntos importantes.

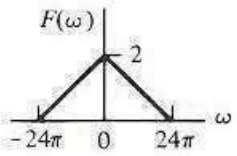


Figura P–3.15.2.

3.15.3 En la figura P-3.15.3 se ilustra un sistema de muestreo compuesto de un multiplicador ideal y un filtro pasabajas ideal.

a) Sea $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$, y dibuje la entrada y la salida del filtro para el caso en que T se elige igual al intervalo de muestreo de Nyquist.

b) Sea $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(t - kT/2)$, y dibuje la entrada y la salida del filtro para el caso en que T se elige igual al intervalo de muestreo de Nyquist.

c) Disminuya la tasa de muestreo de la parte (b) a un medio de la tasa de muestreo de Nyquist y dibuje la entrada y la salida del filtro. Explique su resultado.

d) Si se aplicara la $z(t)$ de la parte (c) a la entrada de un segundo sistema que fuera una réplica del sistema en (c), ¿sería la salida de este sistema similar a $f(t)$? Explique.

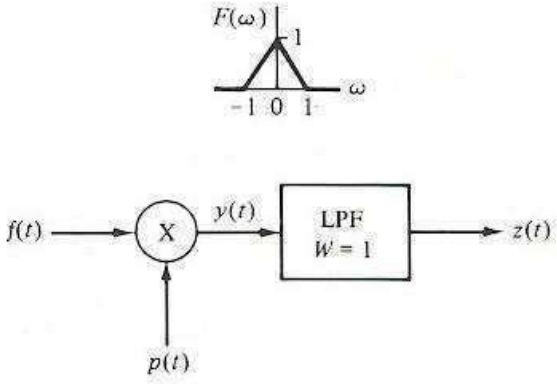


Figura P–3.15.3.

3.15.4 La densidad espectral de una señal de banda limitada dada $f(t)$ se muestra en la figura P-3.15.4. Usando el sistema de muestreo del problema 3.15.3(a), determine la mínima frecuencia de muestreo para

a) $\omega_1 = 8$, $\omega_2 = 10$;

b) $\omega_1 = 7$, $\omega_2 = 9$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

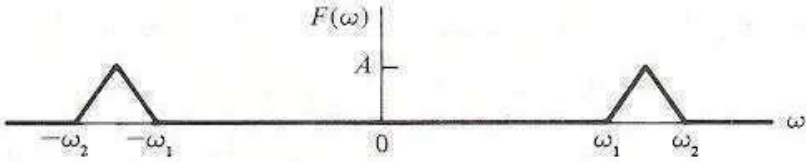


Figura P–3.15.4.

★ **3.16.1** Aquí se desea investigar la posibilidad de utilizar la energía de la señal como una medida de la cantidad relativa de alias presente debido al muestreo de una $f(t)$ dada con un conjunto de funciones impulso (p. ej., véase Problema 3.15.3a).

a) Desarrolle una expresión para la relación de la energía introducida en el ancho de banda a una tasa de muestreo media, dividida por la energía de la señal dentro del ancho de banda sin alias.

b) Utilice su resultado para determinar la tasa de muestreo mínima, expresada en múltiplos de enteros del ancho de banda a –3 dB, para que esta relación sea al menos de 10 dB para la señal $f(t) = \exp(-at)u(t)$.

★ **3.16.2** Mientras que el problema 3.16.1 trata al alias sobre la base de la energía (es decir, magnitud), existen algunos efectos de interferencia en la fase como resultado del muestreo, en particular cerca del borde del ancho de banda. Para investigar esto, suponga un muestreo con impulsos de la señal $f(t) = \cos(\omega_s/2 - \Delta\omega)t$ a la tasa $\omega_s = 2\pi T$. La salida del muestreador se filtra con un filtro pasabajas con función de transferencia en frecuencia $H(\omega)$. Demuestre que la salida resultante se puede escribir como

$$[H(\omega_2) + H(\omega_1)]\cos(\Delta\omega t)\cos[(\omega_s/2)t] + [H(\omega_2) - H(\omega_1)]\,\text{sen}(\Delta\omega t)\,\text{sen}[(\omega_s/2)t],$$

donde $\omega_1 = \omega_s/2 - \Delta\omega$ y $\omega_2 = \omega_s/2 + \Delta\omega$. Observe que, en ausencia del filtro, la salida es de la forma

$$\cos(\Delta\omega t)\cos[(\omega_s/2)t].$$

✓★ **3.16.3** La señal $f(t) = 5e^{-t}$, $0 \le t \le 2\pi$ se repite en forma periódica con $T = 2\pi$.

a) Encuentre una expresión para el valor exacto de las F_n usando integración.

b) Calcule la magnitud de las F_n para los primeros 20 armónicos utilizando 20 muestras por periodo.

c) Tabule el procentaje de error en los valores calculados de las F_n como función de n.

d) Repita las partes (b) y (c), pero usando 40 muestras por periodo. Compare sus resultados con los obtenidos en las partes (b) y (c).

✓★ **3.16.4** Calcule el porcentaje de error alias en el problema 3.16.3, con base en los valores exactos para las F_n; repita usando un filtro pasabajas RC prealias cuya frecuencia de –3 dB es un 90% de la frecuencia de muestreo media.

★ **3.17.1** Calcule la DFT de las siguientes secuencias para $N = 4$:

a) $\{1, 0, 0, 0\}$;
b) $\{1, -1, 1, -1\}$;
c) $\{1, j, -1, -j\}$;
d) $\exp(-k)$.

✓★ **3.17.2** a) Calcule la magnitud de la transformada de Fourier de $f(t) = \exp(-t)u(t)$ en (0, 2) usando la DFT y $N = 16$ puntos de muestra. Asigne un valor 1 al punto en $t = 0$.

b) Compare su resultado con el de la magnitud de la transformada de Fourier continua evaluada en puntos de frecuencia discretos, y grafique ambos resultados para $0 \le n \le N$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

✓★ **3.17.3** Calcule la magnitud de la transformada de Fourier de las siguientes funciones usando la DFT y 16 muestras en el intervalo (0, 1): a) sen πt; b) sen $\sqrt{2}\,\pi t$; c) sen $2\pi t$. Explique toda diferencia significativa en sus densidades espectales.

✓★ **3.17.4** Usando la DFT, calcule y grafique la densidad espectral de energía de las siguientes funciones en $0 < t \leq 5$:

a) $f(t) = (1/t) - (1/4)$; b) $f(t) = (1/\sqrt{t}) - (1/4)$.

Utilice 50 muestras equidistantes y grafique en coordenadas log-log con incrementos enteros de frecuencia: 1, 2, 3, ..., 20. Luego utilice una aproximación de la forma kn^{-r} para cada gráfica, y encuentre los valores numéricos para k, r.

✓★ **3.17.5** Evalúe a) $f_1(t) \circledast f_1(t)$, y b) $f_1(t) \circledast f_3(t)$ del problema 3.8.3 tomando la DFT de cada una, multiplicando, y tomando la IDFT. Utilice espaciamientos de 0.1 entre muestras, suponga continuidad a la izquierda y utilice ceros aumentados para completar 40 muestras en cada secuencia. Grafique sus resultados en (0, 40).

✓★ **3.17.6** Utilice la DFT para calcular la parte real de la transformada de Fourier para la señal $f(t)$ definida como

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -0.05r < t \leq 0.05r \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

donde r es un entero impar (por asignar). Utilice 50 puntos de muestra, con 0.1 entre muestras y coloque un punto de muestra en $t = 0$. Grafique su respuesta en términos de una escala de frecuencias entera n, $0 \leq n \leq N$, con $r = 11$ (u otro valor).

✓★ **3.18.1** Usando la FFT, calcule la transformada de Fourier de

$$f(t) = (20/\pi)\,\text{Sa}\,(20t)\,\text{rect}\,[t/(r\pi)]; \quad -2\pi \leq t < 2\pi\,.$$

Sea $N = 256$, y grafique la magnitud de la transformada de Fourier para $0 \leq n \leq 100$, y a) $r = 1$; b) $r = 2$. Compare sus resultados.

✓★ **3.18.2** Usando un algoritmo FFT de 64 puntos, grafique la aproximación numérica de la salida de un filtro pasabajas ideal que sólo pasa los primeros siete armónicos (más cero) cuando se aplica la señal mostrada en la figura P-3.8.10 a la entrada.

✓★ **3.18.3** La función ventana Hamming se define como

$$w_H(t) = \begin{cases} 0.54 + 0.46\cos\,[2\pi t/(NT)] & |t| < NT/2 \\ 0 & |t| > NT/2 \end{cases}$$

a) Usando la FFT, calcule y grafique la magnitud de la densidad espectral para las funciones ventana coseno elevado y Hamming. Elija 64 puntos de muestra para cada una, más 192 ceros aumentados, y grafique para $0 \leq n \leq 64$. Elija un desplazamiento pequeño (p. ej., 1×10^{-5}) para evitar los ceros y grafique la magnitud en escala logarítmica.

b) Compare las dos densidades espectrales sobre la base de (1) el ancho de los lóbulos principales; (2) las magnitudes relativas de los lóbulos laterales, y (3) la tasa de decaimiento de los lóbulos laterales para n creciente.

✓★ **3.18.4** Repita el problema 3.18.3 para el caso de una función ventana Parzen definida como

$$w_P(t) = \begin{cases} 1 - 6|x|^2(1 - |x|) & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1 - |x|)^3 & \frac{1}{2} < |x| \leq 1, \\ 0 & |x| > 1, \end{cases}$$

donde $x = 2t/(NT)$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

✓★ **3.18.5** Calcule y grafique la señal de salida del problema 3.8.10 usando una FFT con 100 puntos de muestra más 156 ceros aumentados.

✓★ **3.18.6** La señal discreta $f(k)$, definida por

$$f(k) = \begin{cases} 6 & k = 27, 37 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \qquad 0 \leq k < 64,$$

se pasa a través de un LPF tal que sólo los primeros cinco armónicos no se atenúan a cero. Utilice la FFT para calcular la salida resultante y grafique. [*Sugerencia*: Puede ser útil remitirse a la figura 7.18 como ayuda para interpretar los resultados.]

✓★ **3.18.7** Notando la simetría de la transformada de Fourier y su inversa, se puede utilizar la FFT para investigar señales del tiempo para densidades espectrales dadas. Utilizando este procedimiento, calcule la FFT de las siguientes densidades espectrales discretas para $0 \leq k < 128$, y grafique las señales resultantes para $0 \leq n < 64$. [*Sugerencia*: Puede ser útil remitirse a la figura 5.3(a), (b) como ayuda para interpretar los resultados.]

a) $f_1(k) = \begin{cases} 5 & k = 4, 124 \\ 0 & \text{en otro caso;} \end{cases}$

b) $f_2(k) = \begin{cases} 5 & k = 60, 68 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

CAPÍTULO

4 Densidad espectral y correlación

Los métodos de Fourier para el análisis de señales que se han estudiado en los capítulos anteriores brindan algunas perspectivas valiosas sobre la transmisión de señales a través de sistemas. Un tema de particular importancia es el de la distribución de la energía y la potencia tanto en el tiempo como en la frecuencia. Si bien la motivación para estudiar este tema se basa en un punto de vista determinista, puede verse que la representación espectral de la potencia puede aplicarse también a la descripción de señales aleatorias y ruido. En este capítulo se desarrollan algunos métodos para tratar los efectos promedio del ruido sobre una base espectral. Estos métodos serán de utilidad en los siguientes capítulos.

4.1 DENSIDAD ESPECTRAL DE ENERGÍA

El teorema de Parseval proporciona una relación entre una señal temporal $f(t)$ y su transformada de Fourier $F(\omega)$ [véase Ec. (3.21)]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega \,. \tag{4.1}$$

La integral que se encuentra a la izquierda de la ecuación es la energía de $f(t)$ a través de una resistencia de un ohm. Por tanto, la cantidad $|F(\omega)|^2$ que aparece en la ecuación (4.1) es la energía por unidad de frecuencia normalizada a una resistencia de un ohm. El siguiente razonamiento es útil para cargas resistivas diferentes de un ohm.

La energía de una señal se puede hallar integrando el producto de la tensión por la corriente (es decir, la potencia instantánea) en el intervalo considerado. Si la tensión se designa como $v(t)$ y la corriente como $i(t)$, entonces la energía es[†]

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) i^*(t) \, dt \,. \tag{4.2}$$

Sin embargo, se emplea la representación matemática $f(t)$ para una señal, sea ésta una tensión o una corriente. Si la carga resistiva es de un ohm, no hay diferencia y se puede

[†] Se está empleando una notación de valor complejo generalizada de la cual la notación fasorial $v(t) = V \exp(j\omega_0 t)$, $i(t) = I \exp(j\omega_0 t)$, es un caso especial más familiar.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

proseguir. Para cargas diferentes de un ohm, puede introducirse una escala de resistencia usando la conocida ley de Ohm: $v(t) = Ri(t)$. Supóngase, por ejemplo, que $f(t)$ representa una tensión. Del teorema de Parseval, las relaciones de energía son

$$\left.\begin{aligned} E_f &= \frac{1}{R}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt \qquad (4.3a)\\ E_f &= \frac{1}{2\pi R}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega \qquad (4.3b)\end{aligned}\right\} \text{ cuando } f(t) \text{ es una tensión.}$$

Se pueden escribir relaciones análogas cuando $f(t)$ representa una corriente:

$$\left.\begin{aligned} E_f &= R\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt \qquad (4.4a)\\ E_f &= \frac{R}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega \qquad (4.4b)\end{aligned}\right\} \text{ cuando } f(t) \text{ es una corriente.}$$

En consecuencia, la resistencia es sólo un factor de escala que puede tomarse en cuenta posteriormente. Los factores de conversión son fáciles de obtener para cualquier condición dada, por lo que se volverá a suponer una carga resistiva de un ohm. La dimensión de la energía en el sistema MKS es el joule.

Para una resistencia de un ohm, la cantidad anterior $|F(\omega)|^2$ se halla en términos de energía por unidad de frecuencia. Por esta razón se llama *densidad espectral de energía* de la señal $f(t)$, a menudo reducida al término *densidad de energía*. Por tanto, la densidad espectral de energía es aquella función que (1) describe la cantidad relativa de energía de una señal en función de la frecuencia y que (2) tiene un área total bajo $|F(\omega)|^2$ que es la energía de la señal. Nótese que la cantidad $|F(\omega)|^2$ describe sólo la cantidad relativa de energía en varias frecuencias. Para una $|F(\omega)|^2$ continua, la energía en cualquier frecuencia es cero; es el *área* bajo $|F(\omega)|^2$ la que denota la energía. Entonces, para calcularla, debe darse un intervalo de frecuencias sobre el cual integrar y la cantidad de energía dependerá del cuadrado de la magnitud de $F(\omega)$ sobre dicho intervalo de frecuencias.

El concepto de densidad espectral de energía es importante porque permite explicar atenuaciones relativas de la energía espectral a través de sistemas lineales. Para ver esto, se aplicará una señal $f(t)$ a la entrada de un sistema lineal invariable en el tiempo cuya función de transferencia en frecuencia es $H(\omega)$. Si la densidad espectral (en amplitud) de la salida se denota con $G(\omega)$, tenemos

$$G(\omega) = F(\omega)H(\omega)\,.$$

Por tanto, la densidad de energía (normalizada) de $G(\omega)$ es[†]

$$|G(\omega)|^2 = |F(\omega)|^2|H(\omega)|^2, \qquad (4.5)$$

[†] La función de transferencia en frecuencia del sistema $H(\omega)$ no necesita ser adimensional; es decir, puede convertir tensión en corriente o viceversa. Los cambios de unidad adecuados pueden hacerse junto con los cambios de escala de resistencia en la entrada, después de efectuar todos los cálculos. Para los propósitos de este libro, $H(\omega)$ es adimensional y normalizada a un ohm.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

y la energía (normalizada) en la señal de salida es

$$E_s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 \, d\omega \,. \tag{4.6}$$

En otras palabras, la densidad de energía de la respuesta del sistema está dada por la densidad de energía de la entrada multiplicada por el cuadrado de la magnitud de la función de transferencia del sistema. Al calcular la energía y la densidad de energía, tanto en la señal de entrada como en la función de transferencia, se pierde toda información sobre la fase. De ahí que sólo se necesite la magnitud de la función de transferencia del sistema en cualquier cálculo de la densidad de energía.

De la ecuación (4.6) se puede obtener una interesante y útil interpretación física de la densidad de energía. Considérese una señal $f(t)$ aplicada a la entrada de un filtro pasabanda muy estrecho cuya función de transferencia en frecuencia $H(\omega)$ se muestra en la figura 4.1. Designando la salida del filtro como $g(t)$, la energía en $g(t)$ es

$$\begin{aligned} E_g &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 \, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0-(\Delta\omega/2)}^{-\omega_0+(\Delta\omega/2)} |F(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 \, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0-(\Delta\omega/2)}^{\omega_0+(\Delta\omega/2)} |F(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 \, d\omega \\ &\cong \frac{1}{2\pi}|F(-\omega_0)|^2 \Delta\omega + \frac{1}{2\pi}|F(\omega_0)|^2 \Delta\omega \,, \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde $\Delta\omega$ se ha supuesto pequeño.

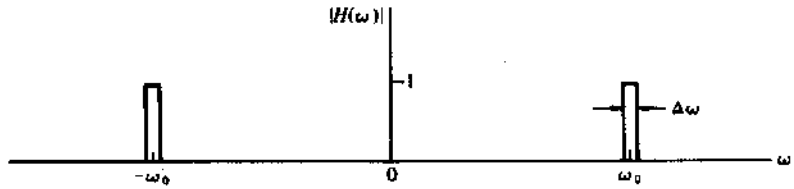


Figura 4.1 Filtro pasabanda estrecho ideal.

Si la señal $f(t)$ tiene valor real, entonces $F^*(-\omega) = F(\omega)$ (véase Sec. 3.6.2) y por tanto $|F(-\omega)| = |F(\omega)|$. Una consecuencia importante de esto es que *para todas las señales de valor real, la densidad espectral de energía es una función par de* ω. Continuando, la ecuación (4.7) se reduce a

$$E_g \cong \frac{1}{\pi}|F(\omega_0)|^2 \Delta\omega \,, \tag{4.8}$$

si $f(t)$ es una señal de valor real. Nótese que la mitad de la energía es aportada por las componentes de frecuencia negativa y la otra mitad por las de frecuencia positiva si $f(t)$ tiene valor real.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

El significado práctico de esto se hace evidente al invertir el procedimiento. Dada una señal pulso $f(t)$, ¿cómo se puede hallar su densidad espectral de energía? Una forma es ampliar el razonamiento anterior y construir un banco paralelo de filtros de banda estrecha, situados todos en frecuencias adyacentes. Si se aplica $f(t)$ a este banco, como se muestra en la figura 4.2(a), se puede obtener una aproximación de la distribución de la energía espectral de $f(t)$. Esto se ilustra en la figura 4.2(b). Asignando la mitad del aporte de energía a las componentes de frecuencia negativa, se obtiene el resultado final mostrado en la figura 4.2(c). El aparato que realiza esta función se llama "analizador de espectro multicanal".

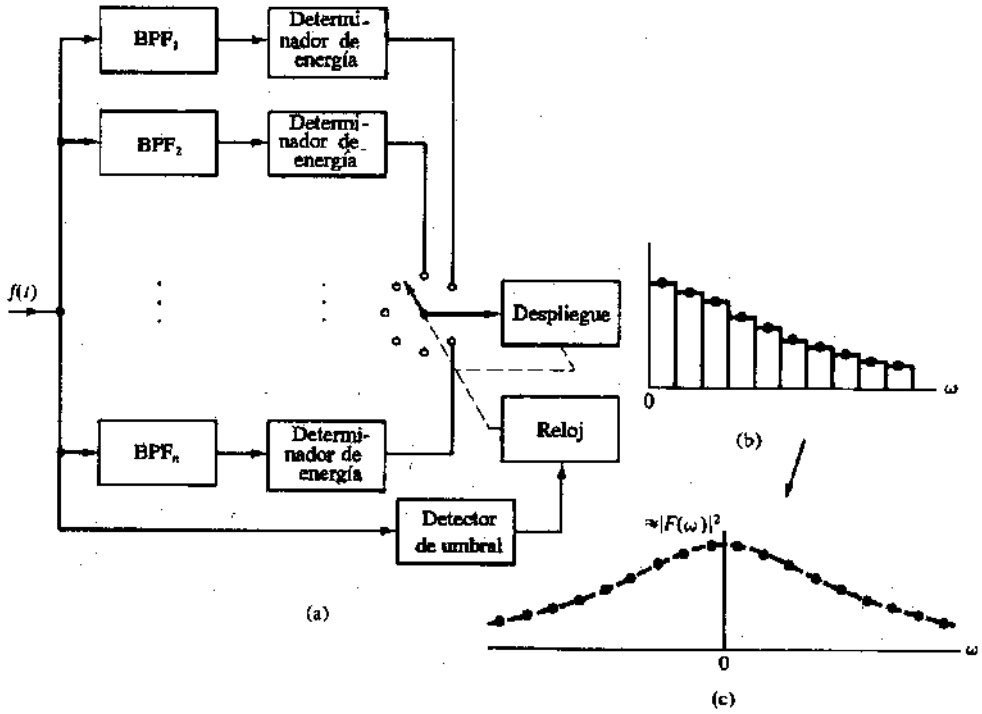


Figura 4.2 Medición de la densidad espectral de energía.

En resumen, la densidad espectral de energía de una señal representa su energía por unidad de frecuencia y muestra las contribuciones relativas de energía de las distintas componentes de frecuencia. El área bajo la densidad espectral de energía proporciona la energía dentro de una banda de frecuencias dada.

EJEMPLO 4.1.1

Una señal de tensión descrita por $f(t) = e^{-5t}u(t)$ se aplica a la entrada de un filtro pasabajas ideal. La ganancia de baja frecuencia del filtro es la unidad, el ancho de banda es de 5

http://libreria-universitaria.blogspot.com

radianes por segundo y los niveles de resistencia tienen 50 ohms. Calcule la energía de las señales de entrada y salida.

Solución La energía en la señal de entrada $f(t)$ es

$$E_f = \frac{1}{R}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{50}\int_0^{\infty} e^{-10t}\,dt$$
$$= \left(\frac{1}{50}\right)\left(\frac{1}{10}\right) = 0.002 \text{ joule.}$$

La energía en la señal de salida $g(t)$ es

$$E_g = \frac{1}{2\pi R}\int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2\,d\omega = \frac{1}{2\pi R}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2|H(\omega)|^2\,d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi R}\int_{-5}^{5} \frac{d\omega}{\omega^2 + 25} = \frac{1}{\pi R}\int_0^5 \frac{d\omega}{\omega^2 + 25}$$
$$= \frac{1}{5\pi R}\tan^{-1}(1) = \frac{1}{5\pi R}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.001 \text{ joule.}$$

EJEMPLO 4.1.2

Se aplica una señal $f(t) = e^{-at}u(t)$ a la entrada de un filtro pasabajas con una función de transferencia en frecuencia de magnitud $|H(\omega)| = b/\sqrt{\omega^2 + b^2}$. Determine las relaciones necesarias entre las constantes a y b para que exactamente el 50% de la energía de la señal de entrada se transfiera a la salida, sobre la base de un ohm.

Solución La energía en la señal de entrada $f(t)$ es (a través de un ohm)

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \int_0^{\infty} e^{-2at}\,dt = \frac{1}{2a}.$$

La energía en la señal de salida $g(t)$ es (a través de un ohm)

$$E_g = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2|H(\omega)|^2\,d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b^2}{(\omega^2 + a^2)(\omega^2 + b^2)}\,d\omega$$
$$= \frac{b^2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2 + a^2)(\omega^2 + b^2)}.$$

De una tabla de integrales (p. ej., véase Ap. A),

$$E_g = \frac{b^2}{\pi}\,\frac{\pi}{2ab(a + b)} = \frac{b}{2a(a + b)},$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

y se requiere que $E_g = \frac{1}{2}E_f$, o sea

$$\frac{b}{2a(a+b)} = \frac{1}{2}\frac{1}{2a}.$$

Resolviendo, se halla que la relación necesaria es $a = b$.

4.2 DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

No todas las señales de interés tienen energía finita. Algunas tienen energía infinita, aunque el promedio en el tiempo puede ser finito. Este promedio se llama potencia promedio y tales señales se denominan "señales de potencia".

La potencia promedio en el tiempo de una señal (de nuevo, se supone una resistencia de un ohm) está dada por

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \, dt. \tag{4.9}$$

Para una señal periódica, cada periodo contiene una réplica de la función, y la operación de llevar al límite la ecuación (4.9) se puede omitir siempre que T se tome como el periodo. Sin embargo, hay señales de potencia que no son periódicas, por lo que la operación debe mantenerse para el caso general.

La operación descrita por la ecuación (4.9) es el promedio (o la media) del cuadrado de la señal $f(t)$. Esta cantidad se llama valor cuadrático medio de la señal $f(t)$, designado simplemente como $\overline{f^2(t)}$. Dicho de otra manera, la potencia promedio en el tiempo de una señal es su valor cuadrático medio, $\overline{f^2(t)}$, si la resistencia es de un ohm. La escala para otros niveles de resistencia se obtiene como se hizo para la energía y la densidad espectral de energía.

Por analogía con las señales de energía analizadas en la sección anterior, sería conveniente y útil definir alguna nueva función de la frecuencia que nos diera cierta indicación de las contribuciones de potencia relativas en diversas frecuencias. Esta función se definirá como *densidad espectral de potencia*, $S_f(\omega)$. Esta función tiene unidades de potencia (es decir, watts) por Hz y su integral da la potencia de $f(t)$. En forma matemática, se tiene

$$P \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) \, d\omega. \tag{4.10}$$

La densidad espectral de potencia $S_f(\omega)$ describe la distribución de la potencia en función de la frecuencia, y por tanto constituye una medida importante en los sistemas prácticos. Aunque se ha venido empleando la teoría determinista de las señales, esto es válido también para señales aleatorias y constituye la base de útiles mediciones en muchas de dichas señales.

Puede usarse un enfoque intuitivo para relacionar en forma más estrecha la densidad espectral de potencia $S_f(\omega)$ con la señal $f(t)$. Supóngase una señal de potencia $f(t)$ como la de la figura 4.3(a). Se toma una versión truncada de ésta, observándola sólo en el

http://libreria-universitaria.blogspot.com

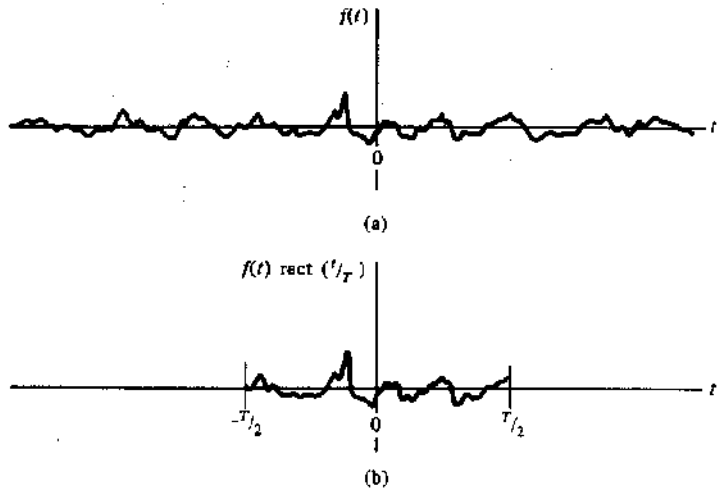


Figura 4.3 (a) Señal de potencia y (b) su truncamiento a un intervalo finito.

intervalo $(-T/2, T/2)$, como se muestra en la figura 4.3(b). Esta función truncada puede denotarse como $f(t)$ rect (t/T).

Se supondrá que $f(t)$ es finita en el intervalo finito $(-T/2, T/2)$. Entonces, la función truncada $f(t)$ rec (t/T) tiene energía finita y su transformada de Fourier $F_T(\omega)$ es†

$$F_T(\omega) = \mathcal{F}\{f(t) \text{ rect } (t/T)\}. \tag{4.11}$$

El teorema de Parseval para esta función es

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_T(\omega)|^2 \, d\omega .$$

Así, la potencia media P a través de un resistor de un ohm está dada por

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_T(\omega)|^2 \, d\omega . \tag{4.12}$$

Combinando las ecuaciones (4.10) y (4.12), se obtiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) \, d\omega = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_T(\omega)|^2 \, d\omega . \tag{4.13}$$

† Se parte de la notación usada anteriormente donde el subíndice T denotaba una función de periodo T. Este otro uso de T no debe ser confuso ya que aparece en funciones de la frecuencia. Ambos usos del símbolo T (es decir, para indicar truncamiento y periodicidad) son frecuentes.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Además, esta relación se debe mantener sobre cada incremento de la frecuencia, por lo que la ecuación (4.13) se convierte en

$$G_f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\omega} S_f(u)\,du = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\omega}|F_T(u)|^2\,du, \tag{4.14}$$

donde $G_f(\omega)$ representa el monto acumulativo de potencia para todas las componentes de frecuencia por debajo de determinada frecuencia ω. Debido a ello, $G_f(\omega)$ se llama espectro de potencia acumulativo o, de manera equivalente, espectro de potencia integrado de $f(t)$. El espectro de potencia acumulativo de $G_f(\omega)$ existe siempre para cualquier señal de potencia.

Si es válido un intercambio del orden de la operación de límite y la integración, la ecuación (4.14) queda

$$2\pi G_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} S_f(u)\,du = \int_{-\infty}^{\omega}\lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(u)|^2}{T}\,du. \tag{4.15}$$

Nótese que la potencia promedio o media contenida en cualquier intervalo de frecuencias (ω_1, ω_2) es $[G_f(\omega_2) - G_f(\omega_1)]$. En muchos casos de interés, $G_f(\omega)$ es diferenciable y se tiene

$$2\pi\frac{dG_f(\omega)}{d\omega} = S_f(\omega). \tag{4.16}$$

En estas condiciones, la ecuación (4.15) da

$$S_f(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{|F_T(\omega)|^2}{T}. \tag{4.17}$$

Esta ecuación es el resultado deseado para la densidad espectral de potencia de $f(t)$.

Puede darse una explicación intuitiva del resultado de la ecuación (4.17). La energía de la función truncada aumenta (o al menos no disminuye) al crecer T. Por tanto, la cantidad $|F_T(\omega)|^2$ se incrementa (o al menos no disminuye) al crecer T. Cuando T se hace muy grande, las fluctuaciones debidas a los efectos de extremo en la integración se harán pequeñas y la cantidad $|F_T(\omega)|^2/T$ puede tender a un límite. Suponiendo que tal límite existe, encontramos que la densidad espectral de potencia $S_f(\omega)$ está dada por la ecuación (4.17). De hecho, el límite de la ecuación (4.17) es significativo para señales con componentes aleatorios, sólo por un sentido de promedio estadístico (véase Cap. 8).

En la práctica, el término *densidad espectral de potencia* se convierte a menudo en *espectro de densidad de potencia* o sólo *espectro de potencia*. Aquí se hablará de $S_f(\omega)$ como el espectro de potencia de la señal $f(t)$, aunque esta terminología no es tan descriptiva ni precisa como la primera. Nótese que la densidad espectral de potencia de una señal sólo retiene información sobre la magnitud, omitiendo la referente a la fase. De ahí que todas las señales con la misma densidad espectral de magnitud tengan idénticos espectros de potencia, sin importar las posibles diferencias en las características de la fase. Por tanto, a diferencia de la densidad espectral de magnitud $F(\omega)$, $S_f(\omega)$ no describe unívocamente a $f(t)$. Hay una densidad espectral de potencia específica para una señal dada, pero puede haber muchas señales con la misma densidad espectral de potencia.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La ecuación (4.17) sugiere un método para determinar la densidad espectral de potencia de una señal. Se toma, del registro de un proceso físico, una porción de T unidades; supóngase, por ejemplo, que se está registrando el movimiento vertical de las olas en una bahía. Fijando un flotador al mecanismo de registro, se registran T segundos de datos. Después, usando técnicas de cálculo, se halla la correspondiente transformada de Fourier $F_T(\omega)$ (mediante el teorema del muestreo, los datos analógicos pueden convertirse en digitales para poder emplear computadores digitales). Tomando el cuadrado de la magnitud, se obtiene la relación $|F_T(\omega)|^2/T$.

Obviamente, no se lleva al límite (esto requiere registros de longitud infinita) y se producen errores en la medición. Una limitación es que la mejor resolución de frecuencias que puede obtenerse es del orden de $1/T$ [p. ej., véase Ec. (3.106)]. Una resolución mejor, entonces, necesita registros de mayor longitud. Por otra parte, la mayoría de los procesos físicos tienen componentes aleatorios y, por tanto, aparecen fluctuaciones en la densidad espectral de potencia. Si hay una certeza razonable de que el espectro de potencia verdadero no varía con el tiempo, un posible remedio es hacer varios registros consecutivos, todos de longitud T, y luego promediar las densidades espectrales de potencia después del cálculo. Éste y otros métodos para obtener densidades espectrales de potencia y mejorar su resolución de frecuencias son el objeto de un área conocida como *análisis espectral*. Su estudio requiere un conocimiento sobre procesos de señales aleatorias, por lo que habrá de postergarse.

El anterior estudio es de aplicación general para cualquier señal de potencia. Para proseguir, se verá una señal periódica de potencia. Supóngase que $f(t)$ es periódica y que está representada por la serie exponencial de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}.$$

Del teorema de Parseval [véase Ec. (2.69)], se tiene

$$\overline{f^2(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2. \tag{4.18}$$

Esta ecuación da la potencia a través de un resistor de un ohm en cada frecuencia armónica para una $f(t)$ dada y, al sumar todos los términos, la potencia promedio total.

Para una señal periódica, puede usarse la ecuación (4.18) para trazar un espectro de línea de potencia como el de la figura 4.4(a). El correspondiente espectro de potencia acumulativo $G_f(\omega)$ se halla en forma simple sumando los términos de la ecuación (4.18) en todos los números armónicos (n) hasta la frecuencia dada ω. Como la inclusión de cada frecuencia armónica agrega una cantidad discreta de potencia, este $G_f(\omega)$ será una serie de funciones escalón que formarán una gráfica escalonada, como se muestra en la figura 4.4(b) (por definición, el espectro de potencia acumulativo es siempre una función no decreciente de ω porque la potencia no puede ser una cantidad negativa).

Escribiendo $G_f(\omega)$ en forma de ecuación, se tiene

$$G_f(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\omega/\omega_0} |F_n|^2 u(\omega - n\omega_0). \tag{4.19}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

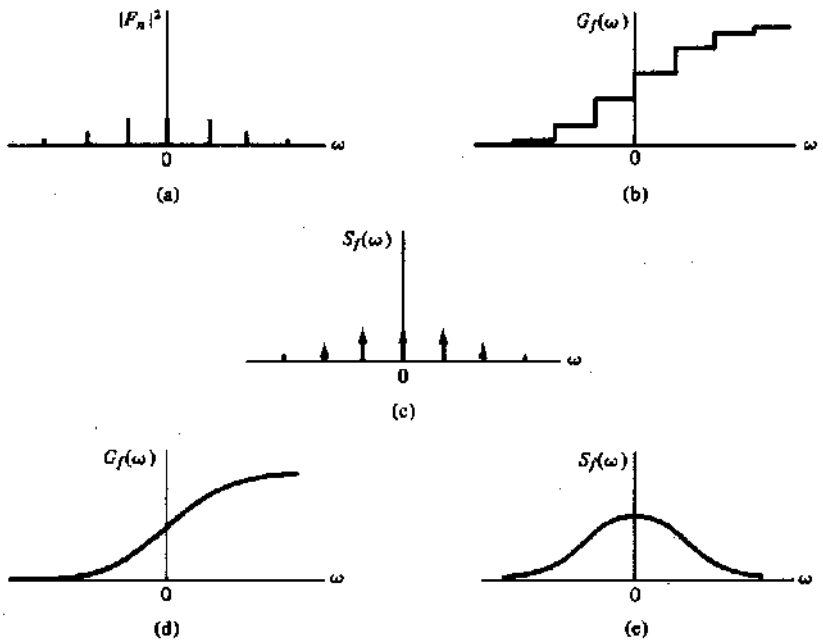


Figura 4.4 Espectros de potencia para señales periódicas: (a) espectro de línea de potencia de una función periódica; (b) espectro de potencia integrado de una función periódica; (c) densidad espectral de potencia de una función periódica; (d) espectro de potencia integrado de una función aperiódica, y (e) densidad espectral de potencia de una función aperiódica.

Recordando que la derivada de una función escalón es una función impulso, las ecuaciones (4.16) y (4.19) proporcionan ahora el resultado deseado:

$$S_f(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0) . \tag{4.20}$$

Entonces, la densidad espectral de potencia de una función periódica es una serie de funciones impulso cuyos pesos (áreas) corresponden al cuadrado de la magnitud de los respectivos coeficientes de la serie de Fourier. Esto se muestra en la figura 4.4(c).

Nótese que para señales de potencia aperiódicas, $G_f(\omega)$ será una función de la frecuencia que varía suavemente, y la densidad espectral de potencia $S_f(\omega)$ surge en forma directa de la aplicación de la ecuación (4.16). Esto se ilustra en la figura 4.4(d) y (e). Se concluye que si una señal $f(t)$ contiene una componente de frecuencia periódica ω_c, entonces $G_f(\omega)$ tendrá una discontinuidad escalón en ω_c y $S_f(\omega)$ contendrá un impulso en ω_c. Esto supone un tiempo de observación infinito, como ya se apuntó.

Una vez obtenido este resultado, cualquier espectro de línea de potencia puede convertirse formalmente en una densidad espectral de potencia cambiando simplemente las líneas por impulsos. Los pesos (áreas) de éstos son iguales al cuadrado de las alturas

http://libreria-universitaria.blogspot.com

de las líneas, multiplicado por 2π, si la frecuencia está en radianes. La integración de la densidad espectral de potencia sobre todas las frecuencias da

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega)\,d\omega\,,$$

que, para un resistor de un ohm, queda

$$\overline{f^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2\,\delta(\omega - n\omega_0)\,d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2.$$

Este resultado, naturalmente, concuerda con el teorema de Parseval.

EJEMPLO 4.2.1

Halle la densidad espectral de potencia de la señal periódica

$$f(t) = A\,\cos\,(\omega_0 t + \theta)\,.$$

Solución

$$f(t) = \frac{A}{2}e^{j\theta}e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\theta}e^{-j\omega_0 t}$$

Expresando $f(t)$ en serie exponencial de Fourier (o usando las entidades de Euler), se encuentra

$$F_{-1} = \left(\frac{A}{2}\right)\exp\,(-j\theta); \qquad F_1 = \left(\frac{A}{2}\right)\exp\,(j\theta)\,.$$

De la ecuación (4.20), se tiene

$$S_f(\omega) = \tfrac{1}{2}\pi A^2\,\delta(\omega + \omega_0) + \tfrac{1}{2}\pi A^2\,\delta(\omega - \omega_0)\,.$$

Observe que la potencia promedio a través de una carga de un ohm puede hallarse de

$$\begin{aligned}\overline{f^2(t)} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega)\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\pi A^2\,\delta(\omega + \omega_0)\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\pi A^2\,\delta(\omega - \omega_0)\,d\omega \\ &= \tfrac{1}{4}A^2 + \tfrac{1}{4}A^2 = \tfrac{1}{2}A^2.\end{aligned}$$

Este resultado se puede verificar con facilidad en el dominio del tiempo. Observe también que la información sobre la fase se pierde en el cálculo.

EJEMPLO 4.2.2

Desarrolle una expresión para la densidad espectral de potencia de $f(t) = A\,\exp\,(j\omega_0 t)$ rect (t/T), tanto para T finito como para $T \to \infty$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Solución De la tabla 3.1 se obtiene

$$\mathcal{F}\{A \text{ rect } (t/T)\} = AT \text{ Sa } (\omega T/2).$$

Usando la propiedad de traslación de frecuencia de la transformada de Fourier, se tiene

$$\mathcal{F}\{A \exp(j\omega_0 t) \text{ rect } (t/T)\} = AT \text{ Sa } [(\omega - \omega_0)T/2].$$

De la ecuación (4.17) para un intervalo de observación finito T, se tiene

$$S_f(\omega) \approx \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} = |A|^2 T \text{ Sa}^2 [(\omega - \omega_0)T/2].$$

A medida que el intervalo de observación se va haciendo más largo, la gráfica de [sen x/x]^2 se concentra más y más alrededor de $\omega = \omega_0$ y, en el límite [véase Ec. (2.110)],

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} &= |A|^2 \lim_{T\to\infty} \{T \text{ Sa}^2 [(\omega - \omega_0)T/2]\} \\ &= 2\pi|A|^2 \lim_{T\to\infty} \left\{\frac{T}{2\pi} \text{ Sa}^2 [(\omega - \omega_0)T/2]\right\} \\ &= 2\pi|A|^2 \delta(\omega - \omega_0).\end{aligned}$$

Este resultado concuerda con el obtenido por la expresión en serie de Fourier de la ecuación (4.20) (si dicha ecuación se dedujera de esta forma, habría que hacer una suma de exponenciales y luego demostrar que los productos cruzados se anulan si $T \to \infty$).

EJEMPLO 4.2.3

La densidad espectral de potencia de cierta señal se halla a partir de la ecuación (4.17). Se toman varios registros de longitud T segundos y se promedian los resultados. La gráfica resultante se muestra en la figura 4.5. Determine cuáles componentes periódicas, si las hay, están contenidas en la señal. Estime también la longitud del registro tomado.

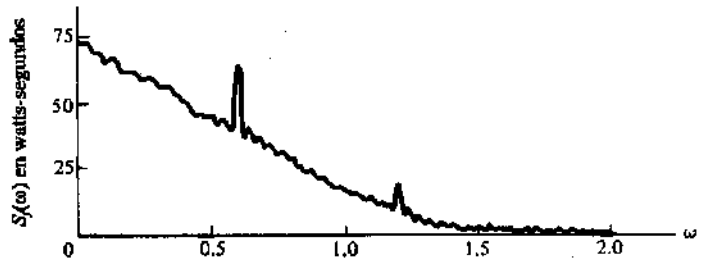


Figura 4.5 Densidad espectral de potencia de la señal del ejemplo 4.2.3.

Solución Para un tiempo de observación infinito, la señal tendrá una componente periódica en las frecuencias en las que su espectro de potencia tenga una función impulso. Sin

http://libreria-universitaria.blogspot.com

embargo, como el tiempo de observación aquí es finito, la componente periódica aparecerá en el espectro en la forma

$$T|F_n|^2 \operatorname{Sa}^2 [(\omega - n\omega_0)T/2]$$

(véase el ejemplo anterior). Por tanto, pueden reconocerse componentes periódicas en las frecuencias

$$\omega_1 = 0.6 \quad \text{rad/s} \quad (f_1 = 0.0955 \text{ Hz}),$$
$$\omega_2 = 1.2 \quad \text{rad/s} \quad (f_2 = 0.191 \text{ Hz}).$$

Puede haber otras componentes periódicas pequeñas, pero están encubiertas en las fluctuaciones o ruido de la medición. En la figura 4.5, los anchos de los picos son de alrededor de 0.05 rad/s, por lo que el tiempo de observación es

$$T = \frac{4\pi}{0.05} \cong 250 \text{ s}.$$

Usando la figura 4.5 y la ecuación anterior para la forma de la densidad espectral de potencia (conocida), las amplitudes de las componentes periódicas son (a través de una carga de un ohm)

$$2T|F_1|^2 = 25 \text{ W-s}, \text{ o } |F_1| = 0.22 \text{ V},$$
$$2T|F_2|^2 = 10 \text{ W-s}, \text{ o } |F_2| = 0.14 \text{ V}.$$

[El factor 2 se introduce aquí porque $S_f(\omega)$ aparece como un espectro de un solo lado.]

El mismo razonamiento que se siguió para la densidad de energía se puede seguir para la transmisión del espectro de potencia a través de un sistema lineal. Supóngase que se aplica una función truncada a un filtro lineal invariable en el tiempo cuya función de transferencia en frecuencia es $H(\omega)$. La función respuesta $G_T(\omega)$ es

$$G_T(\omega) \approx F_T(\omega)H(\omega).$$

Entonces, la densidad espectral de potencia de la señal de salida es

$$S_g(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|F_T(\omega)H(\omega)|^2}{T}$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} |H(\omega)|^2,$$
$$S_g(\omega) = S_f(\omega)|H(\omega)|^2. \tag{4.21}$$

Por tanto, dicha densidad es igual a la densidad espectral de potencia de la señal de entrada modificada por el cuadrado de la magnitud de la función de transferencia del

http://libreria-universitaria.blogspot.com

sistema. De nuevo, tanto en la señal de entrada como en la función de transferencia se pierde toda información acerca de la fase. La potencia promedio en la señal de salida está dada por

$$P_g = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega)\,|H(\omega)|^2\,d\omega\,. \tag{4.22}$$

Las ecuaciones (4.21) y (4.22) dan cierta visión de por qué la magnitud de la función de transferencia es una forma tan usual de evaluar los amplificadores de potencia. Por ejemplo, los amplificadores de audio de alta fidelidad se evalúan sobre la base de curvas de respuesta de potencia: gráficas de $\log |H(\omega)|^2$ contra $\log \omega$.

La densidad espectral de potencia tiene una interpretación física muy similar a la de la densidad espectral de energía. Esta semejanza puede verse al comparar las ecuaciones (4.22) y (4.6). Las unidades MKS de la densidad espectral de potencia son watts por Hz.

Obtenga una relación entre la densidad espectral de potencia de la entrada, $S_f(\omega)$, y la salida, $S_g(\omega)$, de un derivador ideal.

RESPUESTA: $S_g(\omega) = \omega^2 S_f(\omega)$.

4.3 REPRESENTACIONES DEL RUIDO PROMEDIADO EN EL TIEMPO

El concepto de espectro de potencia permite manipular algunos de los efectos promedio de las fluctuaciones al azar que se presentan en los procesos físicos. Estas fluctuaciones de tensión o corriente tienden a oscurecer y enmascarar las señales deseadas, y de manera común se llaman ruido. En un sentido general, el ruido consiste en cualesquiera señales, aleatorias o deterministas, que interfieran con la reproducción fiel de una señal deseada en un sistema. Estas señales indeseables provienen de diversas fuentes y pueden clasificarse en artificiales o naturales.

Los tipos de interferencia artificial (ruido) incluyen: captación electromagnética de otras señales, filtrado inadecuado de potencia, términos alias provenientes de mala selección del muestreo, vibraciones mecánicas que provocan disturbios eléctricos, etc. Las fuentes de ruido artificiales tienen la propiedad común de que sus efectos pueden eliminarse, o al menos minimizarse, con un diseño y una operación cuidadosos. Aquí no serán tratados.

La interferencia causada por fenómenos naturales no es controlable de manera tan directa y sus características pueden describirse mejor en forma estadística. En algunos casos, las fluctuaciones son muy erráticas (p. ej., las provenientes de una tormenta eléctrica) y es difícil describirlas de manera analítica. En otros, la potencia promediada en el tiempo puede permanecer relativamente constante y, sobre esa base, es posible realizar un tratamiento significativo. En el último caso, el concepto de densidad espectral de potencia es útil y permite tratar los efectos del ruido sobre la base de una potencia promedio.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Al hallar promedios de cualquier señal (aleatoria o no), aparecen parámetros que dan alguna indicación sobre la señal. Gran parte de la información detallada, desde luego, se pierde en el proceso. Sin embargo, en el caso del ruido aleatorio, "mejor es algo que nada" y hay que conformarse con cantidades promediadas.

Supóngase que $n(t)$ es un ruido de tensión o corriente (de nuevo se supone una carga resistiva de un ohm). En la figura 4.6(a) se ilustra una señal típica. Ahora se definirán los siguientes promedios de $n(t)$,

1. *Valor medio,* $\overline{n(t)}$:

$$\overline{n(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n(t)\, dt . \tag{4.23}$$

El parámetro $\overline{n(t)}$ se suele llamar valor de cd, o promedio, de $n(t)$. El intervalo de tiempo T de la ecuación (4.23) puede ser finito para una buena estimación de $\overline{n(t)}$ si es lo bastante grande como para suavizar en forma adecuada las fluctuaciones de $n(t)$.

2. *Valor cuadrático medio,* $\overline{n^2(t)}$:

$$\overline{n^2(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |n(t)|^2\, dt . \tag{4.24}$$

La raíz cuadrada de $\overline{n^2(t)}$, llamada valor de la raíz cuadrática media (rms, *root-mean-square*) de $n(t)$, tiene la ventaja de que las unidades de $\sqrt{\overline{n^2(t)}}$ son iguales a las de $n(t)$. Aparte del factor de escala de la resistencia, la ecuación (4.24) da la potencia promediada en el tiempo de $n(t)$. De la sección anterior, puede verse que también se relaciona con la integral de la densidad espectral de potencia, $S_n(\omega)$.

3. *Componente de ca,* $\sigma(t)$:

$$\sigma(t) \triangleq n(t) - \overline{n(t)} . \tag{4.25}$$

El componente de ca, o fluctuación, de $n(t)$ es el que queda después de suprimir el valor medio $\overline{n(t)}$. En la figura 4.6(b) se muestra una señal típica.

Sustituyendo la ecuación (4.25) en la (4.24), se obtiene

$$\overline{n^2(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\overline{n(t)} + \sigma(t)|^2\, dt ,$$

$$\overline{n^2(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\overline{n(t)}|^2\, dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\sigma(t)|^2\, dt . \tag{4.26}$$

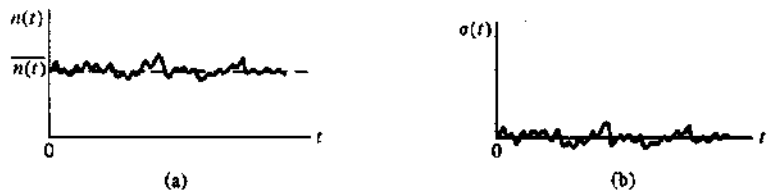


Figura 4.6 (a) Señal aleatoria de ruido y (b) su componente de ca.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En la ecuación (4.26) se hace uso del hecho de que $\overline{n(t)}$ es constante y que la media de $o(t)$ es cero por definición. El término de la izquierda es la potencia promediada en el tiempo de $n(t)$ a través de un resistor de un ohm. Así mismo, el primer término de la derecha de la ecuación (4.26) es la potencia de cd y el segundo, la potencia de ca de $n(t)$. En la ecuación (4.26) se muestra, por inspección, que el valor de la raíz cuadrática media de $n(t)$ es igual a la de $o(t)$ sólo si el valor medio $\overline{n(t)}$ es cero.

Las definiciones anteriores pueden aplicarse a cualquier señal, sea o no aleatoria. Para señales periódicas, T se toma como el periodo y no es necesario llevar al límite.

EJEMPLO 4.3.1

Calcule (a) el valor medio; (b) la potencia de ca y (c) el valor de la raíz cuadrática media de la señal periódica $v(t) = 1 + \cos \omega_0 t$.

Solución Como $v(t)$ es periódica, puede integrarse sobre un periodo en vez de llevar al límite.

$$\text{a) } \overline{v(t)} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (1 + \cos \omega_0 t)\, dt = 1,$$

$$\text{b) } \overline{o^2(t)} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (\cos \omega_0 t)^2\, dt = \tfrac{1}{2},$$

$$\text{c) } \overline{v^2(t)} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (1 + \cos \omega_0 t)^2\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} (1 + 2\cos \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t)\, dt = \tfrac{3}{2},$$

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{v^2(t)}} = \sqrt{3/2}.$$

Una medida importante del comportamiento de los sistemas, en particular los que amplifican las señales de bajo nivel, es cuánto ruido pequeño se introduce en el sistema. Como el ruido varía en forma impredecible de un instante al siguiente, es preferible analizar esto con base en una potencia promedio de ruido. De hecho, es conveniente establecer una razón adimensional entre la potencia de la señal y la potencia del ruido. Esta razón, llamada *razón señal a ruido*, puede formarse con el cociente de la señal cuadrática media entre el ruido cuadrático medio, dado que el factor de resistencia se cancela. Designando esta razón como S/N, se tiene

$$S/N = \overline{s^2(t)}/\overline{n^2(t)}. \tag{4.27}$$

Es muy común expresar esta razón en decibeles†

$$[S/N]_{\text{dB}} = 10 \log_{10}[\overline{s^2(t)}/\overline{n^2(t)}]. \tag{4.28}$$

† En el apéndice B se incluye un breve análisis del decibel.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Se supone que tanto $\overline{s^2(t)}$ como $\overline{n^2(t)}$ se miden en el mismo punto. Como puede agregarse arbitrariamente un nivel de cd, ambos valores cuadráticos medios presuponen valor medio cero, salvo indicación contraria. Por tanto, la densidad espectral de potencia de la señal y del ruido puede contener una función impulso en $\omega = 0$, que suele despreciarse al calcular S/N.

Un amplificador de bajo nivel tiene un ancho de banda de 0.01–10 Hz y una densidad espectral de potencia de ruido de $S_n(\omega) = 10^{-14}|\omega|^{-1}$ W/Hz en su entrada. (Se supone un ohm.) Calcule la razón señal a ruido de la salida del amplificador para una senoidal de entrada con rms de 1-μV, a 1 Hz. Suponga que la ganancia del amplificador es una constante en el ancho de banda dado.

RESPUESTA: 16.6 dB.

4.4 FUNCIONES DE CORRELACIÓN

En las secciones anteriores hemos visto cómo se pueden manejar las señales tanto aleatorias como deterministas usando la función densidad espectral de potencia, $S_f(\omega)$. Surge una pregunta: ¿hay alguna operación en el dominio del tiempo equivalente a hallar la densidad espectral de potencia en el dominio de las frecuencias?

Para responder a esta importante pregunta, se empezará por suponer que se satisface la definición de densidad espectral de potencia, esto es [véase Ec. (4.17)],

$$S_f(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |F_T(\omega)|^2. \tag{4.29}$$

La operación correspondiente en el tiempo será la transformada de Fourier inversa de la ecuación (4.29), esto es,

$$\mathcal{F}^{-1}\{S_f(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |F_T(\omega)|^2 e^{j\omega\tau}\, d\omega\,. \tag{4.30}$$

Se ha elegido intencionalmente una nueva variable de tiempo, τ, en la ecuación (4.30) porque la variable t ya se usó en la definición de $F_T(\omega)$. Intercambiando el orden de las operaciones,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\{S_f(\omega)\} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} F_T^*(\omega) F_T(\omega) e^{j\omega\tau}\, d\omega \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t) e^{j\omega t}\, dt \int_{-T/2}^{T/2} f(t_1) e^{-j\omega t_1}\, dt_1\, e^{j\omega\tau}\, d\omega \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t) \int_{-T/2}^{T/2} f(t_1) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-t_1+\tau)}\, d\omega \right] dt_1\, dt\,.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La integración sobre ω entre corchetes de la ecuación (4.17) se reconoce ahora como [véase Ec. (3.25)] $\delta(t - t_1 + \tau)$, así que

$$\mathcal{F}^{-1}\{S_f(\omega)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t) \int_{-T/2}^{T/2} f(t_1)\, \delta(t - t_1 + \tau)\, dt_1\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t) f(t + \tau)\, dt\,. \tag{4.32}$$

En esta ecuación se describen las operaciones en el dominio del tiempo correspondientes a la determinación de $S_f(\omega)$ en la frecuencia. La transformada de Fourier inversa de $S_f(\omega)$ se llama *función de autocorrelación* de $f(t)$, designada como $R_f(\tau)$. Entonces, el resultado buscado puede escribirse como†

$$R_f(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t) f(t + \tau)\, dt\,. \tag{4.33}$$

Además, tomando la transformada de Fourier de ambos lados de la ecuación (4.32) y usando la ecuación (4.33), se puede escribir

$$S_f(\omega) = \mathcal{F}\{R_f(\tau)\}\,. \tag{4.34}$$

Ahora tenemos otro método para hallar la densidad espectral de potencia: se determina primero la función de autocorrelación y después la transformada de Fourier. Este método se aplica a señales tanto aleatorias como deterministas. Se ha supuesto que la potencia y la densidad espectral de potencia no varían con el tiempo. Si esta suposición no es correcta, aún puede hallarse la función de autocorrelación, aunque esto dependerá tanto de τ como de t.

Para señales de valor real, el cálculo de la función de autocorrelación $R_f(t)$ resulta ser similar a la convolución de $f(-t)$ con $f(t)$. Como estas operaciones se examinaron en el capítulo 3, sólo se ilustrarán con ejemplos.

EJEMPLO 4.4.1

Determine y trace la función de autocorrelación de una señal periódica cuadrada con amplitud de pico a pico A, periodo T y valor medio $A/2$.

Solución Como $f(t)$ es periódica, en la determinación de $R_f(\tau)$ la operación de límites puede reemplazarse por el cálculo sobre un periodo. Usando una forma alterna de la ecuación (4.33) (véase el pie de página para esa ecuación), se tiene

Para $-T/2 < \tau < 0$:

$$R_f(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{(T/4)+\tau} A^2\, dt = A^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{T}\right),$$

† Con un cambio de variable, esto también se puede escribir como

$$R_f(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t - \tau) f(t)\, dt\,.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Para $0 < \tau < T/2$:

$$R_f(\tau) = \frac{1}{T}\int_{\tau - T/4}^{T/4} A^2\,dt = A^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{T}\right).$$

En la figura 4.7 se muestran gráficas de $f(t)$ y $R_f(\tau)$. Dado que $f(t + T) = f(t)$, todos los cálculos se repiten en cada periodo. Se deduce que la función de autocorrelación de una señal periódica es periódica. Igualmente, la función de autocorrelación de una señal aperiódica es aperiódica.

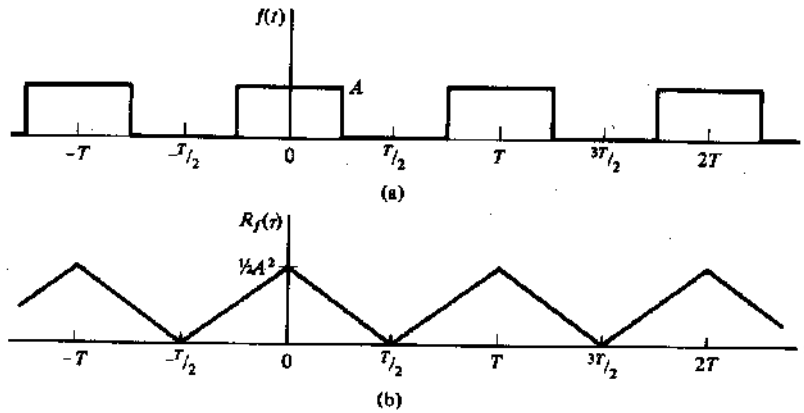


Figura 4.7 (a) Función periódica y (b) su función de autocorrelación.

EJEMPLO 4.4.2

Halle la función de autocorrelación de $\sqrt{2}\cos(\omega_0 t + \theta)$.

Solución

$$R_f(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} 2\cos(\omega_0 t + \theta)\cos(\omega_0 t + \omega_0\tau + \theta)\,dt,$$

$$R_f(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos\omega_0\tau\,dt + \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau + 2\theta)\,dt,$$

$$R_f(\tau) = \cos\omega_0\tau.$$

Observe que la función de autocorrelación no depende de la fase θ.

La función de autocorrelación es muy utilizada en el análisis de señales. Resulta especialmente útil en la detección o el reconocimiento de señales enmascaradas por ruido agregado. Por ejemplo, considérese una señal periódica cuadrada como la de la figura 4.8(a). Su función de autocorrelación, como se halló en el ejemplo 4.4.1, se muestra en la figura 4.8(b). Una señal de ruido blanco aleatorio de banda limitada y su función de correlación se muestran en las figuras 4.8(c) y (d), respectiva-

http://libreria-universitaria.blogspot.com

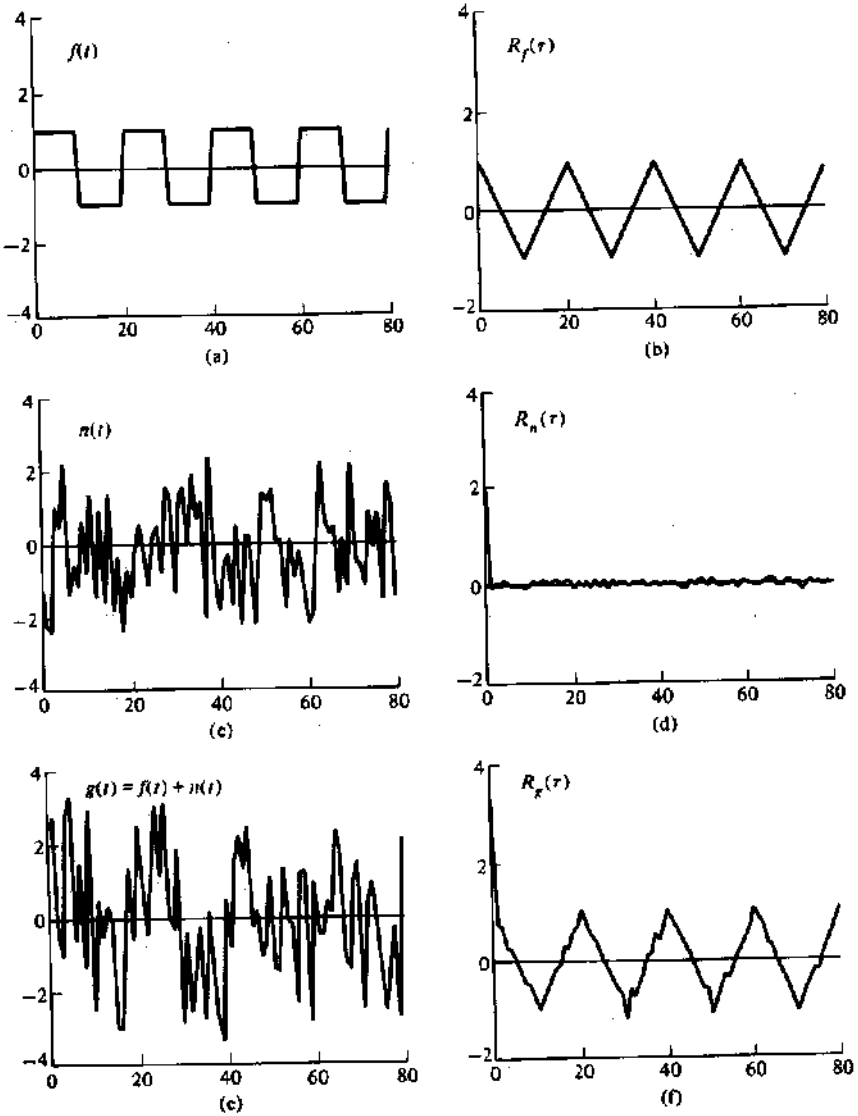


Figura 4.8 Autocorrelación de una señal periódica más ruido.

mente. En la figura 4.8(e) aparece la señal resultante de sumar la señal de ruido aleatorio con la periódica, y en la 4.8(f), su función de autocorrelación. Nótese que, aun cuando la señal cuadrada está envuelta en una cantidad considerable de ruido, en el resultado final se reconoce fácilmente la función de autocorrelación de la señal cuadrada.

Uno de los inconvenientes de usar la autocorrelación en este tipo de aplicación es que la autocorrelación del ruido aparece en la salida junto con la de la señal (p. ej., compárense las figuras 4.8d y f). Esto puede dificultar la detección de señales aperió-

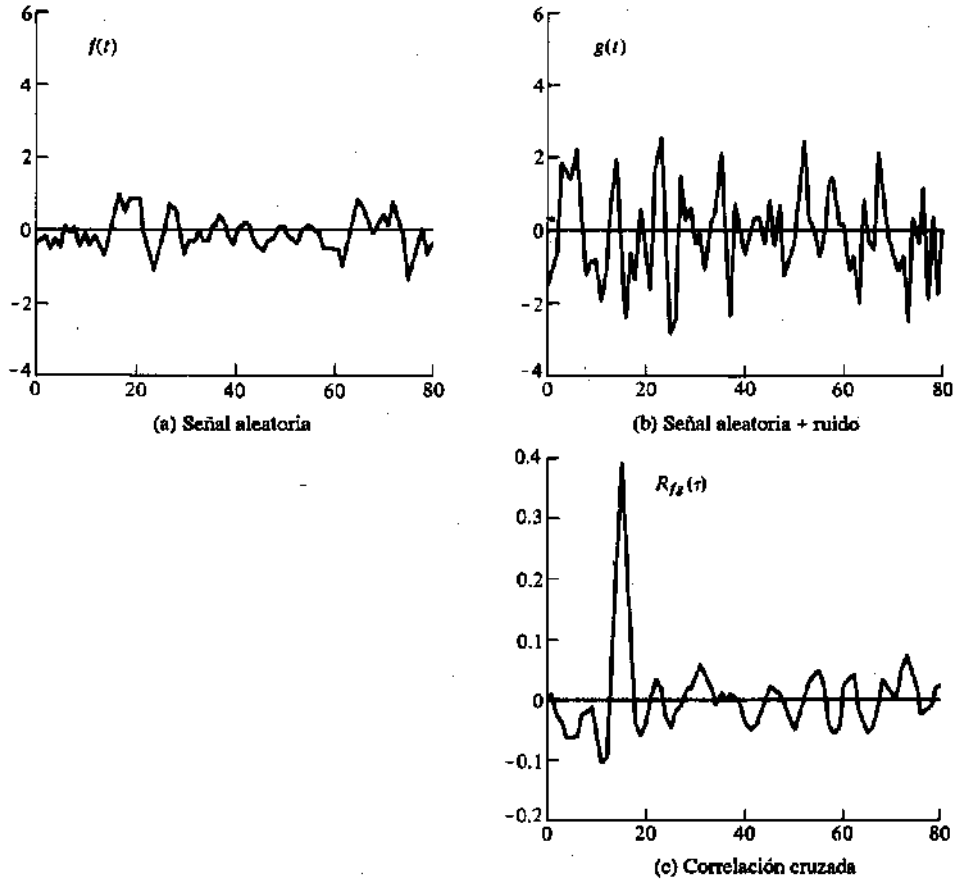
http://libreria-universitaria.blogspot.com

dicas. Además, se pierde el desplazamiento relativo en el tiempo (la fase) entre señales (véase Ej. 4.4.2). Estas desventajas pueden evitarse con una operación estrechamente relacionada cuyo nombre es *correlación cruzada*.

Supóngase que se tienen dos señales $f(t)$ y $g(t)$. La correlación cruzada $R_{fg}(\tau)$ se define como

$$R_{fg}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t)g(t+\tau)\,dt. \tag{4.35}$$

Como ejemplo de la aplicación de la correlación cruzada, se elige una señal aleatoria $f(t)$ como la de la figura 4.9(a) (su función de autocorrelación, $R_f(\tau)$, será similar a la de la figura 4.8d). Como segunda función, $g(t)$, se elige una réplica retardada de $f(t)$ más una segunda señal aleatoria $n(t)$, o sea, $g(t) = f(t - t_0) + n(t)$. La señal compuesta $g(t)$ aparece en la figura 4.9(b). Se supone que el receptor tiene disponible una réplica de $f(t)$ (esto es, en la memoria). Basándose en este conocimiento de $f(t)$, el receptor deberá medir el retardo t_0. Para hacerlo, se toma la función de correlación



(a) Señal aleatoria

(b) Señal aleatoria + ruido

(c) Correlación cruzada

Figura 4.9 Correlación cruzada de una señal aleatoria más ruido.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

cruzada $R_{fg}(\tau)$ definida en la ecuación (4.35). El resultado se muestra en la figura 4.9(c). El valor del retardo t_0 se hace evidente midiéndolo del origen al pico máximo en el resultado.

Las funciones de correlación proporcionan medidas de la semejanza de una señal $f(t)$ con ella misma (en el caso de la autocorrelación) o con otra señal (en el caso de una relación cruzada) comparadas con un desplazamiento relativo τ. Para señales no semejantes el pico de la función de correlación es un indicador de cuán bueno es el ajuste entre ambas señales.

Tanto la autocorrelación como la correlación cruzada son eficaces instrumentos en el análisis de señales, analítica y prácticamente. En capítulos posteriores habrá ocasión de emplearlos.

4.5 ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE CORRELACIÓN

En la sección anterior encontramos que la transformada de Fourier de la función de correlación proporciona la densidad espectral de potencia. En esta sección se estudiarán en forma breve varias propiedades adicionales de las funciones de correlación.

4.5.1 Simetría

Examinando la función de correlación para argumentos negativos, se tiene

$$R_f(-\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t) f(t-\tau)\, dt\,,$$

$$R_f(-\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(\zeta+\tau) f(\zeta)\, d\zeta\,,$$

$$R_f(-\tau) = R_f^*(\tau)\,. \tag{4.36}$$

Por tanto, la parte real de $R_f(\tau)$ es una función par; y si $f(t)$ tiene valor real, entonces $S_f(-\omega) = S_f^*(\omega)$ [véanse Ecs. (3.38) y (4.34)].

4.5.2 Valor cuadrático medio

La función de autocorrelación $R_f(\tau)$ evaluada en $\tau = 0$ es igual al valor cuadrático medio de la señal $f(t)$ [véase Ec. (4.24)].

$$R_f(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t) f(t)\, dt\,,$$

$$R_f(0) = \overline{f^2(t)}\,. \tag{4.37}$$

Se deja al lector verificar que la ecuación (4.37) concuerde con las ecuaciones (4.10) y (4.34) cuando se relacionan con un ohm.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

4.5.3 Periodicidad

Si $f(t + T) = f(t)$ para toda t, entonces

$$R_f(\tau + T) = R_f(\tau) \quad \text{para toda } \tau. \tag{4.38}$$

La demostración se efectúa fácilmente realizando las integrales y aplicando la definición de periodicidad.

4.5.4 ★ Valor promedio

Si $f(t)$ se representa por medio de una función $x(t)$ con un valor promedio cero más un valor promedio representado por m_1, y de manera semejante se representa $g(t)$ como una función $y(t)$ con valor promedio cero, más un valor promedio m_2, las ecuaciones se pueden escribir como

$$f(t) = x(t) + m_1,$$
$$g(t) = y(t) + m_2.$$

La correlación cruzada de $f(t)$ y $g(t)$ es

$$R_{fg}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x^*(t) + m_1][y(t + \tau) + m_2]\,dt.$$

Observando que los valores promedio de $x(t)$ y $y(t)$ son cero por definición, se tiene

$$R_{fg}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)y(t + \tau)\,dt + m_1m_2.$$

El valor promedio de la función de correlación cruzada es

$$\overline{R_{fg}(\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)y(t + \tau)\,dt\,d\tau + m_1m_2.$$

Intercambiando el orden de integración, se tiene

$$\overline{R_{fg}(\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t + \tau)\,d\tau\,dt + m_1m_2.$$

Debido a que $\overline{y(t + \tau)}$ es cero, se obtiene el resultado

$$\overline{R_{fg}(\tau)} = m_1m_2. \tag{4.39}$$

En consecuencia, el valor promedio de la correlación cruzada de las funciones $f(t)$ y $g(t)$ es igual al producto de sus valores promedio. Si el valor promedio de cualquier función es cero, entonces el valor promedio de su correlación cruzada es cero. El caso para la autocorrelación se obtiene de inmediato de este resultado.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Usando la figura 4.7, dibuje la función de autocorrelación de una señal cuadrada simétrica (con valor promedio cero).

RESPUESTA: Véase la figura 6.22(b).

4.5.5 ★ Valor máximo

Se puede demostrar que $R_x(0) \geq R_x(\tau)$ para toda τ (p. ej., véase Fig. 4.7) tomando la magnitud al cuadrado de la función de autocorrelación y usando la desigualdad de Schwarz (véase Ej. 2.5.2). Así que

$$\left|\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^*(t)f(t+\tau)\,dt\right|^2 \leq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|^2\,dt \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(t+\tau)|^2\,dt$$
$$\leq R_f(0)R_f(0)\,.$$

Tomando la raíz cuadrada de ambos miembros de este resultado, se tiene

$$|R_f(\tau)| \leq R_f(0)\,. \tag{4.40}$$

Por consiguiente, la función de autocorrelación $R_f(\tau)$ está acotada por el valor cuadrático medio de la señal $f(t)$. Para una señal periódica, la igualdad de la ecuación (4.40) es válida para múltiplos del periodo a partir del origen (véase Fig. 4.7). Para $f(t)$ no periódica, $R_f(\tau)$ es estrictamente menor que $R_f(0)$ para toda $\tau \neq 0$.

4.5.6 Aditividad

Si se suman dos señales, la función de autocorrelación de la suma puede o no ser la suma de sus respectivas funciones de autocorrelación. Para investigarlo, escribimos $z(t) = x(t) + y(t)$. La función de autocorrelación para la suma de las señales $x(t)$ y $y(t)$ es

$$R_z(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[x^*(t) + y^*(t)][x(t+\tau) + y(t+\tau)]\,dt\,,$$
$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau)\,. \tag{4.41}$$

Se concluye que sólo si las funciones de correlación cruzada son cero [es decir, si $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = 0$] se puede escribir

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau)\,. \tag{4.42}$$

Para la condición $R_{xy}(\tau) = 0$ para toda τ, decimos que $x(t)$ y $y(t)$ *no están correlacionadas*. Más aún, se puede demostrar que $R_{yx}(\tau) = R_{xy}^*(-\tau)$ de modo que si $R_{xy}(\tau) = 0$, entonces $R_{yx}(\tau) = 0$. Obsérvese que si $x(t)$ y $y(t)$ son ortogonales, entonces no están

http://libreria-universitaria.blogspot.com

correlacionadas. Además, como se estudiará en el capítulo 8, si $x(t)$ y $y(t)$ son estadísticamente independientes tampoco están correlacionadas.

Como la densidad espectral de potencia es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación, nuestra conclusión es que si dos señales $x(t)$ y $y(t)$ no están correlacionadas, entonces sus densidades espectrales de potencia son aditivas. En otras palabras, la potencia promedio de la suma de dos señales es la suma de la potencia promedio de las dos señales sólo éstas no están correlacionadas. Cuando las funciones de correlación cruzada no son cero, las señales se deben sumar primero y después se podrá determinar la potencia o, de manera equivalente, se deberán tomar en cuenta las correlaciones cruzadas de la ecuación (4.41).

Una señal senoidal $3\sqrt{2}\cos\omega_1 t$ se suma a otra, $4\sqrt{2}\cos\omega_2 t$. Determine el valor rms de la suma si (a) $\omega_1 = \omega_2$; (b) $\omega_1 \neq \omega_2$.

RESPUESTA: (a) 7; (b) 5.

4.6 FUNCIONES DE CORRELACIÓN PARA SEÑALES DE ENERGÍA FINITA

El concepto de correlación se puede extender a señales de energía finita. Específicamente, definimos la función de autocorrelación $r_f(\tau)$ para una señal $f(t)$ de energía finita como

$$r_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)f(t+\tau)\,dt. \tag{4.43}$$

De manera similar, para señales $f(t)$ y $g(t)$, ambas de energía finita, la función de correlación cruzada $r_{fg}(\tau)$ se define como

$$r_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t+\tau)\,dt. \tag{4.44}$$

Obsérvese que, para funciones de valor real, estas operaciones son las mismas que para la convolución, excepto que la segunda función no se invierte.

La transformada de Fourier de la ecuación (4.43) da

$$\mathcal{F}\{r_f(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)f(t+\tau)\,dt\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau. \tag{4.45}$$

Intercambiando el orden de integración de la ecuación (4.45), se tiene

$$\mathcal{F}\{r_f(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)\int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau\,dt. \tag{4.46}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

El uso de la propiedad de retardo de la transformada de Fourier en el miembro derecho de la ecuación (4.46) da

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)F(\omega)e^{j\omega t}\,dt = |F(\omega)|^2. \tag{4.47}$$

Combinando las ecuaciones (4.46) y (4.47), se obtiene

$$\mathcal{F}\{r_f(\tau)\} = |F(\omega)|^2. \tag{4.48}$$

Al reconocer el segundo miembro de la ecuación (4.48) como la densidad espectral de energía de $f(t)$, se concluye que la densidad espectral de energía es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación para señales de energía finita.

Determine la función de autocorrelación de la señal de pulso rectangular que se muestra en la figura 4.10(a).

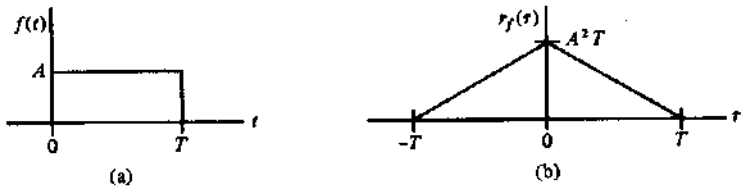


Figura 4.10 (a) Señal de pulso y (b) su función de autocorrelación.

RESPUESTA: Véase la figura 4.10(b).

4.7 RUIDO BLANCO DE BANDA LIMITADA

La densidad espectral de potencia juega un papel fundamental en la descripción del ruido aleatorio promediado en el tiempo. El interés se centrará en el tipo de densidad espectral de potencia que tiende a ser constante para todas las frecuencias. Tal espectro plano contiene todas las componentes de frecuencia con igual proporción de potencia y se designa como blanco, por analogía con la luz blanca.

Si se tiene una densidad espectral de potencia constante de η watts por Hz (medida sobre las frecuencias positivas), y si $n(t)$ tiene valor medio cero, entonces el espectro de potencia del ruido blanco es

$$S_n(\omega) = \eta/2 \quad \text{para toda } \omega\,. \tag{4.49}$$

El factor 1/2 de esta ecuación es necesario para obtener una densidad espectral de potencia bilateral. Nótese que $S_n(\omega)$ se define con base en la potencia. En otras palabras, para una resistencia de R ohms, la ecuación (4.49) debe multiplicarse por R para

http://libreria-universitaria.blogspot.com

convertir a tensión cuadrática media y dividir entre R para convertir a corriente cuadrática media.

En rigor, la ecuación (4.49) no puede usarse para describir ningún proceso físico porque implica una cantidad infinita de potencia; esto es,

$$\overline{n^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\eta/2)\, d\omega \to \infty .$$

No obstante, resulta un buen modelo en muchos casos en que el ancho de banda del dispositivo de medición es menor que las limitaciones de ancho de banda del proceso físico observado. Como las mediciones se restringen a anchos de banda finitos, lo que en realidad interesa es el *ruido blanco de banda limitada*. En otras palabras, si una señal de ruido tiene un densidad espectral de potencia plana que se extiende más allá del ancho de banda de un sistema dado, el sistema percibe el ruido como si fuera efectivamente blanco.

Para ruido blanco de banda limitada, la potencia de ruido es independiente de la elección de la frecuencia de operación. Por ejemplo, supóngase que $n(t)$ es ruido blanco con valor medio cero cuya densidad espectral de potencia es $\eta/2$ watts por Hz. Sobre un ancho de banda B, la potencia del ruido P_n es

$$P_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi B}^{2\pi B} (\eta/2)\, d\omega = \eta B \qquad \text{W}. \tag{4.50}$$

Suponiendo que pasa por un resistor R, la tensión cuadrática media del ruido es[†]

$$\overline{n^2(t)} = RP_n = \eta RB \qquad \text{V}^2. \tag{4.51}$$

Si $n(t)$ es una corriente, entonces

$$\overline{n^2(t)} = P_n/R = \eta GB \qquad \text{amp}^2. \tag{4.52}$$

La transmisión de ruido blanco a través de sistemas lineales invariables en el tiempo ocurre de la manera descrita para la densidad espectral de potencia. Supóngase que se quiere hallar la raíz de la tensión cuadrática media en la entrada de un filtro cuya función de transferencia $H(\omega)$ se conoce. Si la entrada se designa como $n_i(t)$ y la salida como $n_o(t)$, se puede escribir

$$S_{n_o}(\omega) = S_{n_i}(\omega)\,|H(\omega)|^2, \tag{4.53}$$

$$\overline{n_o^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{n_o}(\omega)\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{n_i}(\omega)\,|H(\omega)|^2\, d\omega . \tag{4.54}$$

[†] Nótese que la potencia promedio es un dato (de la densidad espectral) y se quiere hallar la tensión cuadrática media.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Si la densidad espectral del ruido es blanca (se supone un resistor de un ohm), la ecuación (4.54) se convierte en

$$\overline{n_o^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta}{2}|H(\omega)|^2\,d\omega$$

$$= \frac{\eta}{2\pi}\int_{0}^{\infty}|H(\omega)|^2\,d\omega\,. \tag{4.55}$$

En la siguiente sección se examina una importante fuente de ruido que da lugar a ruido blanco de banda limitada sobre un intervalo de frecuencias muy amplio.

4.7.1 Ruido térmico

El ruido térmico se produce como resultado del movimiento caótico de los electrones libres, excitados de manera térmica, en un medio conductor, por ejemplo un resistor. La trayectoria de cada electrón en movimiento se orienta de manera aleatoria debido a las colisiones. El efecto neto es una corriente eléctrica en el resistor, la cual es aleatoria con valor medio cero. Partiendo de consideraciones termodinámicas y de la mecánica cuántica, la densidad espectral de potencia del ruido térmico está dada por

$$S_n(\omega) = \frac{h|\omega|}{\pi[\exp\,(h|\omega|/2\pi kT) - 1]}, \tag{4.56}$$

$$S_n(\omega) \cong 2kT \text{ watts por Hz} \quad \text{para} \quad |\omega| \ll 2\pi kT/h\,, \tag{4.57}$$

donde

T = temperatura del medio conductor en Kelvin (K),
k = constante de Boltzmann = 1.38×10^{-23} joule/K,
h = constante de Planck = 6.625×10^{-34} joule-s.

Para frecuencias mayores que kT/h, el ruido térmico deja de ser blanco. Sin embargo, estas frecuencias son tan altas para señales eléctricas que, en todo caso, puede suponerse con seguridad que el ruido térmico es blanco (p. ej., $kT/h \approx 6000$ GHz para $T = 290$ K).

En la práctica, los resistores pueden producir un poco más de ruido térmico que el indicado por la anterior densidad espectral. Este aumento depende de los materiales y de la geometría, y aquí se desprecia. Nótese que un capacitor ideal no tiene fuentes de ruido térmico porque en un dieléctrico ideal no hay electrones libres. Por otra parte, un inductor ideal tampoco las tiene porque un conductor ideal no puede tener estructura reticular que impida el flujo de electrones.

De las ecuaciones (4.57) y (4.51), la tensión cuadrática media (de circuito abierto) generada por un resistor R en un ancho de banda B es

$$\overline{v^2(t)} = RP_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi B}^{2\pi B} 2kTR\,d\omega\,,$$

$$\overline{v^2(t)} = 4kTRB \qquad \text{V}^2. \tag{4.58}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Usando las ecuaciones (4.57) y (4.52), la corriente cuadrática media (de cortocircuito) generada es

$$\overline{i^2(t)} = GP_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi B}^{2\pi B} 2kTG\, d\omega,$$

$$\overline{i^2(t)} = 4kTGB \qquad \text{amp}^2. \tag{4.59}$$

En la figura 4.11 se muestran los modelos de circuito equivalente de tensión y de corriente para ruido térmico de banda limitada. La resistencia R y la conductancia G se suponen libres de ruido, y el ancho de banda B es el instrumento de medición.

Los problemas de ruido en circuitos que comprenden sólo componentes resistivos pueden resolverse usando estos modelos. El procedimiento general es reemplazar cada resistor ruidoso instalado en serie por el modelo equivalente de tensión, y cada resistor en paralelo por su modelo equivalente de corriente. Nótese que las fuentes de tensión y de corriente se basan en el cuadrático medio. El procedimiento se ilustra en el ejemplo siguiente.

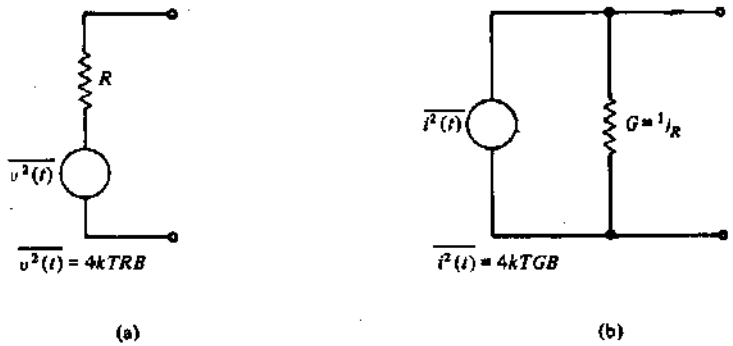


Figura 4.11 Modelos de circuito equivalente de ruido térmico: (a) modelo de tensión; (b) modelo de corriente.

EJEMPLO 4.7.1

Calcule la tensión rms de ruido proveniente de efectos térmicos en dos resistores de 100 Ω y 150 Ω a 300 K, en un ancho de banda de 1 MHz si (a) los resistores se conectan en serie y si (b) se conectan en paralelo.

Solucion (a) Colocando los dos modelos de circuito equivalente en serie y empleando la ecuación (4.58), se obtiene

$$\begin{aligned}\overline{v^2(t)} &= 4kTB(R_1 + R_2)\\ &= 4(1.38 \times 10^{-23})(300)(10^6)(250)\\ &= 4.14 \times 10^{-12}\ \text{V}^2,\\ \sqrt{\overline{v^2(t)}} &= 2.03\ \mu\text{V}.\end{aligned}$$

La resistencia equivalente de la fuente es 250 Ω.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

(b) Colocando los dos en paralelo y usando la ecuación (4.59),

$$\begin{aligned}\overline{i^2(t)} &= 4kTB(G_1 + G_2)\\ &= 4(1.38 \times 10^{-23})(300)(10^6)(0.0167)\\ &= 2.76 \times 10^{-16}\ \text{amp}^2,\\ \sqrt{\overline{i^2(t)}} &= 0.0166\ \mu\text{A}.\end{aligned}$$

La resistencia en paralelo equivalente es

$$R' = \frac{1}{G_1 + G_2} = 60\ \Omega,$$

de manera que

$$\begin{aligned}\sqrt{\overline{v^2(t)}} &= \sqrt{\overline{i^2(t)}}\,R'\\ &= (0.0166 \times 10^{-6})(60)\\ &= 0.997\ \mu\text{V}.\end{aligned}$$

Repita el ejemplo 4.7.1 con la sola excepción de que el resistor de 100 W está a una temperatura de 600 K.

RESPUESTA: (a) 2.41 μV; (b) 1.26 μV.

4.7.2 Transmisión de ruido térmico a través de sistemas lineales

Se ha venido suponiendo que no hay relación en el movimiento caótico de los electrones libres en diferentes resistores. Esto significa que las contribuciones al ruido de este movimiento se suman sobre la base de la potencia para cualquier banda de frecuencia. En estas condiciones, pueden sumarse las densidades espectrales de potencia de diferentes fuentes de ruido o, si la integración es la misma, sumarse los valores cuadráticos medios de la corriente o la tensión en forma directa. Esto es lo que se hizo aquí.

Si existen cualesquiera componentes de almacenaje de energía (es decir, capacitores o inductores), el ancho de banda del sistema puede tener más efecto en la medición del ruido que el propio dispositivo de medición. En este caso, debe tenerse cuidado de "volver a los fundamentos" y tratar la o las fuentes de ruido en términos de densidad espectral de potencia, y después integrar. La integración puede cambiar radicalmente dependiendo del sistema.

Supóngase, por ejemplo, que se conecta un resistor a las terminales de entrada de un sistema lineal que contiene sólo componentes sin ruido, como en la figura 4.12(a). El

http://libreria-universitaria.blogspot.com

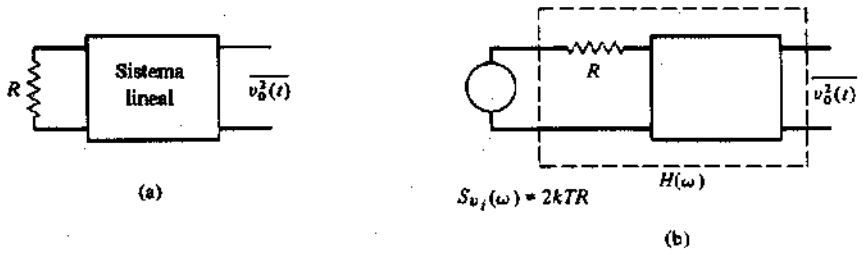


Figura 4.12 Transmisión de ruido térmico a través de un sistema lineal: (a) modelo del sistema; (b) modelo de ruido equivalente.

procedimiento es el siguiente. Primero, la resistencia de entrada se reemplaza por una fuente de tensión de ruido y un resistor R sin ruido, como en la figura 4.12(b). El resistor queda incluido como parte de la función de transferencia del sistema. Con base en la tensión,

$$S_{v_i}(\omega) = 2kTR \tag{4.60}$$

y

$$S_{v_o}(\omega) = S_{v_i}(\omega)\,|H(\omega)|^2. \tag{4.61}$$

La tensión cuadrática media de salida es

$$\overline{v_o^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{v_i}(\omega)\,|H(\omega)|^2\,d\omega\,. \tag{4.62}$$

Para la corriente se obtienen relaciones análogas.

Sin embargo, ¿qué pasa si el propio sistema contiene componentes resistivos ruidosos? Si el sistema además de lineal es pasivo y bilateral, la resistencia efectiva al ruido, referida a la entrada, es[†]

$$R_{eq}(\omega) = \mathcal{R}e\{Z(\omega)\}\,, \tag{4.63}$$

donde $Z(\omega)$ es la impedancia de entrada, con valor complejo, del sistema. Los demás cálculos se efectúan de manera similar a la explicada antes. Por ejemplo, la densidad espectral de tensión de ruido sería [véase Ec. (4.60)].

$$S_v(\omega) = 2kTR_{eq}(\omega)\,. \tag{4.64}$$

Nótese que, en general, $R_{eq}(\omega)$ es función de la frecuencia.

EJEMPLO 4.7.2

Calcule la tensión rms de ruido a través de un capacitor C si éste se conecta en paralelo con un resistor ruidoso R.

[†] En redes más complicadas que incluyen accesorios activos y unilaterales, es usual establecer la tensión de ruido equivalente con relación a la entrada como parte de los datos medidos.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Solución En la figura 4.13 se muestra el circuito y su modelo de ruido equivalente. El resistor R se reemplaza por un resistor sin ruido en serie con una fuente de tensión de ruido con densidad espectral de potencia

$$S_{v_i}(\omega) = 2kTR \qquad \text{V}^2/\text{Hz}.$$

La función de transferencia del sistema es la de un filtro pasabajas RC:

$$H(\omega) = \frac{1/RC}{j\omega + 1/RC}.$$

El valor cuadrático medio de la salida está dado por la ecuación (4.62):

$$\begin{aligned}\overline{v_o^2(t)} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2kTR\frac{(1/RC)^2}{\omega^2 + (1/RC)^2}\,d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} 2kTR\frac{(1/RC)^2}{\omega^2 + (1/RC)^2}\,d\omega \\ &= \frac{2kT}{\pi C}\tan^{-1}(\omega RC)\Big|_0^{\infty} \\ &= kT/C.\end{aligned}$$

Por tanto, la tensión rms del ruido en la salida es

$$\sqrt{\overline{v_o^2(t)}} = \sqrt{\frac{kT}{C}}.$$

A primera vista, parece extraño que este resultado sea independiente de R dado que ésta es la fuente del ruido. Sin embargo, una observación más cuidadosa revela que aun cuando la tensión cuadrática media de ruido es proporcional a R, el ancho de banda del filtro pasabajas es inversamente proporcional a R. Estos dos efectos se anulan, dando el resultado anterior.

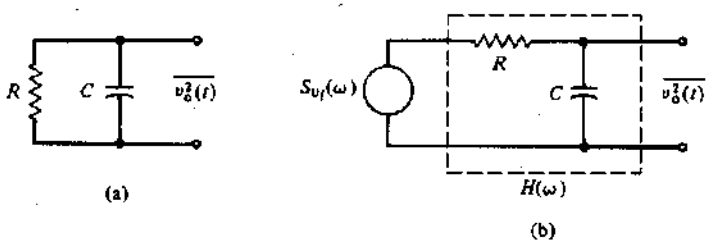


Figura 4.13 (a) Red RC y (b) su modelo de ruido equivalente examinado en el ejemplo 4.7.2.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Calcule la corriente rms de ruido desarrollada a través de un inductor ideal L cuando se conecta a un resistor ruidoso R.

RESPUESTA: $\sqrt{kT/L}$.

4.7.3 Ancho de banda equivalente de ruido

Expresiones como las ecuaciones (4.58) y (4.59) presuponen un filtro ideal de ancho de banda B para la medición de ruido. En la práctica, es conveniente combinar las características limitantes del ancho de banda de un sistema definiendo el ancho de banda equivalente del ruido. Este ancho de banda, B_N, es el de un filtro ideal que da la misma potencia de ruido que el sistema real. El ancho de banda equivalente para ruido blanco puede determinarse con facilidad como sigue.

De la definición de ruido blanco, la densidad espectral de potencia de entrada es una constante, $\eta/2$. La tensión cuadrática media de salida de un sistema lineal está dada en la ecuación (4.62). Entonces, la tensión cuadrática media de salida $\overline{v_0^2(t)}$, a través de un resistor de un ohm es [véase Ec. (4.55)]

$$\overline{v_0^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta}{2}|H(\omega)|^2\,d\omega$$

$$= \frac{\eta}{2\pi}\int_{0}^{\infty}|H(\omega)|^2\,d\omega\,. \tag{4.65}$$

La integral definida de esta ecuación es constante para una función de transferencia en frecuencia de un sistema dado, $H(\omega)$. (Aquí se está empleando la función de transferencia en tensión porque es la que se utiliza con más frecuencia.)

Sería conveniente usar un enfoque simplificado (como el que se utilizó para los resistores) en el que la densidad espectral de potencia sea blanca dentro de algún ancho de banda efectivo del sistema. Esto puede hacerse definiendo un *ancho de banda equivalente del ruido* B_N tal que (1) la densidad espectral de potencia en la salida del filtro sea blanca en B_N y cero en otro lugar, formando una densidad espectral rectangular equivalente; y que (2) el área bajo esta densidad espectral rectangular sea igual al área de la densidad espectral en la salida del filtro. Esto se ilustra en la figura 4.14.

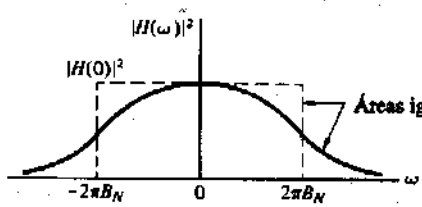


Figura 4.14 Definición gráfica del ancho de banda equivalente del ruido.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Designando la frecuencia central del sistema como ω_0 ($\omega_0 = 0$ para un sistema pasabajas), la ganancia de tensión en el centro de banda del sistema es $|H(\omega_0)|^2$ y se puede escribir

$$\overline{v_o^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi B_N}^{2\pi B_N} (\eta/2)\,|H(\omega_0)|^2\,d\omega\,,$$

$$\overline{v_o^2(t)} = \eta|H(\omega_0)|^2 B_N\,. \tag{4.66}$$

Igualando los dos lados derechos de las ecuaciones (4.65) y (4.66), se tiene

$$B_N = \frac{1}{2\pi}\frac{\displaystyle\int_0^\infty |H(\omega)|^2\,d\omega}{|H(\omega_0)|^2}\,. \tag{4.67}$$

Esta definición del ancho de banda equivalente del ruido B_N permite analizar sistemas lineales prácticos por medio de sus equivalentes idealizados. Por ejemplo, el ancho de banda equivalente del ruido del filtro pasabajas RC del ejemplo 4.7.2 es $B_N = 1/(4RC)$. Por tanto, la tensión cuadrática media en la salida del filtro es $\overline{v_0^2(t)} = 4kTRB_N = kT/C$.

EJEMPLO 4.7.3

Calcule el ancho de banda a –3 dB y el ancho de banda equivalente del ruido de un filtro con la siguiente característica de transferencia en magnitud:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^4}}\,.$$

Solución Como $H(0) = 1$, el ancho de banda a –3 dB se halla resolviendo

$$|H(\omega_1)| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{o} \quad \omega_1 = 1; \qquad f_1 = \frac{1}{2\pi} = 0.159 \text{ Hz}\,.$$

De la ecuación (4.67), el ancho de banda equivalente es (véase Ap. A)

$$B_N = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{1+\omega^4}\,d\omega = \sqrt{2}/8$$

$$= 0.177 \text{ Hz}\,.$$

O sea que para este filtro particular (conocido como filtro Butterworth de segundo orden), el ancho de banda equivalente del ruido es aproximadamente 11% mayor que el ancho de banda a –3 dB.

Calcule el ancho de banda equivalente del ruido del filtro (tipo RC) cuya característica de transferencia en magnitud es $|H(\omega)| = 1/\sqrt{1+\omega^2}$. Compare el resultado con el ancho de banda a –3 dB.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

RESPUESTA: 0.250 Hz; 57% mayor.
[*Nota*: A medida que el orden del filtro aumenta, el ancho de banda a -3 dB y el ancho de banda equivalente del ruido se acercan más.]

4.7.4 Potencia disponible y temperatura del ruido

De las ecuaciones (4.49), (4.50) y (4.57), la potencia de ruido térmico generada en un resistor R es

$$P_n = 4kTB\,. \tag{4.68}$$

¿Cuánta potencia de ruido se puede extraer? Agregando una carga resistiva acoplada R (sin ruido) para la máxima transferencia de potencia, se halla que la tensión transferida es justamente la mitad de la tensión a circuito abierto. Entonces, la máxima potencia disponible, P_a, es un cuarto de la dada en la ecuación (4.68), o

$$P_a = kTB\,. \tag{4.69}$$

P_a es la máxima potencia de ruido térmico que puede extraerse de un resistor ruidoso.

Examinando la ecuación (4.69), se ve que k es constante y B es el ancho de banda equivalente del ruido, constante para un sistema dado. Entonces, la temperatura T está en relación directa con la potencia de ruido disponible. Una forma conveniente de describir la potencia de ruido de entrada es especificarla como una temperatura de ruido. Es decir, la *temperatura de ruido* especifica la potencia de ruido térmico en una resistencia acoplada.

El resistor sin ruido usado con propósitos de balance es, por supuesto, ficticio. En la práctica, es usual conectar un amplificador (receptor) que tiene una resistencia de entrada R para la máxima transferencia de potencia. Un modelo simplificado de esto es una resistencia de entrada R a una temperatura de ruido equivalente T_e seguida por una ganancia de potencia G_p. En otras palabras, la temperatura de ruido T_e es la temperatura efectiva de una fuente de ruido térmico blanco en la entrada del sistema, que deberá producir la misma potencia de ruido en la salida de un sistema sin ruido equivalente. Por ejemplo, algunos amplificadores de muy bajo ruido tienen temperaturas de ruido equivalentes como de 10 K a 30 K, mientras que los receptores de radio normales pueden tener temperaturas de ruido del orden de 1000 K.

Nótese que la temperatura de ruido equivalente no es por fuerza la temperatura ambiente del amplificador. Las temperaturas de ruido equivalentes por debajo de la ambiente son posibles con el uso de amplificadores con un componente de baja resistencia en la característica de ganancia (p. ej., los amplificadores paramétricos). A veces también se emplea el enfriamiento criogénico para reducir la temperatura de ruido efectiva.

En la figura 4.15 se muestra un circuito equivalente de un receptor que opera en presencia de ruido térmico, donde todo el ruido (blanco) generado por el amplificador se incluye en la temperatura de ruido equivalente T_e. En T_e también pueden incluirse los efectos del ruido térmico de la resistencia de salida R_o. Sin embargo, si la ganancia de

http://libreria-universitaria.blogspot.com

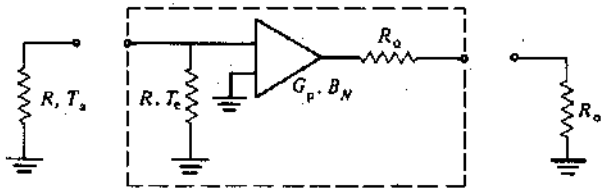


Figura 4.15 Circuito equivalente de un receptor para ruido térmico.

potencia G_p es apreciable, el efecto de R_o en el ruido de salida total es insignificante, como se muestra en el ejemplo siguiente.

La temperatura de ruido de la resistencia acoplada que está conectada a la entrada del receptor suele ajustarse a 290 K para comprobación. En sistemas en funcionamiento, T_a representa la temperatura de ruido efectiva del espacio y del medio ruidoso circundante, tal como se percibe a través de la antena, así como cualesquier pérdidas de transmisión desde la antena hasta las terminales de entrada del receptor.

EJEMPLO 4.7.4

Se quiere diseñar un amplificador de alta ganancia con etapas en cascada. La ganancia de potencia de la primera etapa está fija en 20 dB. Las siguientes tienen control de ganancia, aunque la máxima ganancia por etapa es de 20 dB. La máxima ganancia neta de potencia del amplificador debe ser tal que el nivel de potencia del ruido térmico generado internamente sea de 20 miliwatts en la salida. Determine el número mínimo de etapas requeridas si $T_e = 600$ K, $B_N = 10$ MHz.†

Solución La potencia de ruido generada internamente en la primera etapa, con referencia a la entrada, es

$$P_a = kT_eB$$
$$= (1.38 \times 10^{-23})(600)(10^7) = 8.28 \times 10^{-14} \text{ W}.$$

Con 20 dB de ganancia, esto se convierte en 8.28×10^{-12} watts de potencia de ruido en la entrada de la segunda etapa. La potencia de ruido disponible en la entrada de la segunda etapa, suministrada por la primera, sería de nuevo del orden de 8.28×10^{-12} watts, más 8.28×10^{-14} watts de una potencia originada por el ruido térmico de la segunda etapa (y referido a su entrada). No obstante, la contribución de la segunda etapa es casi despreciable (1%) comparada con la potencia de ruido proveniente de la primera etapa. Por tanto, nuestra conclusión es que *el ruido de los amplificadores en cascada principalmente depende sólo del ruido de la primera etapa, si ésta tiene ganancia apreciable.*

† El ancho de banda equivalente del ruido varía un poco con el número de etapas del amplificador. Aquí se ignorará este cambio.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La ganancia máxima requerida, G_p [$G_p = |H(\omega_0)|^2$] es

$$\begin{aligned} G_p &= P_o/P_a \\ &= 20 \times 10^{-3}/(8.28 \times 10^{-14}) = 2.42 \times 10^{11} \\ &\cong 114 \text{ dB} . \end{aligned}$$

Por tanto, el amplificador necesitará un mínimo de seis (6) etapas para cubrir las especificaciones.

4.7.5 ★ Factor de ruido

Es conveniente desarrollar alguna forma concisa de establecer la temperatura de ruido equivalente de un amplificador, con relación a una norma fija. Esto conduce a la definición de factor de ruido que puede usarse como punto de referencia en la comparación entre amplificadores para señales de bajo nivel.

Sean $s_i(t)$ y $s_o(t)$ las tensiones (o corrientes) de las señales de entrada y salida de un sistema dado, respectivamente, y sean $n_i(t)$ y $n_o(t)$ las tensiones (o corrientes) de los ruidos de entrada y salida. La razón señal a ruido, $(S/N)_i$, de la entrada es,†

$$(S/N)_i = \overline{s_i^2(t)}/\overline{n_i^2(t)} , \tag{4.70}$$

y la de la salida es

$$(S/N)_o = \overline{s_o^2(t)}/\overline{n_o^2(t)} . \tag{4.71}$$

Como el sistema siempre agrega algo de ruido, la razón señal a ruido de la entrada es mayor que la de la salida. Para medir la degradación se define un factor de ruido, F, como el cociente entre la razón señal a ruido de la entrada y la de la salida:

$$F \triangleq \frac{(S/N)_i}{(S/N)_o} . \tag{4.72}$$

Por definición, la potencia de ruido en la entrada en la ecuación (4.72) *equivale a la potencia de ruido térmico producida por un resistor conectado en la entrada a una temperatura* $T_0 = 290$ K. El factor de ruido de un sistema perfecto es la unidad, y la introducción de ruido adicional hace que dicho factor sea mayor que uno.

Pueden hacerse algunas simplificaciones convenientes cuando en el sistema sólo hay ruido térmico. Si se aplica una señal $s_i(t)$ y un ruido térmico $n_i(t)$ a una temperatura T_0 en la entrada de un amplificador con ganancia de potencia G_p y ancho de banda B, la potencia de ruido disponible en la entrada es

$$N_i = kT_0B . \tag{4.73}$$

† El factor de resistencia se cancela, por lo cual ésta también es una razón de potencia.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La potencia de la señal en la salida es

$$S_o = S_i G_p. \tag{4.74}$$

El amplificador agrega algún ruido térmico. Representando este ruido con una temperatura de ruido equivalente T_e referida a la entrada del amplificador, se tiene

$$N_o = kT_0BG_p + kT_eBG_p. \tag{4.75}$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.73) a (4.75) en la (4.72), el factor de ruido del amplificador es

$$F = 1 + \frac{T_e}{T_0}. \tag{4.76}$$

Este resultado es tan simple y fácil de aplicar que aunque no todas las fuentes de ruido sean térmicas, los efectos se incluyen con frecuencia en una temperatura de ruido equivalente usando datos experimentales.[1] Es bastante común expresar el factor de ruido en decibeles:

$$F_{dB} = 10 \log_{10}(F).$$

Nótese que el factor de ruido de un sistema ideal que no genera ruido es $F = 1$, y que la porción del factor de ruido correspondiente al ruido generado internamente en cualquier sistema es $(F-1)$.

EJEMPLO 4.7.5

Un amplificador tiene un factor de ruido de 4 dB, un ancho de banda de ruido de 500 kHz y una resistencia de entrada de 50 Ω. Calcule la señal rms de entrada que proporciona una razón señal a ruido de uno en la salida cuando el amplificador se conecta a una entrada de 50 Ω a 290 K.

Solución La potencia de entrada disponible es

$$P_n = kT_0B = 2.00 \times 10^{-15}\ \text{W},$$

de manera que

$$\overline{n_i^2(t)} = P_nR = 1.00 \times 10^{-13}\ \text{V}^2,$$

$$F = 4\ \text{dB} = 2.51.$$

De la ecuación (4.72), se tiene

$$(S/N)_i = F(S/N)_o = F.$$

La señal de entrada requerida es

$$\overline{s_i^2(t)} = (2.51)(1.00 \times 10^{-13})\ \text{V}^2$$

$$\sqrt{\overline{s_i^2(t)}} = 0.501\ \mu\text{V}.$$

[1] El valor estándar de T_0 es 290 K.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJEMPLO 4.7.6

Un atenuador resistivo (p. ej., un cable coaxial o una guía de onda) a una temperatura T_0 tiene resistencias de entrada y salida acopladas y una atenuación (en potencia) de α, con $\alpha > 1$. Determine la temperatura de ruido equivalente y el factor de ruido del atenuador cuando éste y la fuente de entrada se encuentran a T_0.

Solución Usando la ecuación (4.75) y puesto que $G_p = 1/\alpha$,

$$N_o = kT_0B(1/\alpha) + kT_eB(1/\alpha).$$

Considerando las terminales de salida, el atenuador resulta enteramente resistivo y tiene una temperatura T_0 de manera que

$$N_o = kT_0B.$$

Igualando estas dos expresiones, se obtiene

$$T_e = (\alpha - 1)T_0.$$

Y la ecuación (4.76) da

$$F = \alpha.$$

Puede usarse un procedimiento similar si el atenuador está a otra temperatura.

EJEMPLO 4.7.7

Un amplificador multietapas tiene ganancias de potencia por etapa G_1, G_2, G_3, ..., y factores de ruido F_1, F_2, F_3, ..., respectivamente. Muestre que el factor de ruido global es

$$F = F_1 + [(F_2 - 1)/G_1] + [(F_3 - 1)/G_1G_2] + \cdots$$

y que, por tanto, la primera etapa es la más significativa en la determinación del factor de ruido global si $G_1 \gg 1$.

Solución El resultado se obtiene fácilmente si se considera que el ruido introducido por cada etapa es amplificado sólo por ésta y las sucesivas. Suponga un amplificador de 3 etapas con temperaturas de ruido equivalentes T_{e1}, T_{e2}, T_{e3}:

$$S_o = S_iG_1G_2G_3,$$

$$N_i = kT_0B,$$

$$\begin{aligned} N_o &= kT_0BG_1G_2G_3 + kT_{e_1}BG_1G_2G_3 + kT_{e_2}BG_2G_3 + kT_{e_3}BG_3 \\ &= N_iG_1G_2G_3 + (F_1 - 1)N_iG_1G_2G_3 + (F_2 - 1)N_iG_2G_3 + (F_3 - 1)N_iG_3 \\ &= F_1N_iG_1G_2G_3 + (F_2 - 1)N_iG_2G_3 + (F_3 - 1)N_iG_3, \end{aligned}$$

$$F = \frac{S_i/N_i}{S_o/N_o} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1G_2}.$$

Este resultado puede extenderse directamente.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Esto demuestra las ventajas de usar una primera etapa de amplificación no sólo con un factor de bajo ruido (F_1) sino también con alta ganancia (G_1). En el ejemplo 4.7.6 vemos que una línea de transmisión con pérdidas carece de ambos. Por ello se emplea a menudo cierta amplificación en las etapas de bajo ruido en (o cerca de) la antena de los sistemas receptores de bajo ruido antes de transmitir la señal (por medio de una línea de transmisión) al receptor principal.

El receptor de un satélite de transmisiones geoestacionario a 2 GHz consta de un preamplificador de antena con una temperatura de ruido de 127 K y una ganancia de 20 dB, seguido de un amplificador con un factor de ruido de 12 dB y una ganancia de 80 dB. Calcule el factor de ruido global y la temperatura de ruido equivalente del receptor.

RESPUESTA: 2.0 dB; 170 K.

4.7.6 ★ Temperatura de ruido del espacio

Cuando se conecta una antena a la entrada de un receptor, es conveniente representarla con un resistor acoplado a dicha entrada y cuya temperatura simboliza el ruido efectivo del espacio y el ruido ambiental circundante percibido por la antena. En la mayoría de los casos, esa temperatura diferirá sustancialmente de 290 K.

Si el resistor de entrada, que ahora representa a una antena, se encuentra a cierta temperatura arbitraria T_a, la ecuación (4.75) puede modificarse para dar

$$N_o = kT_aBG_p + kT_eBG_p,$$
$$N_o = kB(T_a + T_e)G_p. \tag{4.77}$$

La temperatura de ruido equivalente de una antena es, pues, fácil de interpretar y puede compararse directamente con la temperatura de ruido del receptor. Nótese que cuando T_a y T_e contribuyen por igual al ruido de salida, la mayor aproximación posible a un receptor perfecto se limita al factor 2 en el mejoramiento de la razón señal a ruido. Por tanto, los esfuerzos para obtener una temperatura de ruido equivalente baja en un receptor sólo rinden dividendos si la temperatura de ruido de la antena es baja.

Las temperaturas de ruido promedio de una antena son principalmente función de la frecuencia y de la orientación. En la figura 4.16 se muestra una gráfica que ilustra algunas de las principales fuentes de temperatura de ruido en las antenas. Aunque el concepto de factor de ruido es útil para probar y comparar receptores, el de temperatura de ruido equivalente es más útil en los cálculos del comportamiento del sistema real.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

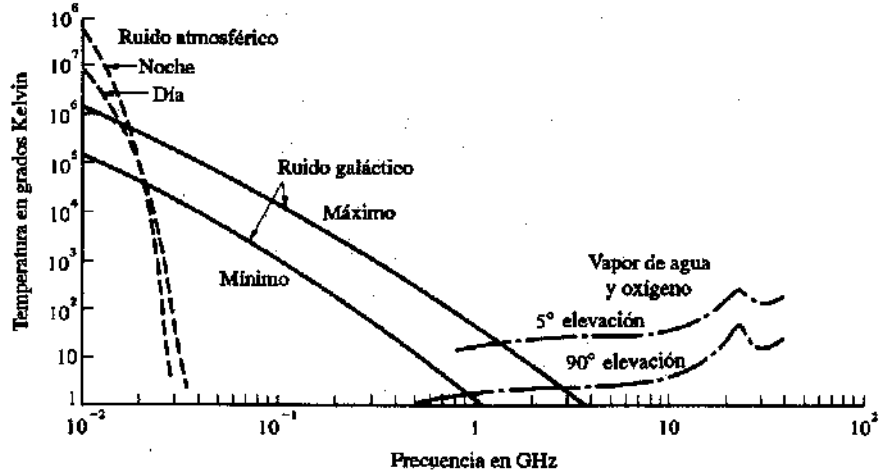


Figura 4.16 Algunas temperaturas promedio de ruido celeste.

La fuente principal del ruido de antena por debajo de 30 MHz es el ruido atmosférico debido principalmente a los relámpagos. Los efectos de propagación que hacen posible la comunicación a larga distancia en estas frecuencias bajas, también proporcionan buena propagación de los fenómenos eléctricos que ocurren en todo el mundo. El ruido galáctico o cósmico contribuye especialmente por arriba de 30 MHz y hasta los GHz. Este ruido proviene de la radiación en el espacio exterior; para conos de radiación, la intensidad del ruido galáctico es función de la orientación de la antena. El Sol es también una fuente activa de radiación, pero sus efectos se localizan más bien en dirección angular.

El vapor de agua y el oxígeno actúan como atenuadores de energía radiante, particularmente alrededor de los 23 GHz. Estos efectos atenuadores no sólo reducen la fuerza de la señal sino que actúan como fuentes de ruido térmico (véase Ej. 4.7.6). El intervalo de frecuencias de alrededor de 2 a 8 GHz, acotado por los efectos del ruido galáctico y el ruido debido al oxígeno y al vapor de agua se llama "ventana de bajo ruido". Es el intervalo preferido para receptores de bajo ruido en telemetría espacial y radiotelescopios.

EJEMPLO 4.7.8

El receptor del ejercicio 4.7.4 tiene un ancho de banda de 1 MHz. La ganancia de la antena receptora es de 40 dB y su temperatura de ruido, de 59 K. Si la ganancia de la antena del satélite es de 6 dB y las pérdidas de trayectoria calculadas son de 190 dB, ¿cuál es la mínima potencia de transmisión del satélite requerida para conseguir una razón *S/N* de 14 dB en la salida del receptor?

Solución Véase la tabla 4.1.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

TABLA 4.1 Estimación de *S/N* para el problema de comunicación de tierra a un satélite geoestacionario del ejemplo 4.7.8

Temperatura de ruido equivalente del receptor	170 K	
Temperatura de ruido de la antena (dato)	59 K	
Temperatura de ruido total	229 K	
Temperatura de ruido total, en dB por encima de 1 K	23.6	
Constante de Boltzmann, en dB/K/Hz	−228.6	
Ancho de banda (dato), en dB por encima de 1 Hz	60.0	
Potencia de ruido total del receptor	−145.0 dB	
Disponibilidad de *S/N* del receptor (dato)	14.0 dB	
Potencia mínima de la señal del receptor	−131.0 dB	
Ganancia del satélite receptor (dato)	40 dB	
Ganancia de la antena del satélite transmisor (dato)	6 dB	
Mínima potencia detectable de la señal		−177.0 dB
Pérdidas de trayectoria (dato)		190 dB
Mínima potencia requerida del satélite transmisor		13.0 dB
		(20 W)

4.7.7 ★ Antenas y enlaces de comunicación

Como el ruido térmico es una limitación fundamental en los sistemas de comunicación, se extenderá un poco más el análisis sobre la forma en que se puede manejar la propagación de potencia del transmisor al receptor en términos de cálculos de señal a ruido.

En la figura 4.17 se ilustra un modelo de sistema de comunicación para la transmisión de potencia a través del espacio vacío, como sucede, por ejemplo, en un sistema de comunicación por satélite. Dicho modelo se denomina *enlace de comunicación*. El transmisor proporciona potencia a la antena transmisora, la cual es directiva y radia potencia en un cono de radiación de ancho θ hacia el receptor.

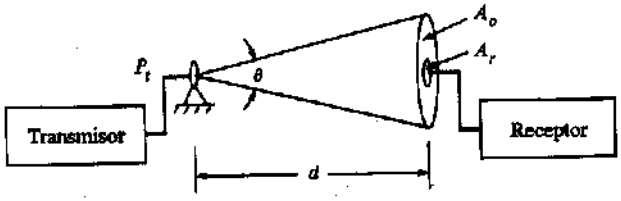


Figura 4.17 Modelo de enlace de comunicación.

Si la antena de transmisión fuera isotrópica, radiaría potencia de manera uniforme en todas direcciones, y una superficie con densidad de potencia constante a una distancia d sería una superficie esférica de área $A = 4\pi d^2$. Un parámetro que se utiliza para describir la directividad o "ganancia" de la antena se define como la

http://libreria-universitaria.blogspot.com

relación entre el área iluminada por una antena isotrópica y la iluminada por la antena direccional:

$$G_t = \frac{4\pi d^2}{A_o}. \tag{4.78}$$

El cono de radiación θ es inversamente proporcional a la ganancia de la antena. La ganancia de la antena G_t suele expresarse en dB, $10 \log_{10} G_t$.

El receptor se caracteriza por un área efectiva A_r de su antena y por su temperatura de ruido neta $T = T_a + T_e$. La potencia recibida es la fracción A_r/A_o de la potencia transmitida (véase Fig. 4.17):

$$P_r = P_t \frac{A_r}{A_o},$$

o, usando la ecuación (4.78),

$$P_r = P_t G_t \frac{A_r}{4\pi d^2}. \tag{4.79}$$

El producto $P_t G_t$ se denomina *potencia efectiva isotrópica radiada* (EIRP, *effective isotropic radiated power*) del transmisor. Es la potencia efectiva que radiaría una antena isotrópica hacia el receptor.

El papel de una antena receptora instalada de manera correcta es enfocar la potencia radiada, a través de la fase, para extraer la máxima potencia de la señal. Existen limitaciones, basadas en criterios ópticos, en cuanto a lo bien que se pueda lograr. Por analogía con la óptica, la directividad o ganancia G_r de la antena y su área efectiva A_r están relacionadas por

$$G_r = \frac{4\pi A_r}{\lambda^2}, \tag{4.80}$$

donde λ es la longitud de onda de la radiación. El área efectiva A_r se relaciona principalmente con la forma física y la dimensión de la antena. Por ejemplo, un reflector parabólico tiene un área efectiva, A_r, en el intervalo de 54% a 65% del área física real $\pi D^2/4$, donde D es el diámetro del "plato". Por tanto, la ganancia de potencia para un reflector parabólico es $G_r \approx 0.55(\pi D/\lambda)^2$.

Existe una relación de reciprocidad entre una antena que se usa para transmisión y la misma antena que se usa para recepción. Por tanto, los efectos de fase que se usan en recepción son también los que se utilizan para hacer el haz más directivo en la antena transmisora. Una antena dada tiene los mismos patrones de directividad en ambos casos. Combinando las ecuaciones (4.79) y (4.80), se obtiene

$$P_r = P_t G_t G_r \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2, \tag{4.81}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

donde el factor $(4\pi d/\lambda)^2$ se llama pérdida de trayectoria en el espacio libre.† El hecho de que esta pérdida sea dependiente de la frecuencia se debe a que la antena receptora se describe en términos de la ganancia de antena, en vez de hacerlo en función de su área efectiva. Para un tamaño de antena fijo, esta dependencia aparente de la frecuencia se cancela por la dependencia inversa de la frecuencia en la ganancia de antena receptora.

Aquí el parámetro de recepción importante no es la potencia de la señal recibida, sino su relación con la potencia del ruido recibido. Si la fuente dominante de ruido es ruido térmico, entonces la potencia del ruido es $P_n = kT_rB$, donde T_r es la temperatura de ruido efectiva debido tanto al ruido del receptor como al de la antena. Al dividir la ecuación (4.81) por la potencia del ruido, la razón señal a ruido recibida es

$$\frac{P_r}{P_n} = \frac{1}{kB}(P_tG_t)\left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2\left(\frac{G_r}{T_r}\right). \tag{4.82}$$

Aparte de la constante de escala $1/(kB)$, este resultado depende sólo de (1) (P_tG_t), el EIRP del transmisor; (2) la pérdida de trayectoria en el espacio libre, $(4\pi d/\lambda)^2$, y (3) (G_r/T_r), la razón de la ganancia de antena en recepción a la temperatura de ruido neta en el receptor. La razón G_r/T_r se denomina *factor de mérito del receptor*. Para un EIRP y pérdidas de trayectoria dados, la razón G_r/T_r es la que vale en realidad. Es muy importante en diseños de receptores satélite a tierra, en los que son esenciales las antenas grandes y amplificadores de bajo ruido para un adecuado desempeño con respecto a un EIRP relativamente bajo y altas pérdidas de trayectoria en el espacio libre.

Para el transmisor con un EIRP de 80 W del ejemplo 4.7.8, una ganancia de antena en recepción indeterminada G_r y una temperatura de ruido total del receptor T_r, demuestre que

$$(S/N)_{dB} = (G_r/T_r)_{dB} - 2.4\,,$$

donde (G_r/T_r) es el factor de mérito del receptor. [*Nota*: T_r se refiere a 1 K para obtener las unidades correctas en esta expresión.]

4.7.8 ★ Otras fuentes de ruido blanco de banda limitada

Hay otros tipos de ruido que pueden describirse en términos de fuentes de ruido blanco, aunque la aproximación quizá no sea válida sobre un intervalo de frecuencias tan amplio como en el ruido térmico. Un ejemplo es el ruido de descarga.

† Para cálculos, es conveniente expresar la pérdida de trayectoria en el espacio libre como un factor de atenuación (en dB):

$$\alpha = 36.6 + 20\log_{10} f + 20\log_{10} d\,,$$

donde f es la frecuencia central en MHz y d es la distancia de la trayectoria en millas. Las fórmulas para pérdida de trayectoria se pueden encontrar en manuales; véase, por ejemplo, *Reference Data for Engineers: Radio, Electronics, Computer, and Communications*, 7a. ed., E.C. Jordan, editor en jefe, Indianápolis, Howard W. Sams and Company, 1985, Cap. 33.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Este ruido, como el térmico, se debe a la naturaleza discreta de la materia. Aparece en aparatos físicos cuando una partícula cargada se mueve a través de un gradiente de potencial, sin choques y con un tiempo inicial aleatorio. El promedio sobre muchas de tales partículas proporciona un flujo promedio, aunque siempre habrá fluctuaciones con respecto a éste.

En tubos de vacío, el ruido de descarga surge como resultado de la emisión de electrones al azar en el cátodo. En dispositivos semiconductores, aparece merced a la difusión al azar de portadores minoritarios y a la generación aleatoria y la recombinación de pares hueco-electrón. En estos casos, la densidad espectral de potencia es aproximadamente plana hasta frecuencias del orden de $1/\tau$, donde τ es el tiempo de tránsito o vida media de los portadores de carga. En términos de corriente cuadrática media, la densidad espectral de potencia es

$$S_i(\omega) = q\overline{i(t)} + 2\pi\overline{i(t)}^2\,\delta(\omega) \tag{4.83}$$

donde q es la carga de un electrón = 1.6×10^{-19} coulomb. El primer término de la ecuación (4.83) corresponde a la parte de ca o fluctuación de la corriente de ruido y el segundo al valor medio distinto de cero, $\overline{i(t)}$.

EJEMPLO 4.7.9

Si hay $\bar{n}$ electrones por segundo (en promedio) cruzando una región evacuada en un gradiente de potencial, determine la densidad espectral de la corriente de fluctuación debida al ruido de descarga. Suponga una densidad espectral blanca.

Solución Cada electrón empieza en forma aleatoria y atraviesa la región dada. Sea $i_e(t)$ la corriente inducida en el circuito por un electrón. Como la carga de éste es de q coulombs,

$$\int_{-\infty}^{\infty} i_e(t)\,dt = q.$$

Sea $I_e(\omega)$ la transformada de Fourier de $i_e(t)$:

$$I_e(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} i_e(t)e^{-j\omega t}\,dt,$$

$$I_e(0) = \int_{-\infty}^{\infty} i_e(t)\,dt = q.$$

La densidad espectral de energía de un electrón es $|I_e(\omega)|^2$. Como los tiempos de inicio son al azar, los pulsos de corriente inducida son independientes entre sí y sus densidades espectrales de energía se pueden sumar de modo que†

$$S_i(\omega) = \frac{N}{T}|I_e(\omega)|^2 = \bar{n}|I_e(\omega)|^2.$$

† Ésta es una excepción a la regla de que las densidades espectrales pueden sumarse sin tomar en cuenta la fase, sólo cuando sus fases relativas son de 0° o 180°.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Dada la suposición de ruido blanco,

$$S_i(\omega) = \bar{n}|I_e(0)|^2 = \bar{n}q^2 = q(\bar{n}q) = q\overline{i(t)}.$$

O sea, $S_i(\omega)$ varía en razón directa a la corriente promedio $\overline{i(t)}$.

Otro componente de ruido, que aparece por la división de la corriente en dispositivos multielectrodos, se llama ruido de partición. Esta partición, que es un proceso al azar, introduce ruido debido a que los portadores de carga son discretos.

Tanto los transistores como los tubos de vacío multielectrodo contienen las tres fuentes de ruido: ruido de descarga, ruido de partición y ruido térmico. En general, los tres pueden tratarse como si sus densidades espectrales de potencia fueran planas sobre los anchos de banda que interesan. En ocasiones, los efectos de los ruidos de descarga y de partición se estudian colocando una fuente de ruido térmico equivalente en el modelo de circuito equivalente.

4.8 RESUMEN

La cantidad $|F(\omega)|^2$ describe el monto relativo de energía de una señal dada $f(t)$ en función de la frecuencia y se llama densidad espectral de energía de $f(t)$. De igual forma, la función que describe las contribuciones relativas de potencia de una señal $f(t)$ contra la frecuencia se llama densidad espectral de potencia, $S_f(\omega)$. La densidad espectral de potencia de una señal aperiódica es una función continua de la frecuencia. La densidad espectral de potencia de una señal periódica se aproxima a una serie de funciones impulso localizadas en las frecuencias armónicas de la señal cuando el tiempo de observación es prolongado.

El valor cuadrático medio de una señal puede hallarse partiendo del área bajo su densidad espectral de potencia. La razón de la señal cuadrática media al ruido cuadrático medio se llama razón señal a ruido.

La transformada de Fourier inversa de la densidad espectral de potencia es la función de autocorrelación. Para señales de valor real de duración finita, la función de autocorrelación está dada, aparte de una constante de normalización, por la convolución de $f(-t)$ con $f(t)$. Así mismo, la convolución de $f(-t)$ con una señal diferente se llama función de correlación cruzada.

Dos señales no están correlacionadas si su correlación cruzada es cero. La potencia de la suma de dos señales es igual a la suma de sus potencias si no están correlacionadas. Esta regla puede extenderse a las densidades espectrales de potencia.

La transformada de Fourier inversa de la densidad espectral de energía es la función de autocorrelación de señales de energía finita.

El ruido cuya densidad espectral de potencia es plana se llama *blanco*. El ruido térmico, debido al movimiento caótico de los electrones libres en un medio conductor, es blanco hasta las frecuencias infrarrojas con $S_n(\omega) = 2kT$ watts por Hz.

La potencia disponible del ruido térmico es kTB watts, donde B es el ancho de banda equivalente del ruido del sistema. Una fuente de ruido térmico puede especificarse como

http://libreria-universitaria.blogspot.com

una temperatura equivalente. El factor de ruido es un criterio de evaluación conveniente de los sistemas cuando la temperatura de referencia es $T_0 = 290$ K. El ruido de entrada en una antena se puede especificar como una temperatura de ruido equivalente, llamada temperatura de ruido del espacio.

Los ruidos de descarga y de partición constituyen otros dos tipos de ruido que son blancos sobre intervalos de frecuencia bastante amplios. Los tres tipos de ruido están presentes, en diferentes grados, en dispositivos termoiónicos y semiconductores. Para analizar estas y otras fuentes de ruido blanco de banda limitada se emplea en ocasiones una fuente de ruido equivalente térmico.

Referencias seleccionadas para lectura adicional

1. Mason, S.J. y Zimmerman, H. J., *Electronic Circuits, Signals, and Systems*, Nueva York, John Wiley & Sons, 1960.
   Este libro contiene un buen estudio de la autocorrelación y la correlación cruzada para señales deterministas.
2. Roddy, D., *Satellite Communications*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1989.
   El capítulo 6 es un buen análisis introductorio del diseño de enlaces para comunicación por satélite. El texto contiene también información general acerca de satélites; fácil de leer.
3. Bennett, W. R., *Electrical Noise*, Nueva York, McGraw-Hill, 1960.
   Referencia general sobre las fuentes de ruido eléctrico y los métodos de tratar los efectos del ruido en sistemas lineales.
4. Mumford, W. W. y Scheibe, E. H., *Noise Performance Factors in Communication Systems*, Norwood, Mass., Artech House, 1968.
   Tratado completo del ruido y del uso del factor de ruido en sistemas de comunicación al nivel de este capítulo.
5. Sklar, B., *Digital Communications*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1988.
   En el capítulo 4 se presenta un buen análisis sobre cálculos y consideraciones para diseño de enlaces, con ejemplos de sistemas vía satélite.
6. Panter, P. F., *Communication System Design: Line-of-Sigh and Troposcatter Systems*, Nueva York, McGraw-Hill, 1972.
   El capítulo 6 contiene un examen práctico de los cálculos de *S/N* para el diseño de sistemas de comunicación en un nivel ligeramente más avanzado.
7. Baghdady, E. J. (ed.), *Lectures on Communication Systems Theory*, Nueva York, McGraw-Hill, 1960.
   En los capítulos 15 a 17 se analiza el ruido de antena y en los capítulos 21 y 22 se estudian algunas consideraciones sobre la *S/N* de los sistemas en un nivel más avanzado.
8. Van der Ziel, A., *Noise*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1954.
   Referencia clásica sobre ruido y cálculos de ruido.

PROBLEMAS

4.1.1 La señal de pulso $f(t)$ mostrada en la figura P-4.1.1 se aplica a la entrada de un filtro pasabajas ideal con frecuencia de corte variable, f_c. Encuentre la energía aproximada, con un ohm como base, en la señal de salida para

a) $f_c = 0.1$ Hz;
b) $f_c = 10$ Hz.

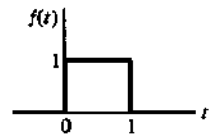


Figura P-4.1.1.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

4.1.2 Un generador de pulsos produce señales de tensión muy angostas, que aquí aproximamos a impulsos. Suponga que el generador tiene una impedancia de salida despreciable. En primer lugar, el generador se conecta a un filtro pasabajas ideal con ancho de banda B Hz y ganancia unitaria en baja frecuencia, y la energía resultante se mide en la salida para un pulso de entrada. En seguida, el generador se conecta a un filtro pasabajas RC (véase Fig. 2.16) y la energía de salida se mide para un pulso de entrada. Deduzca una relación entre B y RC si las energías de salida son iguales.

4.1.3 Se aplica una tensión $f(t) = 10te^{-t}u(t)$ a un resistor de 50 Ω.

a) Calcule la energía total disipada en el resistor.

b) ¿Qué fracción de esta energía se encuentra contenida en un ancho de banda (pasabajas) de un rad/s?

c) ¿Qué fracción de esta energía se encuentra contenida en un ancho de banda de dos rad/s, con una frecuencia central de 4 rad/s?

4.1.4 Cada una de las siguientes señales de pulso se aplica a cuatro filtros (supóngalos ideales, con ganancia unitaria) en paralelo: 0–1, 1–2, 2–3, 3–4 radianes por segundo. Suponga que la impedancia de entrada a este sencillo analizador de espectro está normalizada a un ohm. En la salida de estos filtros existen detectores de energía que proporcionan indicadores de las cuatro contribuciones espectrales. Calcule las cuatro salidas, en decibeles relativos a un joule, para cada una de las siguientes señales de entrada y compare los resultados.

a) $f_1(t) = e^{-t}u(t)$
b) $f_2(t) = te^{-t}u(t)$
c) $f_3(t) = e^{-|t|}$

4.2.1 Cierta señal $f(t)$ tiene la siguiente densidad espectral de potencia (suponga una carga resistiva de un ohm):

$$S_f(\omega) = \left[\frac{1}{1 + \omega^2} + \delta(\omega - 2) + \delta(\omega + 2)\right].$$

a) ¿Cuál es la potencia media total en $f(t)$?

b) ¿Cuál es la potencia media en $f(t)$ en un ancho de banda de 0.9 a 1.1 rad/s?

c) ¿Cuál es la potencia media en $f(t)$ en un ancho de banda de 1.9 a 2.1 rad/s?

d) Encuentre una señal $f(t)$, en términos de cosenos y exponenciales, que satisfaga esta densidad espectral de potencia. ¿Hay otras soluciones?

4.2.2 Se coloca una tensión $f(t) = 4 \cos 20\pi t + 2 \cos 30\pi t$ a través de un ohm. Nótese que ésta es una serie de Fourier.

a) Determine y grafique la densidad espectral de potencia de $f(t)$, e identifique las componentes a la frecuencia fundamental.

b) Calcule la potencia promedio, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia, que es disipada por $f(t)$ en un resistor de un ohm.

c) Determine y grafique la densidad espectral de potencia de $f^2(t)$ (primero realice la operación de elevar al cuadrado, luego escriba el resultado en forma de serie de Fourier y después determine la densidad espectral de potencia).

4.2.3 Una onda cuadrada simétrica (es decir, con valor promedio cero) con amplitud pico de 1 V y periodo T se aplica a la entrada de un amplificador cuya función de transferencia en magnitud es

$$|H(\omega)| = \begin{cases} K(1 + \cos \omega)/2 & |\omega| < 4\pi/T \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

donde K es la ganancia en tensión. Suponga que las impedancias de entrada y salida son resistivas e iguales a un ohm. La ganancia K se ajusta de manera que la salida del amplificador sea igual a 1 W.

a) Determine el valor de K.

b) La señal cuadrada se reemplaza con una onda triangular simétrica (véase Tabla 2.1) con la misma amplitud pico, y un periodo T_1. ¿Cuál es la potencia de salida en las condiciones anteriores si $T_1 = T$?

c) Repita la parte (b) si $T_1 = 2T$.

4.2.4 Un generador senoidal produce la señal $v_i(t) = A \cos \omega_0 t$ y se aplica a la entrada del filtro pasabajas mostrado en la figura P-4.2.4.

a) Usando los métodos de análisis de circuitos en ca, encuentre una expresión para la señal de salida, $v_o(t)$.

b) Encuentre la potencia promedio de $v_o(t)$ a través de R_2 con base en el resultado de la parte (a).

c) Determine la densidad espectral de potencia de $v_i(t)$.

d) Determine la densidad espectral de potencia de $v_o(t)$, y a partir de este resultado encuentre la potencia promedio en $v_o(t)$ a través de R_2.

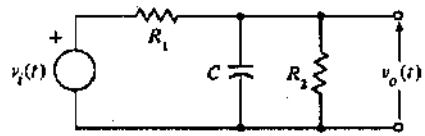


Figura P–4.2.4.

4.3.1 Una senoidal rectificada de onda completa (véase Tabla 2.1) tiene una amplitud pico A y un periodo T.

a) Determine el valor cuadrático medio en el dominio del tiempo.

b) Encuentre una expresión para la densidad espectral de potencia (suponga un ohm).

c) Haciendo uso de los resultados anteriores, demuestre que

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \text{ par}}}^{\infty} \frac{1}{(1 - n^2)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

d) ¿Llega usted a la misma conclusión de la parte (c) cuando utiliza una senoidal rectificada de media onda?

4.3.2 Ruido blanco con densidad espectral de potencia bilateral de $\eta/2$ watts por Hz (suponga una fuente de un ohm), que se suma a una señal descrita por $\sqrt{2} \cos 30\pi t$, se aplica a la entrada de un filtro pasabajas RC (véase Fig. 2.16). El valor rms de la señal en la salida del filtro es de 10 mV, y la relación entre el valor cuadrático medio de la señal y el valor cuadrático medio del ruido en la salida es de 10 dB.

a) Determine el valor de η en términos de la constante de tiempo RC del filtro.

b) Determine la constante de tiempo RC del filtro.

4.3.3 Repita el problema 4.3.2 para el caso en que la densidad espectral de potencia de la señal de entrada es $S_f(\omega) = 1/(1 + \omega^2)$.

4.4.1 a) Determine la densidad espectral de potencia de $F_1 \exp(j\omega_0 t)$ encontrando en primer lugar la función de autocorrelación para luego tomar la transformada de Fourier de ésta.

b) Repita la parte (a) para $[F_1 \exp(j\omega_0 t) + F_2 \exp(j2\omega_0 t)]$.

c) Extienda su resultado de la parte (b) a $\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

4.4.2 La señal de pulso de valor complejo

$$f(t) = \begin{cases} e^{j\omega_c t} & 0 \le t < t_1 \\ 0 & t_1 \le t < T \end{cases}$$

se repite en forma periódica con periodo T, $T > 2t_1$.

a) Encuentre la función de autocorrelación $R_f(\tau)$ y dibuje la parte real.

b) Encuentre y dibuje la densidad espectral de potencia $S_f(\omega)$.

4.4.3 Dibuje a escala la función de autocorrelación de (a) $x(t)$ y (b) $y(t)$ mostradas en la figura P-4.4.3 para $T = 16$.

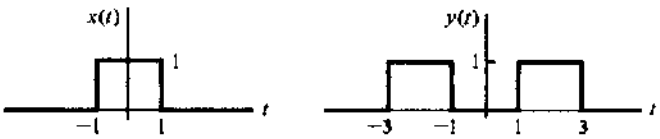


Figura P–4.4.3.

4.5.1 a) Encuentre la función de autocorrelación para la suma de las dos señales senoidales del ejercicio 4.5.2, suponiendo un tiempo de operación de promedio finito T.

b) Determine el valor rms para un tiempo de operación de promedio finito en los dos casos del ejercicio 4.5.2, utilizando el resultado de la parte (a).

c) Determine el valor más pequeño de T, en términos de ω_1, ω_2, para que la segunda respuesta del ejercicio 4.5.2 sea válida.

4.5.2 Una fuente de ruido blanco, $\eta/2$ V²/Hz, se conecta a la entrada del filtro RC mostrado en la figura P-4.2.4.

a) Determine la densidad espectral de salida.

b) Determine la función de autocorrelación de la salida.

c) Determine el valor rms de la salida usando cada uno de los dos resultados anteriores, y compare.

d) ¿Qué pasa si $C \to 0$?

4.5.3 Se transmite una señal senoidal; en recepción, la señal se presenta junto con ruido aditivo. Suponga que la señal y el ruido no están correlacionados. La función de autocorrelación de la cantidad observable en la entrada del receptor es $R(\tau) = a \cos \omega_0\tau + b \exp(-c|\tau|)$. La entrada del receptor contiene un filtro pasabanda (BPF, supóngalo ideal) con ancho de banda B Hz, centrado en $\pm \omega_0$. Encuentre una expresión para la razón S/N de la salida del BPF; exprese su respuesta en términos de la razón S/N en la entrada del BPF.

4.6.1 Determine la función de autocorrelación para cada una de las siguientes señales de pulso tomando en primer lugar la transformada de Fourier, elevando la magnitud al cuadrado y luego tomando la transformada de Fourier inversa.

a) $e^{-at}u(t)$

b) rect (t/t_1)

c) Sa (Wt)

4.6.2 En la figura P-4.6.2 se muestran dos señales de pulso $x(t)$ y $y(t)$. Determine y dibuje $r_x(\tau)$, $r_y(\tau)$ y $r_{xy}(\tau)$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

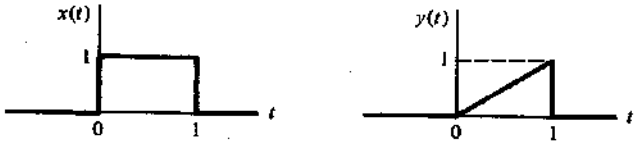


Figura P–4.6.2.

4.6.3 Dos señales de pulso de valor complejo $f(t)$ y $g(t)$ se definen como

$$f(t) = \begin{cases} e^{-j\omega_1 t} & 0 \le t < T \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} e^{j\omega_1 t} & 0 \le t < T \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a) Determine la función de autocorrelación de $f(t)$.

b) Dibuje la parte real de $r_f(\tau)$ para $\omega_1 \gg \pi/T$.

c) Determine y dibuje $r_{fg}(\tau)$ para cada una de las siguientes condiciones:

(i) $\omega_1 = 0$;

(ii) $\omega_1 = \pi/T$.

4.6.4 Se aplica una señal de pulso $f(t)$ a la entrada del filtro transversal de dos derivaciones que se muestra en la figura P-4.6.4. Encuentre una expresión para la función de autocorrelación de la salida, $r_g(\tau)$, en términos de $r_f(\tau)$, suponiendo que a_0, a_1 y T son constantes dadas.

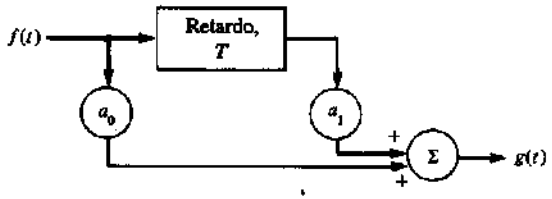


Figura P–4.6.4.

✓ **4.6.5** Utilice métodos numéricos para calcular y graficar la función de autocorrelación de la señal del problema 3.8.10. Utilice ya sea un método directo (similar a la convolución) o la FFT; para el último caso utilice 64 puntos de muestra, asignando ceros a los puntos que se encuentren más allá de la duración de la señal.

4.7.1 En ciertas condiciones se sabe que la tensión térmica rms a través de la combinación en serie de dos resistores R_1, R_2 es γ veces la que aparece a través de la combinación en paralelo de los dos resistores.

a) Determine el límite inferior de γ si ambos resistores tienen la misma temperatura.

b) Encuentre la relación entre R_1 y R_2 requerida para alcanzar este límite.

4.7.2 La función de transferencia en frecuencia para el filtro pasabanda *RC* mostrado en la figura P-4.7.2 se puede aproximar como dos secciones del filtro *RC* independientes en cascada si $R_1 \ll R_2$. Usando esta aproximación, determine una expresión para la densidad espectral de la tensión de ruido térmico en la salida del filtro.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

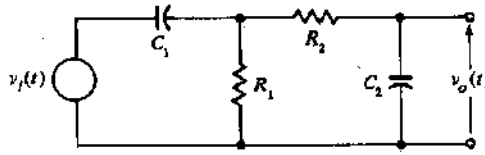


Figura P–4.7.2.

4.7.3 Encuentre el ruido térmico rms presente en el circuito puente resistivo de la figura P-4.7.3 en las siguientes condiciones límite: a) $R_0 \to 0$; b) $R_0 \to \infty$.

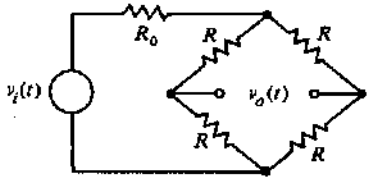


Figura P–4.7.3.

4.7.4 La entrada de un amplificador de tensión se conecta a un resistor de 1 kΩ y la salida a un resistor de 100 kΩ, como se muestra en la figura P-4.7.4. La ganancia en tensión del amplificador es 10, la impedancia de entrada es 1 MΩ (suponiéndolo libre de ruido) y la impedancia de salida es de 100 Ω (libre de ruido). El ancho de banda del amplificador es 1 MHz y el ruido del amplificador es 10 μV rms, referidos a la entrada. La temperatura de todo el sistema es de 300 K. Calcule el ruido térmico rms en la salida (punto 2).

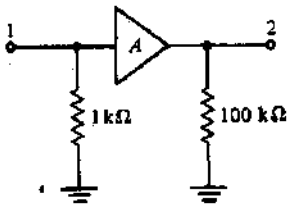


Figura P–4.7.4.

4.7.5 Un generador senoidal produce la señal $v_i(t) = A \cos \omega_0 t$ que se conecta a la entrada del filtro *RC* mostrado en la figura P-4.2.4.

a) Derive una ecuación para el valor rms del ruido térmico en la salida del filtro.

b) Determine aquel valor de C que proporcione la mayor razón *S/N* (es decir, la razón de la potencia promedio de la señal en la potencia promedio del ruido) en la salida.

4.7.6 Calcule el ancho de banda equivalente del ruido del filtro pasabajas Butterworth de n-ésimo orden cuya magnitud de la función de transferencia en frecuencia es: $|H(\omega)| = 1/\sqrt{1 + \omega^{2n}}$, y compare su respuesta con el ancho de banda a -3 dB para $n = 3, 4, 5$. Demuestre que mientras mayor es el orden del filtro, mayor es el parecido entre estas dos medidas del ancho de banda.

4.7.7 Calcule el ancho de banda equivalente del ruido del filtro pasabanda *RC* que se muestra en la figura P-4.7.2 para $R_1C_1 = R_2C_2$, y utilice la aproximación descrita en el problema 4.7.2 para $R_1 \ll R_2$. Elija la frecuencia media de tal forma que $|H(\omega)|$ sea máxima a esa frecuencia.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

4.7.8 Se diseña un amplificador pasabanda para cumplir las siguientes especificaciones:

B_N = 200 kHz

$(S/N)_{sal} \geq 20$ dB

Salida máxima = 1 V rms en 300 Ω

Temp. de ruido aprox. en la etapa de entrada = 1000 K

¿Cuál es la máxima ganancia, en dB, para que el diseño del amplificador cumpla con las especificaciones?

4.7.9 Cierto amplificador tiene resistencias de entrada y salida de 50 Ω y un ancho de banda equivalente del ruido de 140 kHz. Cuando se conecta a una fuente acoplada y a una carga acoplada, la ganancia neta es de 50 dB. Cuando se conecta un resistor de 50 Ω a 290 K a la entrada, la tensión rms de ruido en la salida a través de un resistor de 50 Ω es 100 μV. Determine la temperatura de ruido equivalente, T_e, del amplificador.

★ **4.7.10** Suponga que las especificaciones de un sistema de recepción son tales que la temperatura de ruido en la antena T_a y la temperatura de ruido equivalente del receptor T_e contribuyen en la misma medida a la potencia de ruido en la salida. Utilizando la figura 4.16, estime el intervalo de los factores de ruido (en dB) necesarios si la frecuencia central es

a) 10 MHz;

b) 100 MHz;

c) 1 GHz.

★ **4.7.11** Un residente de cierta área rural encuentra que la recepción de TV en línea recta desde una dirección dada está bloqueada por una colina, y decide colocar una antena en la cima de la colina y usar una línea de transmisión hacia el receptor. Se estima que el factor de ruido del receptor de TV es 15 dB y que las pérdidas de las líneas de transmisión son 4 dB. Determine lo siguiente en dB:

a) El factor de ruido total del sistema de recepción de TV con la antena en la cima de la colina.

b) El factor de ruido total si se conecta un preamplificador con factor de ruido de 5 dB y 20 dB de ganancia entre la línea de transmisión y la entrada al equipo de TV.

c) El factor de ruido total si el preamplificador anterior se lleva al lugar de la antena y se conecta entre ésta y la línea de transmisión.

★ **4.7.12** En el problema 4.7.11, suponga que cuando el receptor de TV se sintoniza a la estación deseada la razón *S/N*, medida en la salida del amplificador de radiofrecuencia en el receptor, es 20 dB para las condiciones de la parte (a) y se supone una temperatura de ruido del espacio de 2000 K. Calcule la razón *S/N* esperada para las dos condiciones en que se usa el preamplificador (puede ser útil una interpretación de estos resultados para notar que la razón *S/N* de 20 dB en los aparatos de TV comerciales proporciona una imagen inaceptable como resultado de "nieve" excesiva debida al ruido aditivo, mientras que una razón *S/N* de 30 dB proporciona una imagen bastante buena).

★ **4.7.13** El ruido de antena consta tanto de ruido externo (p. ej., ruido del espacio) como ruido interno (p. ej., atenuación en los cables, etc.). En este capítulo se supuso que el último es pequeño en relación con el primero, y en la práctica esto suele ser cierto. Aquí se investiga cuáles son los efectos del ruido interno provocado en la antena. Es común referir todas las mediciones de ruido a las terminales de entrada del preamplificador (o receptor, si no se utiliza un preamplificador). Si α es la atenuación (P_{en}/P_{sal}) y T_a es la temperatura de ruido

http://libreria-universitaria.blogspot.com

externa, demuestre que la temperatura de ruido efectiva de la antena en la entrada del preamplificador está dada por

$$T_{ef} = [T_a + (\alpha - 1)290]/\alpha .$$

[*Sugerencia*: Escriba una expresión para el ruido en las terminales de entrada del preamplificador y defina una nueva temperatura equivalente.]

★ **4.7.14** El atenuador resistivo de pérdida mínima que se muestra en la figura P-4.7.14 se puede utilizar para acoplar una antena de 300 Ω a un cable de 75 Ω. Calcule la temperatura de ruido equivalente y el factor de ruido del atenuador. [*Sugerencia*: Utilice el resultado del ejemplo 4.7.6.]

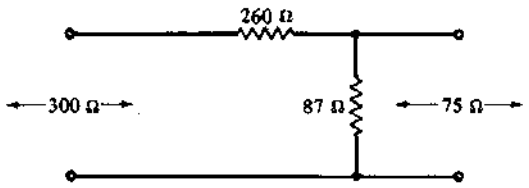


Figura P-4.7.14.

★ **4.7.15** Una estación receptora propuesta para un experimento espacial tiene un receptor (p. ej., un amplificador de bajo ruido congelado) con un factor de ruido de 0.2 dB y una frecuencia central de 3 GHz. La antena de recepción tiene una ganancia de 48 dB y la ganancia de antena en el vehículo espacial es de 6 dB. Si la potencia transmitida es de 10 W y se requiere una razón *S/N* mínima de 14 dB en el receptor, utilice la figura 4.16 para estimar el máximo ancho de banda del sistema para comunicación en una distancia de 5×10^9 millas (es decir, aproximadamente la extensión de nuestro sistema planetario).

★ **4.7.16** Un sistema de recepción dado para transmisiones por satélite tiene una separación física entre el lugar de la antena y el receptor principal. En el lugar de la antena, un amplificador de bajo ruido (ABR) proporciona una ganancia inicial a la señal y un convertidor de bajada desplaza la frecuencia de transmisión a una frecuencia inferior para disminuir las pérdidas en la línea de transmisión al receptor. En este sistema, el ABR tiene una ganancia de 30 dB y una $T_e = 150$ K. El convertidor de bajada tiene un factor de ruido de 8 dB y una ganancia (de conversión) de 3 dB. Las pérdidas en la línea de transmisión entre la antena y el receptor son de 2 dB, y el factor de ruido del receptor principal es de 12 dB.

a) Determine el factor de ruido total y la temperatura de ruido efectiva del sistema de recepción.

b) Repita la parte (a) para el caso en el que el ABR tiene una ganancia de 20 dB, y todos los demás factores permanecen sin cambio.

✓★ **4.7.17** Suponga que el ruido en la antena en el sistema del problema 4.7.16 (incluyendo el ruido debido a los lóbulos laterales de la antena, etc.) es de 80 K, y que el sistema proporciona una razón *S/N* de 15 dB para una ganancia de 30 dB en el ABR.

a) Haga una gráfica de la *S/N* del receptor (en dB) contra la ganancia del ABR en un intervalo de 0 - 30 dB.

b) Las especificaciones del ABR citado están a 290 K. En las especificaciones del diseño se establece que el factor de ruido del ABR (en dB) aumenta en forma lineal con la temperatura por arriba de 290 K, 0.2 dB por cada aumento de 10 K. Determine la máxima elevación de temperatura que proporcione una degradación de 1 dB en la razón *S/N* total como resultado de este efecto (suponga que los demás factores permanecen constantes).

c) Suponga que el factor de ruido del convertidor de bajada también se toma en cuenta al diseñar el sistema. Calcule la degradación en la razón *S/N* total estimada si el factor de

http://libreria-universitaria.blogspot.com

ruido del convertidor de bajada cambia de 8 dB a 12 dB y los demás factores permanecen como antes. Calcule este efecto para ganancias del ABR de 20 dB y 30 dB. [*Nota*: Estos tipos de estimación en la sensibilidad a los cambios en los parámetros son comunes en el diseño de sistemas reales.]

★ **4.7.18** Determine una ecuación para $(S/N)_{dB}$ en términos del factor de mérito del receptor $(G_r/T_r)_{dB}$ para las estaciones de recepción en cada uno de los siguientes diseños de sistemas de satélites geoestacionarios. En cada caso, suponga una longitud del trayecto nominal de 25 000 millas entre la estación terrena y el satélite (la altitud geoestacionaria es de 22 240 millas hasta el punto de ubicación del satélite, el cual se ubica en el plano ecuatorial para una orientación fija de la antena).

a) Una transmisión de televisión por satélite, diseñada para transmitir programas de televisión a sistemas de televisión por cable. Suponga un ancho de banda de 30 MHz, un EIRP de 36 dBW y una frecuencia central de bajada de 4 GHz (la frecuencia de subida es de 6 GHz, y el satélite actúa como un simple repetidor).

b) Un satélite de transmisión directa (DBS, *direct broadcast satellite*) diseñado para transmitir emisiones de televisión en forma directa a receptores convencionales. En este caso, suponga un B = 6 MHz, un EIRP = 55 dBW y una frecuencia central de 12 GHz.

★ **4.7.19** La corriente promedio a través de un diodo termoiónico se puede usar para generar ruido de descarga. El término de cd se bloquea con un capacitor y la salida se utiliza para simular un generador de ruido térmico.

a) Derive una relación entre la corriente promedio en el diodo y la temperatura de ruido térmico efectivo.

b) Suponga que la corriente del diodo pasa a través de un resistor R cuyo valor está acoplado a la entrada de un amplificador en prueba, con temperatura de ruido equivalente T_e. Cuando fluye una cantidad dada de corriente del diodo, se observa que la potencia del ruido de salida del amplificador es el doble que cuando la corriente del diodo es cero. Derive una relación para la temperatura de ruido equivalente T_e con base en estas mediciones.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

CAPÍTULO

5 Modulación de amplitud

Hasta aquí se ha trabajado con señales situadas en cualquier frecuencia. En particular, no hemos puesto interés en alterar las señales en el tiempo y en las frecuencias para cumplir determinado objetivo. Ahora haremos una investigación de métodos para alterar señales senoidales continuas de alta frecuencia en respuesta a señales de baja frecuencia dadas. Esto suele llamarse *modulación de señal continua* (CW, *continuous-wave modulation*). El análisis de esta modulación proseguirá en el capítulo 6.

En general, la modulación es el proceso por el cual una propiedad o un parámetro de cualquier señal se hace variar en forma proporcional a una segunda señal. El tipo de dependencia se determina con la forma de modulación empleada. En la modulación de amplitud, se hace variar la amplitud de una señal senoidal, con frecuencia y fase fijas, en proporción a una señal dada. Esto altera la señal, trasladando sus componentes de frecuencia a frecuencias más altas.

El uso de la modulación de amplitud puede ser provechoso siempre que se desee un desplazamiento en las componentes de frecuencia de una señal. Esta necesidad puede surgir, por ejemplo, en el diseño de filtros con requisitos muy exigentes, o bien en la posibilidad de transmitir comunicación oral a través del espacio por medio de ondas electromagnéticas. Si la máxima frecuencia de la voz es de 3 kHz, la mínima longitud de onda es de 100 000 m. Como las antenas de dimensiones menores a un cuarto de la longitud de onda son ineficientes, es clara la ventaja de elevar la frecuencia en varios órdenes de magnitud antes de intentar la transmisión.

Eligiendo adecuadamente, puede transmitirse al mismo tiempo un gran número de señales sin interferencias mutuas. Por ejemplo, las estaciones comerciales de radio y televisión tienen asignadas diferentes frecuencias, lo que permite la operación simultánea de muchas estaciones. Como estas señales se encuentran espaciadas en frecuencia, cada receptor puede separar fácilmente la señal deseada. Esto se examinará mejor en una sección posterior.

5.1 MODULACIÓN DE AMPLITUD: PORTADORA SUPRIMIDA

La ecuación general de una señal senoidal puede escribirse

$$\phi(t) = a(t) \cos \theta(t)\,, \tag{5.1}$$

donde $a(t)$ es la amplitud y $\theta(t)$ el ángulo, ambos variables en el tiempo. Es conveniente hacer $\theta(t) = \omega_c t + \gamma(t)$ de manera que

$$\phi(t) = a(t) \cos [\omega_c t + \gamma(t)]\,. \tag{5.2}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Se supondrá que $a(t)$ y $\gamma(t)$ varían lentamente comparados con $(\omega_c t)$. El término $a(t)$ se llama envolvente de la señal $\phi(t)$ y el término ω_c, frecuencia portadora; $\gamma(t)$ es la modulación de fase de $\phi(t)$.

En la modulación de amplitud, el término de fase $\gamma(t)$ de la ecuación (5.2) es cero (o constante) y la envolvente $a(t)$ se hace proporcional a la señal dada $f(t)$. Haciendo la constante de proporcionalidad igual a uno, se tiene†

$$\phi(t) = f(t) \cos \omega_c t \,. \tag{5.3}$$

El término cos $\omega_c t$ se llama señal portadora y $f(t)$ señal moduladora. La señal resultante, $\phi(t)$, es la señal modulada.

Aplicando la propiedad de modulación de la transformada de Fourier a la ecuación (5.3), la densidad espectral de $\phi(t)$ es

$$\Phi(\omega) = \tfrac{1}{2}F(\omega + \omega_c) + \tfrac{1}{2}F(\omega - \omega_c) \,. \tag{5.4}$$

Por tanto, la modulación de amplitud traslada el espectro de frecuencia de una señal en $\pm\omega_c$ rad/s pero deja inalterada su forma, como se muestra en la figura 5.1. Este tipo de modulación de amplitud se llama de *portadora suprimida* porque la densidad espectral de $\phi(t)$ no presenta una portadora identificable, aunque el espectro se centre en la frecuencia ω_c.

De la figura 5.1(f) se ve que el contenido de frecuencia tanto negativo como positivo de $f(t)$ aparece como frecuencias positivas. Esto implica que el ancho de banda de $f(t)$

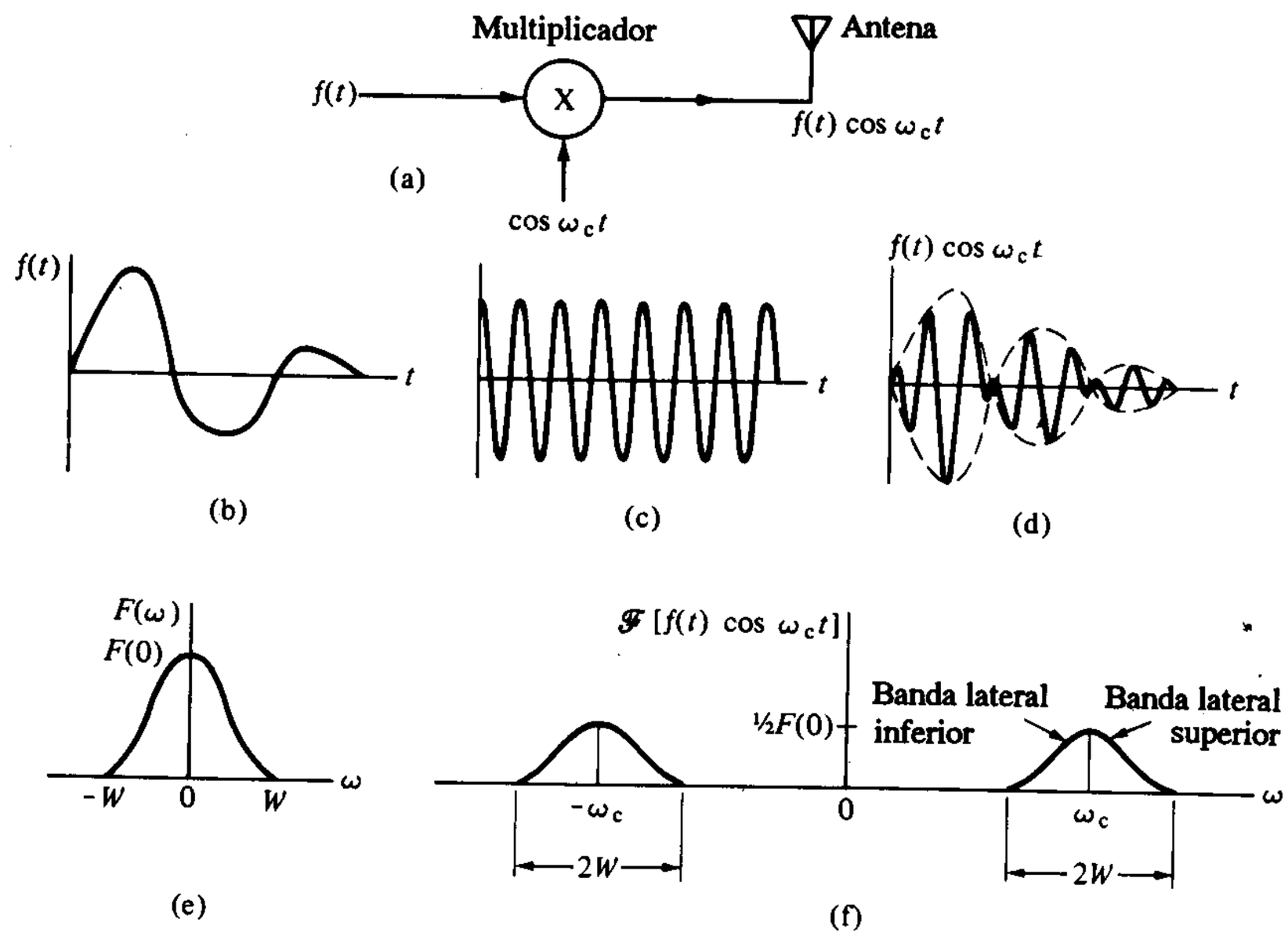


Figura 5.1 Sistema de transmisión de amplitud modulada de portadora suprimida.

† Incluyendo una constante multiplicativa k_a, esto puede escribirse como $k_a f(t) \cos \omega_c t$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

se duplica cuando se emplea este tipo de modulación de amplitud, como se indica en la figura 5.1(e) y (f). En la figura 5.1(f), el contenido espectral de frecuencias positivas por encima de ω_c se llama *banda lateral superior* de $\phi(t)$ y por debajo de ω_c, *banda lateral inferior* de $\phi(t)$. Es fácil ver que, para frecuencias positivas, la banda lateral superior de $\phi(t)$ exhibe las componentes de frecuencia positiva de $f(t)$ y la banda lateral inferior, las de frecuencia negativa. Para las frecuencias negativas de $\phi(t)$, se cumplen relaciones similares aunque invertidas.

De lo anterior concluimos que la modulación de amplitud con portadora suprimida proporciona un medio conveniente para observar el espectro de frecuencias completo de una señal $f(t)$. Todo lo que hay que hacer es trasladar la señal por medio de una frecuencia portadora ω_c, mayor que las cotas espectrales (ancho de banda) de la señal. Este principio es muy utilizado en el análisis espectral. El hecho de que haya dos bandas laterales (superior e inferior) y no aparezca portadora separada en $\phi(t)$ sugiere la siguiente designación conveniente para este tipo de modulación: *doble banda lateral con portadora suprimida* (DSB-SC, *double-sideband, suppressed-carrier*).

La recuperación de la señal original $f(t)$ de la señal $\phi(t)$ DSB-SC, requiere otra traslación de frecuencia que desplace al espectro a su posición original. Este proceso de retraslación del espectro se llama demodulación o detección.

Como la propiedad de modulación de la transformada de Fourier resultó útil al trasladar espectros para la modulación, se probará para la demodulación. Suponiendo que $\phi(t) = f(t) \cos \omega_c t$ es la señal transmitida, se tiene

$$\begin{aligned} \phi(t) \cos \omega_c t &= f(t) \cos^2 \omega_c t \\ &= \tfrac{1}{2} f(t) + \tfrac{1}{2} f(t) \cos 2\omega_c t. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Hallando la transformada de Fourier de ambos lados de esta ecuación y usando la propiedad de modulación, se obtiene

$$\mathcal{F}\{\phi(t) \cos \omega_c t\} = \tfrac{1}{2} F(\omega) + \tfrac{1}{4} F(\omega + 2\omega_c) + \tfrac{1}{4} F(\omega - 2\omega_c)\,. \tag{5.6}$$

Este resultado también se puede obtener recordando que la multiplicación en el dominio del tiempo equivale a la convolución en el dominio de la frecuencia. Por tanto, el espectro de $\phi(t) \cos \omega_c t$ se puede obtener haciendo la convolución del espectro de la señal recibida con el de $\cos \omega_c t$ (es decir, con impulsos en $\pm w_c$). Ambos métodos dan igual resultado y el espectro se muestra en la figura 5.2(e). Se necesita un filtro pasabajas para separar los términos de doble frecuencia de las componentes espectrales originales, como se indica en la figura 5.2. Obviamente, se requiere que $\omega_c > W$ para recuperar la señal, requisito que es fácil de satisfacer en la práctica.

Los principios sobre la modulación DSB-SC desarrollados son de aplicación general a cualquier señal moduladora $f(t)$, siempre que varíe lentamente con respecto a la frecuencia portadora; esto es, $W < \omega_c$. Es instructivo analizar el caso especial de una señal moduladora senoidal de frecuencia simple para entender mejor los conceptos. En la figura 5.3 se muestran algunas ondas descriptivas de este caso.

En la figura 5.3 es evidente que a un observador le es difícil reconocer $f(t)$ en la señal modulada $\phi(t)$, a menos que haya algún conocimiento de las relaciones de fase involucradas. No basta con la observación de la amplitud. Para ser más exactos,

http://libreria-universitaria.blogspot.com

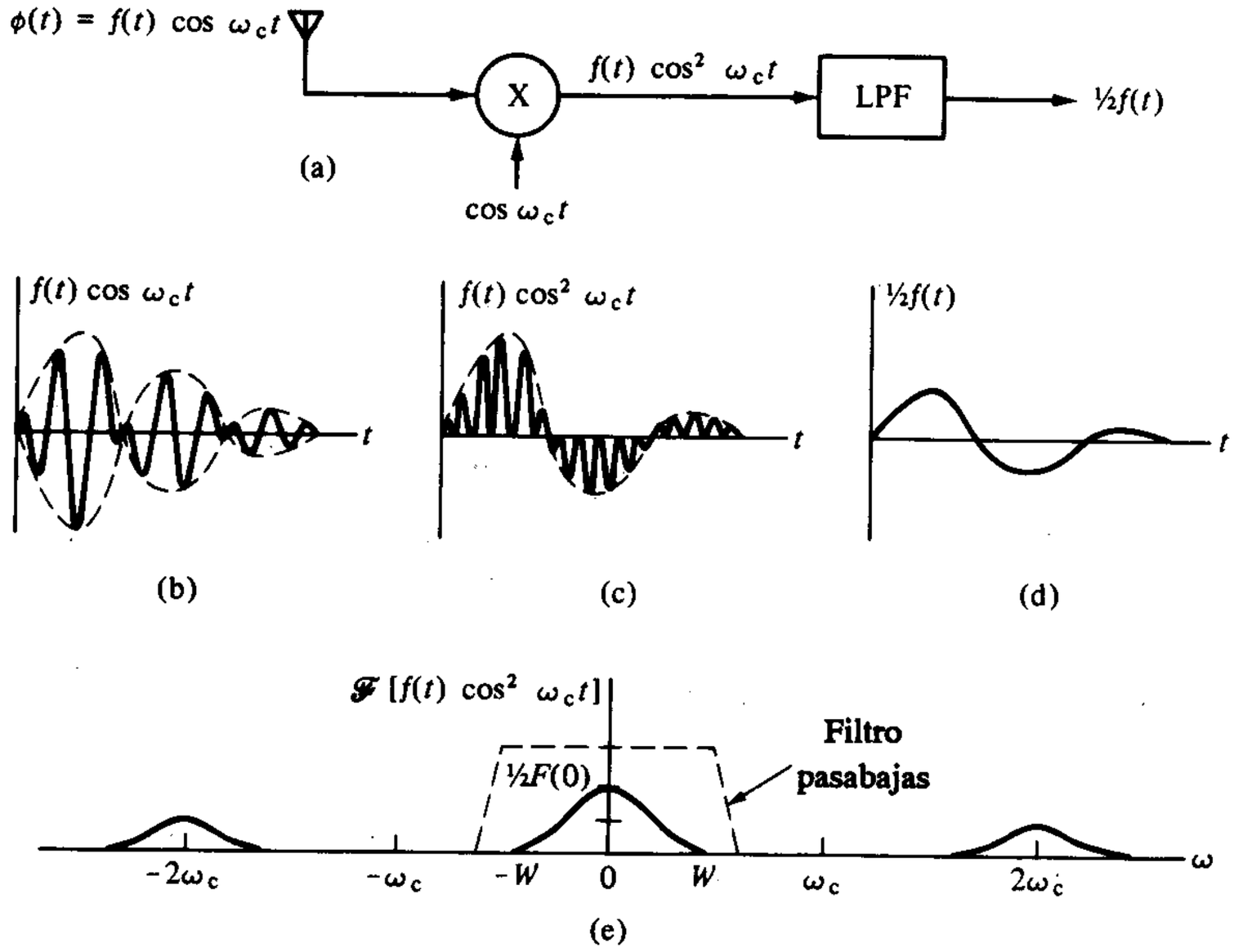


Figura 5.2 Demodulación de señales de amplitud modulada de portadora suprimida.

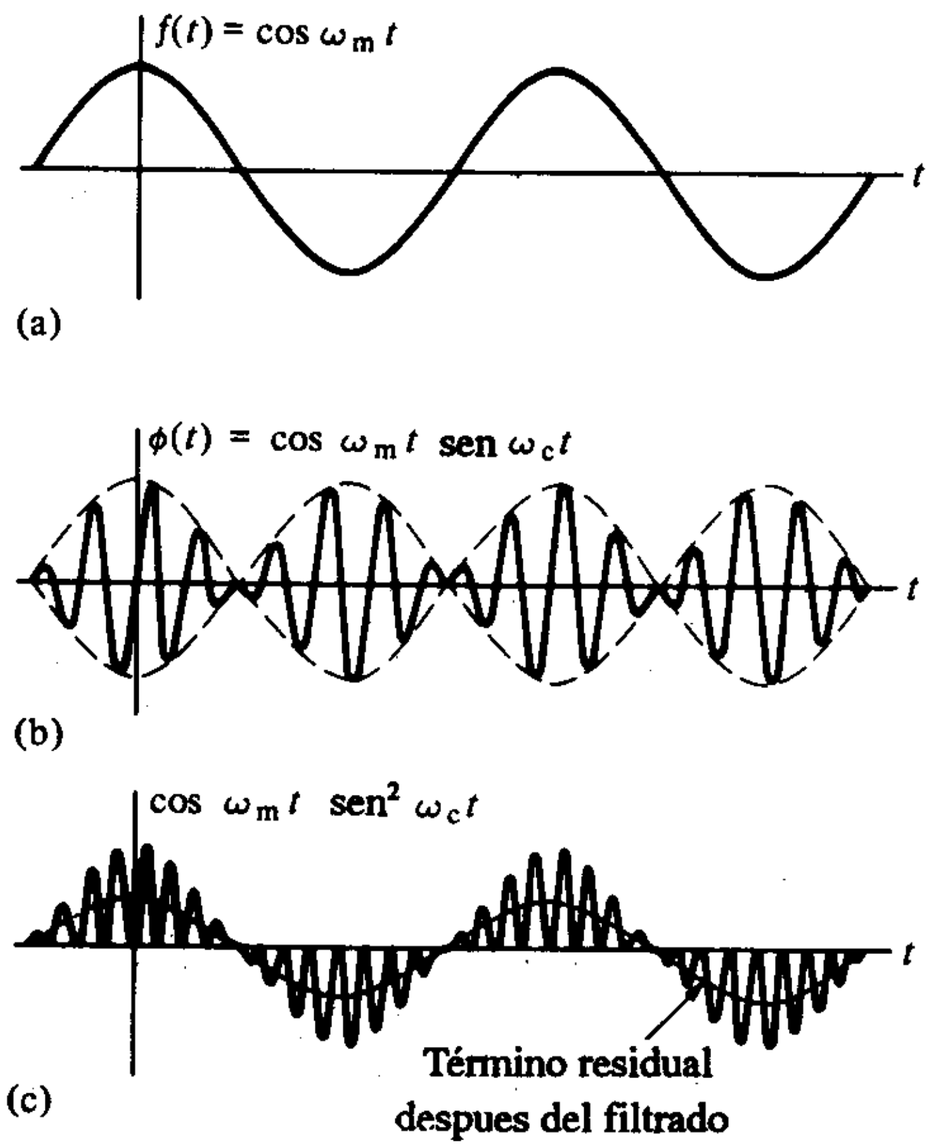


Figura 5.3 Modulación y demodulación DSB-SC de una señal senoidal.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

la fase relativa de la señal modulada $\phi(t)$ indica el signo de $f(t)$, como se evidencia en las inversiones de fase a 180° cuando $f(t)$ pasa por cero. Se concluye que, para demodular adecuadamente las ondas DSB-SC, deben conocerse la fase correcta y la frecuencia.

Para confirmar esta conclusión, se introducirá un pequeño error de frecuencia, $\Delta\omega$, y un error de fase, θ_0, en la señal portadora generada localmente en el receptor, el cual forma el producto

$$\begin{aligned}\phi(t)\cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \theta_0] &= f(t)\cos\omega_c t\cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \theta_0] \\ &= \tfrac{1}{2}f(t)\cos[(\Delta\omega)t + \theta_0] \\ &\quad + \tfrac{1}{2}f(t)\cos[(2\omega_c + \Delta\omega)t + \theta_0]. \qquad (5.7)\end{aligned}$$

El segundo término a la derecha de la ecuación (5.7) está centrado en $\pm(2\omega_c + \Delta\omega)$ y se filtra con el filtro pasabajas. La salida del filtro será el término restante de dicha ecuación.

$$e_o(t) = \tfrac{1}{2}f(t)\cos[(\Delta\omega)t + \theta_0]. \qquad (5.8)$$

Por tanto, la señal de salida no es $\frac{1}{2}f(t)$, como se había obtenido antes, a menos que $\Delta\omega$ y θ_0 sean cero (es decir, que no haya error de frecuencia o de fase).

Ahora se verán dos casos especiales de errores de frecuencia y fase. En el primero sea $\Delta\omega = 0$, por lo que sólo hay error de fase.

$$e_o(t) = \tfrac{1}{2}f(t)\cos\theta_0.$$

Es decir, un error de fase en la portadora local causa un factor de ganancia variable en la señal de salida, proporcional al coseno de dicho error. Para pequeños errores de fase fijos, esto es tolerable. Sin embargo, para errores de fase que se aproximen a ±90°, la señal recibida se borra. En algunos casos, el error de fase varía al azar, causando un comportamiento inaceptable.

En el segundo caso especial, $\theta_0 = 0$ y sólo existe error de frecuencia. La ecuación (5.8) se reduce a

$$e_o(t) = \tfrac{1}{2}f(t)\cos(\Delta\omega)t.$$

En lugar de recobrar la señal original $f(t)$, ésta se obtiene al multiplicarla por una senoidal de baja frecuencia, produciendo una distorsión indeseable e inaceptable.

Los efectos de errores tanto de frecuencia como aleatorios de fase provocan una demodulación inadecuada de la señal. Así, es necesario sincronizar tanto la frecuencia como la fase entre el transmisor y el receptor cuando se usa la modulación DSB-SC. La sincronización de las señales portadoras no es problemática cuando el transmisor y el receptor se encuentran cerca. En una sección posterior se examinarán métodos para superar esta limitacion cuando el receptor está alejado.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La restauración de la señal original $f(t)$ de la señal modulada $\phi(t)$ usando un oscilador sincronizado se llama detección *síncrona* o *coherente*. Si se usa un solo oscilador (como se ha hecho aquí) se llama también detección *homodina*.†

EJEMPLO 5.1.1

Aprovechando la ortogonalidad de senos y cosenos, es posible transmitir y recibir dos señales diferentes de manera simultánea en la misma frecuencia portadora. En la figura 5.4 aparece un esquema para hacer esto, conocido como *multiplexión en cuadratura*. Demuestre que cada señal puede recuperarse por detección síncrona de la señal recibida usando portadoras de igual frecuencia pero en cuadratura de fase.

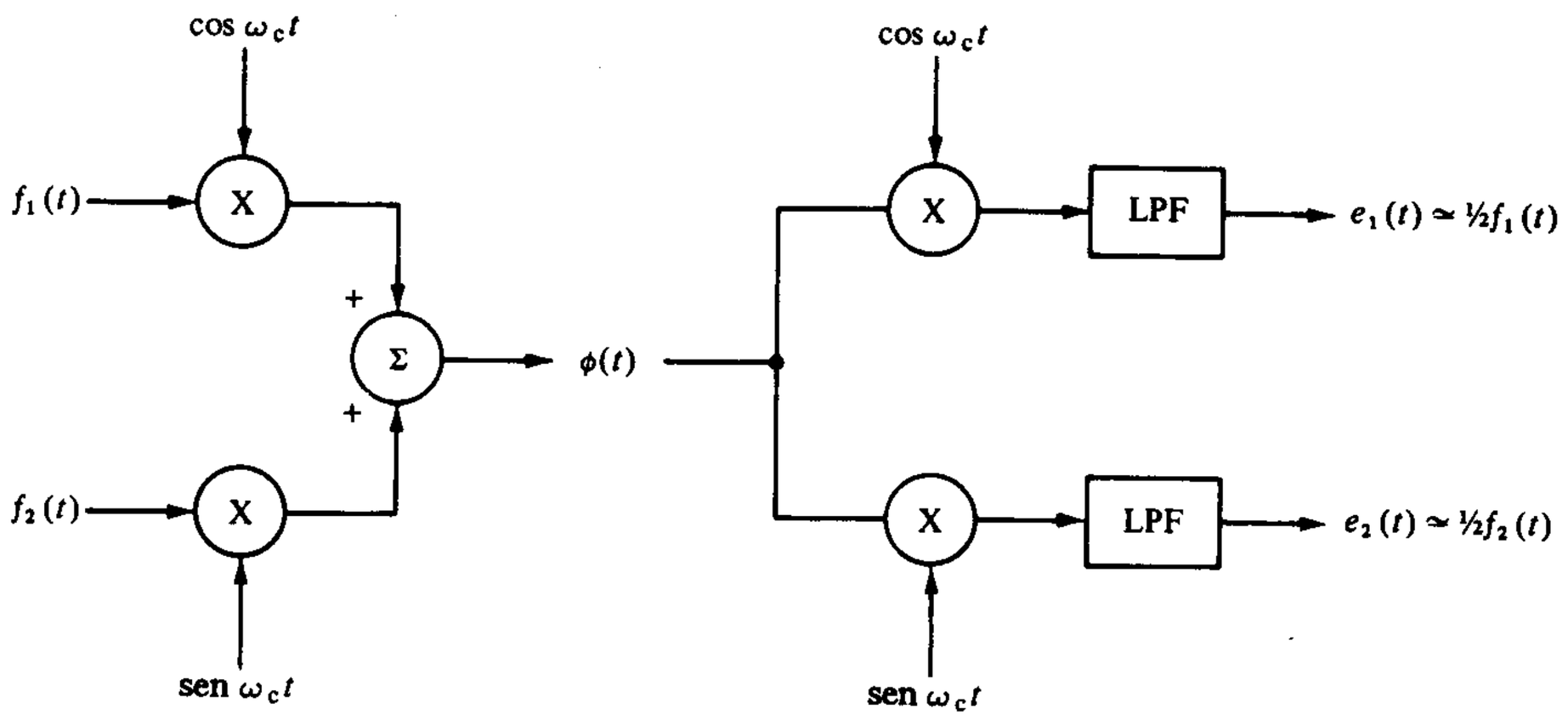


Figura 5.4 Sistema de multiplexión de cuadratura descrito en el ejemplo 5.1.1.

Solución

$$\phi(t) = f_1(t) \cos \omega_c t + f_2(t) \operatorname{sen} \omega_c t\,,$$

$$\begin{aligned}\phi(t) \cos \omega_c t &= f_1(t) \cos^2 \omega_c t + f_2(t) \operatorname{sen} \omega_c t \cos \omega_c t \\ &= \tfrac{1}{2} f_1(t) + \tfrac{1}{2} f_1(t) \cos 2\omega_c t + \tfrac{1}{2} f_2(t) \operatorname{sen} 2\omega_c t\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(t) \operatorname{sen} \omega_c t &= f_1(t) \cos \omega_c t \operatorname{sen} \omega_c t + f_2(t) \operatorname{sen}^2 \omega_c t \\ &= \tfrac{1}{2} f_1(t) \operatorname{sen} 2\omega_c t + \tfrac{1}{2} f_2(t) - \tfrac{1}{2} f_2(t) \cos 2\omega_c t\,.\end{aligned}$$

En el filtro pasabajas, todos los términos en $2\omega_c$ se atenúan, dando

$$e_1(t) = \tfrac{1}{2} f_1(t)\,,$$

$$e_2(t) = \tfrac{1}{2} f_2(t)\,.$$

† Un análisis sobre detección homodina, con aplicaciones específicas a sistemas de medición, se puede encontrar en R. J. King, *Microwave Homodyne Systems*, Stevenage, Herts, Inglaterra, Peter Peregrinus Ltd., 1978.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La multiplexión de cuadratura es un método eficaz para transmitir dos señales de mensaje dentro del mismo ancho de banda. Requiere una sincronización precisa de fase del transmisor y el receptor, como se muestra en el siguiente ejercicio. La multiplexión de cuadratura se utiliza en la transmisión de señales de información en color (croma) en las transmisiones comerciales de televisión (en el apéndice D hay una descripción de la transmisión de señales de televisión comercial).

El uso práctico del esquema del ejemplo 5.1.1 de multiplexión de cuadratura está limitado por las rígidas exigencias de la sincronización de fase requerida. Por ejemplo, suponga que la portadora local generada en el receptor de la figura 5.4 tiene un error de fase de θ_0 radianes. Derive una expresión para $e_1(t)$ si θ_0 es pequeño; estime además cuán pequeño debe ser θ_0 para mantener la interferencia causada por $f_2(t)$ en por lo menos -40 dB (1%) de $f_1(t)$ si $f_1(t)$, $f_2(t)$ son de igual magnitud.

RESPUESTA: $e_1(t) \approx \frac{1}{2}[f_1(t) \pm \theta_0 f_2(t)]$; $\pm 0.57°$.

Muestre que $f_1(t)$ y $f_2(t)$ controlan, en esencia, tanto la amplitud como la fase de $\phi(t)$ en el sistema de multiplexión de cuadratura del ejemplo 5.1.1. En otras palabras, deduzca una expresión de $\phi(t)$ que muestre la envolvente y el ángulo de fase en términos de $f_1(t)$ y $f_2(t)$. [*Sugerencia*: Realice una conversión a serie de Fourier.] Halle además $\phi(t)$ para el caso especial en que $f_1(t) = \cos\theta$ y $f_2(t) = \operatorname{sen}\theta$.

RESPUESTA: $\phi(t) = \sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)}\cos\{\omega_c t + \tan^{-1}[-f_2(t)/f_1(t)]\}$; $\cos(\omega_c t - \theta)$.

5.1.1 Generación de señales DSB-SC

Como resultado de la propiedad de modulación de la transformada de Fourier, se ha observado que el espectro de cualquier señal puede trasladarse $\pm\omega_c$ rad/s en frecuencia si se multiplica por una señal senoidal de ω_c rad/s. Sin embargo, esto no es imprescindible. De hecho, ahora se demostrará que el espectro puede trasladarse en $\pm\omega_c$ multiplicando la señal por *cualquier* señal periódica cuya frecuencia fundamental sea ω_c rad/s. El razonamiento será paralelo al seguido en el análisis del teorema del muestreo en el capítulo 3.

Cualquier señal periódica $p_T(t)$ con potencia promedio finita puede representarse con la serie de Fourier,

$$p_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\omega_0 t}, \tag{5.9}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

donde $\omega_0 = 2\pi/T$. Haciendo $\omega_0 = \omega_c$ y multiplicando la ecuación (5.9) por $f(t)$,

$$f(t)p_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n f(t)e^{jn\omega_c t}. \tag{5.10}$$

Aplicando a esta ecuación la propiedad de traslación de frecuencia de la transformada de Fourier, tenemos

$$\mathcal{F}\{f(t)p_T(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n F(\omega - n\omega_c)\,. \tag{5.11}$$

Aquí se ve que el espectro de $f(t)p_T(t)$ contiene a $F(\omega)$ y a $F(\omega)$ trasladada por $\pm\omega_c$, $\pm 2\omega_c$, ..., $\pm n\omega_c$,... Las amplitudes de estas réplicas espectrales sucesivas de $F(\omega)$ están ponderadas por las constantes $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n\ldots$ Esto se ilustra en la figura 5.5 usando una señal periódica cuadrada. Estos resultados también podrían demostrarse por medio de la propiedad de convolución en frecuencia de la transformada de Fourier.

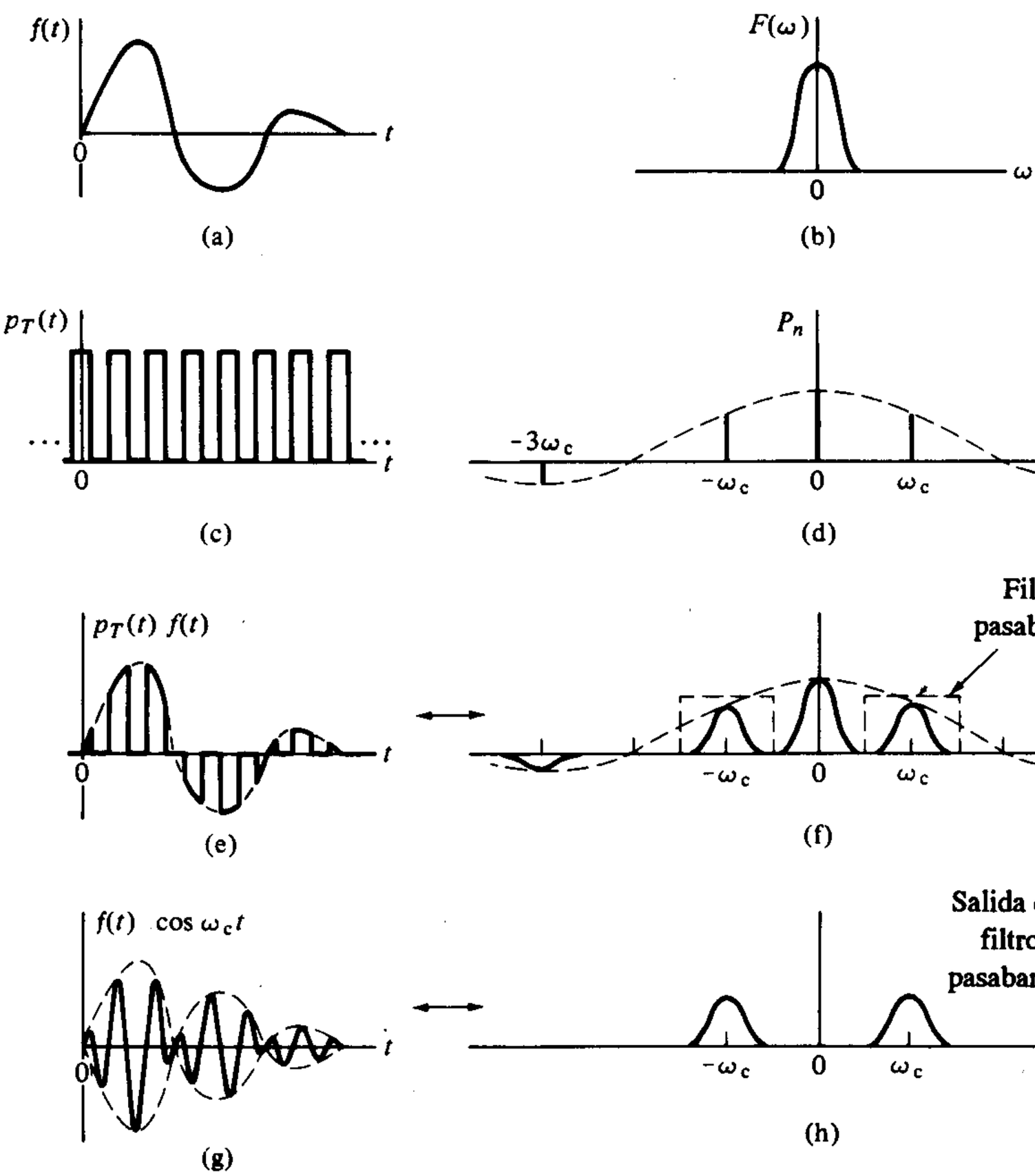


Figura 5.5 Modulación de amplitud usando la multiplicación por funciones periódicas.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En la modulación de amplitud, sólo interesa el espectro centrado en $\pm\omega_c$. Esto puede obtenerse usando un filtro pasabanda después de la multiplicación. Este filtro permite pasar las componentes de frecuencia centradas en $\pm\omega_c$ y atenúa todas las demás. Si ω_c se elige mucho mayor que W, el ancho de banda de $f(t)$, las componentes de frecuencia indeseables están bastante separadas de las deseables, y pueden usarse filtros simples.

El proceso de traslación de frecuencias se llama también *conversión de frecuencias*, *mezcla de frecuencias* y *heterodinación*. Los sistemas que efectúan esta operación se llaman convertidores o mezcladores de frecuencias y, para trasladar un espectro, deben producir frecuencias diferentes de las de la señal de entrada. Sin embargo, en la sección 2.12 se vio que la respuesta de sistemas lineales invariables en el tiempo no puede contener otras frecuencias que las de la señal de entrada. Se concluye, pues, que para producir modulación deben usarse sistemas variables en el tiempo o no lineales (o ambos).

Este hecho puede aprovecharse al probar amplificadores lineales. Se aplica a la entrada la suma de dos senoidales, por ejemplo en 400 Hz y 1 kHz. Cualquier salida a frecuencias distintas de éstas indica la presencia de no linealidades en el amplificador. En particular, la salida a 1400 Hz (o 600 Hz) es la cantidad de modulación presente que, a su vez, es una medida relativa de las no linealidades. Esta prueba se llama *prueba de intermodulación* y se usa para probar equipo de audio de alta fidelidad.

EJEMPLO 5.1.2

Una señal periódica consiste en una señal exponencialmente decreciente e^{-at}, $0 \le t < T$, repetida cada T segundos, que se multiplica por una señal $f(t)$. Determine una expresión que describa el espectro y la señal temporal de la señal de amplitud modulada resultante si se descartan todas las componentes excepto las centradas en $\pm\omega_c$, $\omega_c = 2\pi/T$.

Solución Tomando una serie de Fourier,

$$p_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{jn\omega_c t}$$

donde

$$P_n = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-at}e^{-jn\omega_c t}\,dt = \frac{1}{T}\,\frac{1 - e^{-aT}}{a + jn\omega_c}.$$

De la ecuación (5.11), el espectro del producto $p_T(t)f(t)$ es

$$\frac{1}{T}(1 - e^{-aT})\left[\frac{1}{a + j\omega_c}F(\omega - \omega_c) + \frac{1}{a - j\omega_c}F(\omega + \omega_c)\right].$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Los términos correspondientes de la serie de Fourier son

$$\frac{1}{T}(1 - e^{-aT})\left[\frac{1}{a + j\omega_c} f(t)e^{j\omega_c t} + \frac{1}{a - j\omega_c} f(t)e^{-j\omega_c t}\right].$$

De las ecuaciones (2.57), (2.60), y (2.61), la señal temporal es

$$\frac{2}{T}\frac{1 - e^{-aT}}{\sqrt{a^2 + \omega_c^2}} f(t) \cos(\omega_c t + \theta_0),$$

donde

$$\theta_0 = \tan^{-1}(-\omega_c/a),$$
$$\omega_c = 2\pi/T.$$

EJERCICIO 5.13

Repita el ejemplo 5.1.2 si la señal periódica $p_T(t)$ es una secuencia de funciones impulso unitario espaciadas T segundos, con una función impulso en $t = 0$. Verifique el resultado usando la convolución en frecuencia.

RESPUESTA: $\frac{1}{T}F(\omega - \omega_c) + \frac{1}{T}F(\omega + \omega_c)$; $\frac{2}{T} f(t) \cos \omega_c t$.

Modulador de conmutador

Un ejemplo de modulador que opera como un sistema lineal variable en el tiempo es aquel cuya ganancia (es decir, función de transferencia) varía con el tiempo. El más simple de tales sistemas es un interruptor que se abre y se cierra con determinada frecuencia, ω_c. Este tipo de sistema a menudo se denomina, "de conmutación" y se ilustra en la figura 5.6(a).

El funcionamiento del modulador de conmutación de la figura 5.6 se puede explicar en forma breve como sigue. El interruptor se alterna entre los terminales, movido por una fuente a frecuencia ω_c rad/s. Se supondrá que el tiempo de transición entre los contactos es despreciable. En la mitad del periodo, el interruptor permite que la señal $f(t)$, que varía con relativa lentitud, se aplique a la entrada del filtro. Durante la segunda mitad, la señal pasa a tierra. Por tanto, la señal es conmutada con una frecuencia ω_c rad/s. Esta operación de conmutación es, en esencia, una multiplicación de la señal $f(t)$ por una onda periódica cuadrada $p_T(t)$ cuyos dos niveles son 0 y 1. Como se vio antes, esa señal conmutada contiene el espectro de $f(t)$ trasladado en frecuencia en múltiplos de ω_c. La señal de amplitud modulada $\phi(t)$ puede obtenerse pasando esta señal conmutada a través de un filtro pasabanda centrado en $\pm\omega_c$. Nótese que debe satisfacerse el teorema del muestreo para permitir la filtración correcta de la señal.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

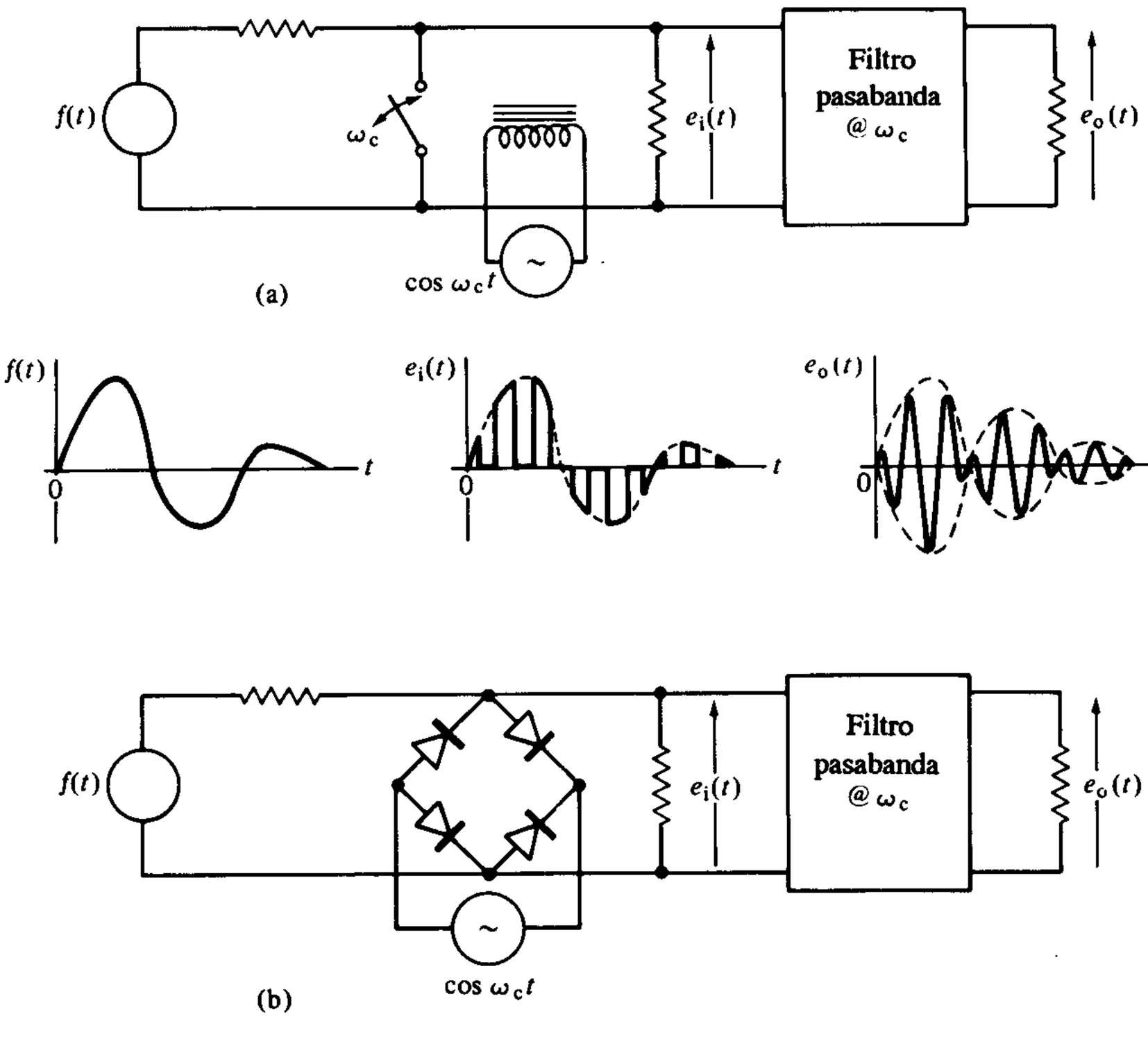


Figura 5.6 Diagrama esquemático de un modulador de conmutación: (a) con interruptor electromecánico y (b) usando diodos como interruptores.

El modulador de conmutación es muy utilizado en sistemas de modulación DSB-SC prácticos. A bajas frecuencias, la conmutación puede ser un interruptor operado magnéticamente. También se emplean fotodiodos, FET (*field effect transistor*, transistor de efecto de campo) y rayos de luz interrumpidos de manera mecánica. A frecuencias mayores, es común usar diodos como interruptores. En la figura 5.6(b) se muestra un circuito típico que usa cuatro diodos, conocido en ocasiones como modulador de anillo. Es fácil ver que estos diodos conectan alternadamente la entrada del filtro a la señal de entrada y a tierra, a la frecuencia de ω_c rad/s. Esta acción es igual que la del interruptor anterior y el análisis se efectúa en forma idéntica. Para mejor operación, los diodos deben ser idénticos (es decir, balanceados) para que el circuito puente esté balanceado cuando $f(t) = 0$ y no haya salida portadora. Son de uso común varias configuraciones del modulador de anillo.

En la figura 5.7 se muestra una configuración usual, conocida como modulador de anillo de doble balance (es decir, balance de onda completa). El amplio uso de este modulador es atribuible al hecho de que no requiere componentes ideales, dado que sus características están equilibradas, y la salida puede a menudo emplearse sin filtración adicional.

La operación del modulador de anillo de doble balance puede describirse como sigue. Supóngase primero que $e_i(t) = 0$. En los medios ciclos positivos de cos $\omega_c t$, los diodos

http://libreria-universitaria.blogspot.com

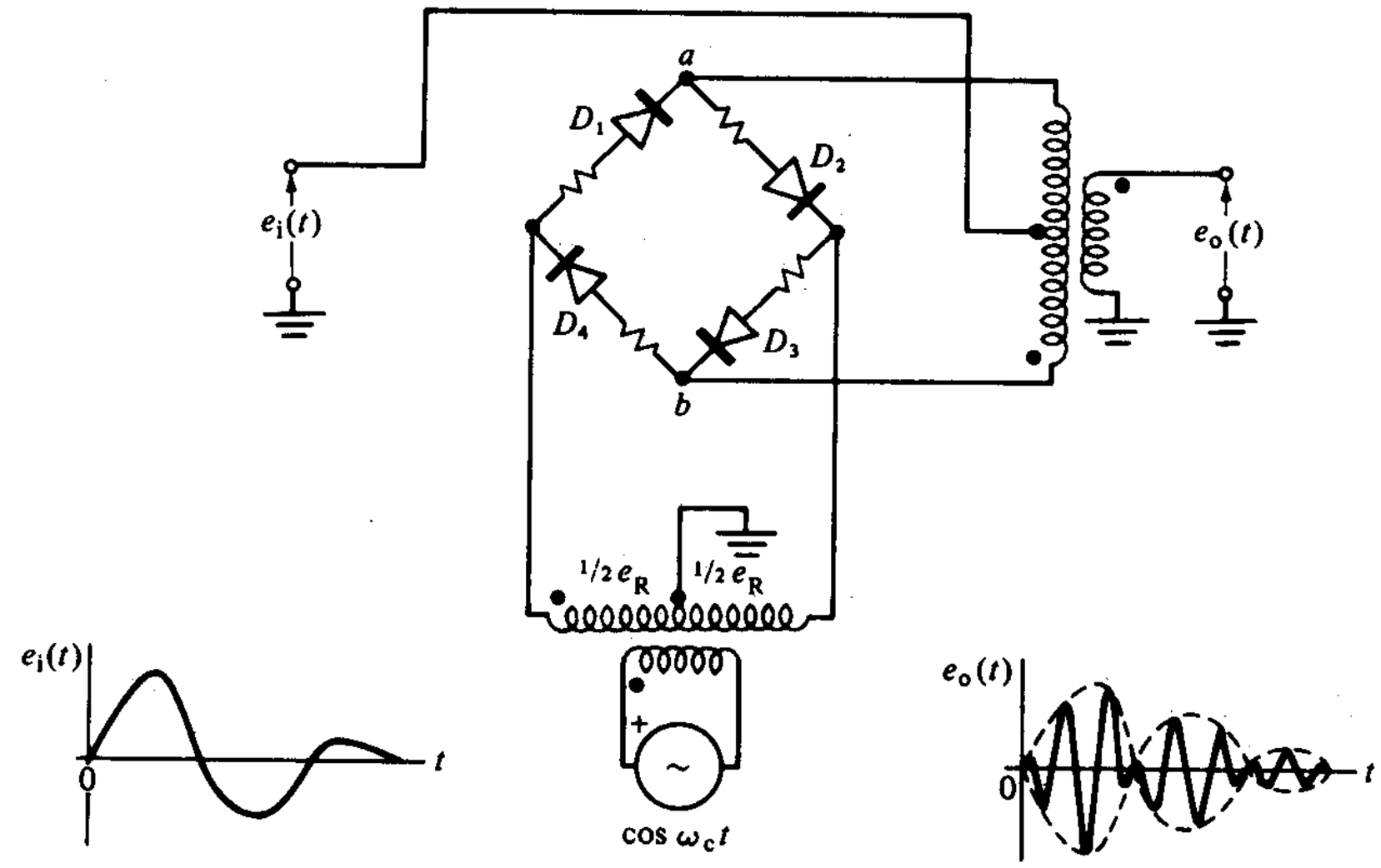


Figura 5.7 Modulador de anillo de doble balance.

D_1 y D_2 conectarán el punto a con la entrada a través de la mitad del secundario del transformador de salida. Si la toma central del secundario de referencia está exactamente situada y las impedancias de D_1 y D_2 son idénticas, no fluirá corriente a través del transformador de salida ni aparecerá ninguna tensión. Durante el siguiente medio ciclo, los diodos D_3 y D_4 conectarán el punto b con la entrada a través de la otra mitad del secundario del transformador de salida. De nuevo, no habrá flujo de corriente ni tensión de salida. Por tanto, la portadora está suprimida, es decir, el modulador se encuentra balanceado.

Si ahora se aplica una señal de entrada de polaridad positiva cuya amplitud pico es mucho menor que la de referencia e_R, en los medios ciclos positivos de cos $\omega_c t$ el punto a tiene en esencia el potencial de tierra, y fluirá una corriente hacia arriba a través de la mitad del secundario de salida, induciendo una tensión de salida positiva. En los medios ciclos negativos de cos $\omega_c t$, el punto b se conecta esencialmente a tierra y la corriente fluye hacia abajo a través de la otra mitad del secundario, induciendo una tensión de salida negativa. Las tensiones pico de salida positivas y negativas serán idénticas para una amplitud fija de la señal de entrada si la salida del transformador está centrada con precisión. En consecuencia, se ha generado una señal que cambia de signo con una frecuencia determinada por la de la portadora (de referencia) y cuya amplitud es proporcional a la de la señal de entrada. Puede verse que la fase de la salida cambia 180° para señales de entrada de polaridad negativa. La señal de salida es, pues, un ejemplo de modulación DSB-SC.

En la descripción anterior se supuso una señal de referencia lo bastante grande para controlar la conexión de los diodos. Con respecto a la figura 5.7, esto requiere que

$$[e_i(t)]_{máx} < \tfrac{1}{2}[e_R(t)]_{máx}.$$

En la práctica, el desbalance entre las características de los diodos y las imprecisiones en el centrado de la conexión de los transformadores provoca un comportamiento no

http://libreria-universitaria.blogspot.com

ideal, y en la salida puede aparecer alguna portadora, a menos que se agreguen controles de balance. Las impedancias del transformador se equiparan a la media geométrica de las resistencias anterior y posterior de los diodos para un mejor funcionamiento. El uso de diodos con portadoras calientes puede conducir a la supresión de la portadora sin necesidad de controles de balance.

Uso de dispositivos no lineales

La modulación de amplitud puede obtenerse también en sistemas no lineales. En dispositivos eléctricos, una no linealidad común es la que existe entre la tensión y la corriente. El diodo semiconductor es un buen ejemplo de tales dispositivos, así como los bulbos y los transistores.

En la figura 5.8 aparece una configuración para el uso de accesorios no lineales, a fin de obtener modulación DSB-SC. Aproximando la no linealidad con una serie de potencias, se obtiene†

$$i(t) = a_1 e(t) + a_2 e^2(t) + a_3 e^3(t) + \cdots .$$

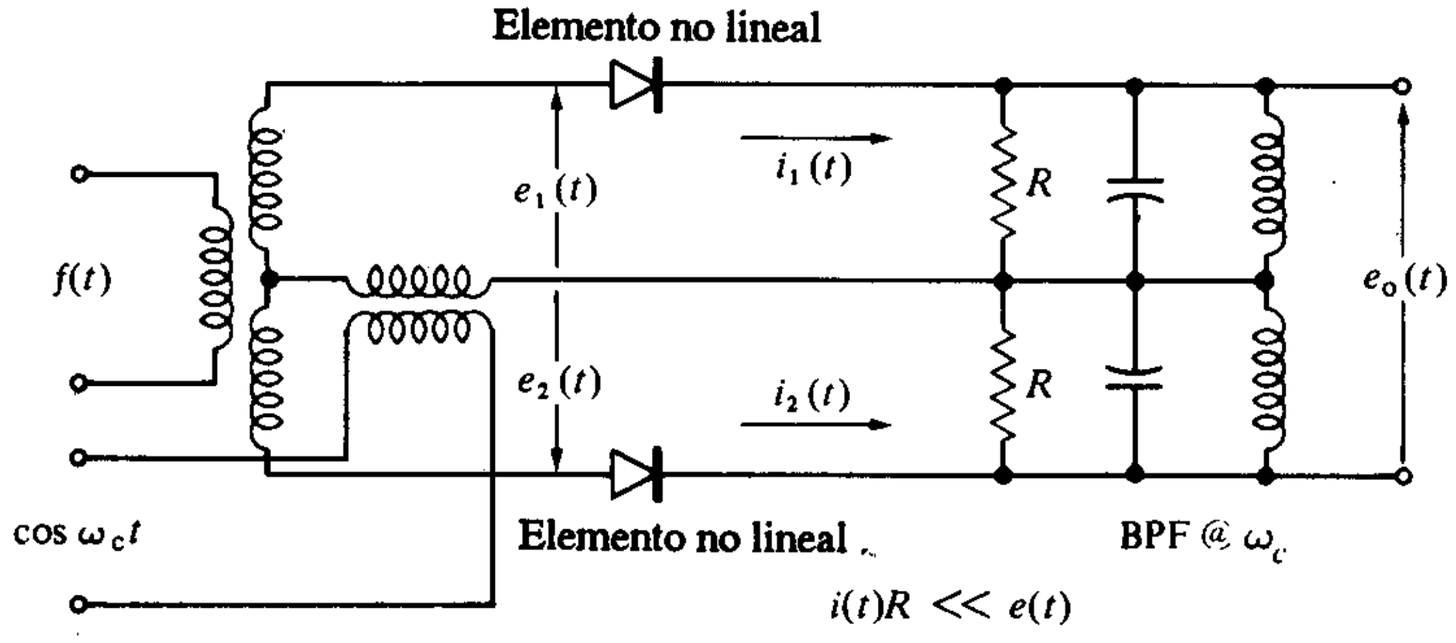


Figura 5.8 Modulador balanceado con dispositivos no lineales.

Con referencia a la figura 5.8, encontramos que

$$e_1(t) = \cos \omega_c t + f(t) ,$$
$$e_2(t) = \cos \omega_c t - f(t) .$$

Conservando los dos primeros términos de la serie para cada no linealidad y suponiendo que las no linealidades son idénticas,

$$i_1(t) = a_1[\cos \omega_c t + f(t)] + a_2[\cos \omega_c t + f(t)]^2,$$
$$i_2(t) = a_1[\cos \omega_c t - f(t)] + a_2[\cos \omega_c t - f(t)]^2.$$

---

† Puede existir una discontinuidad si se elige un modelo lineal por tramos. La discontinuidad evita el uso de una expansión en serie de potencias. En este caso, la característica no lineal puede aproximarse por medio de una serie polinomial siguiendo los métodos usados en el problema 2.5.4.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Para una carga resistiva, la tensión neta es $[i_1(t) - i_2(t)]R$, o

$$[i_1(t) - i_2(t)]R = 4a_2R\left[f(t)\cos\omega_c t + \frac{a_1}{2a_2}f(t)\right]. \tag{5.12}$$

El segundo término a la derecha de la ecuación (5.12) se puede eliminar por medio de un filtro pasabanda centrado en $\pm\omega_c$, obteniéndose así la salida deseada.

En estos moduladores pueden usarse diodos semiconductores a manera de dispositivos no lineales, como se muestra en la figura 5.8(b). El comportamiento de este tipo de modulador, igual que el de anillo, depende de cuánto puedan ajustarse las características de los diodos. Todos los moduladores estudiados hasta aquí generan señales DSB-SC y se conocen como *moduladores balanceados.*

En la figura 5.9 se muestra un posible modulador DSB-SC. Determine el valor de la constante k si el filtro pasabanda tiene ganancia unitaria en $\pm\omega_c$.

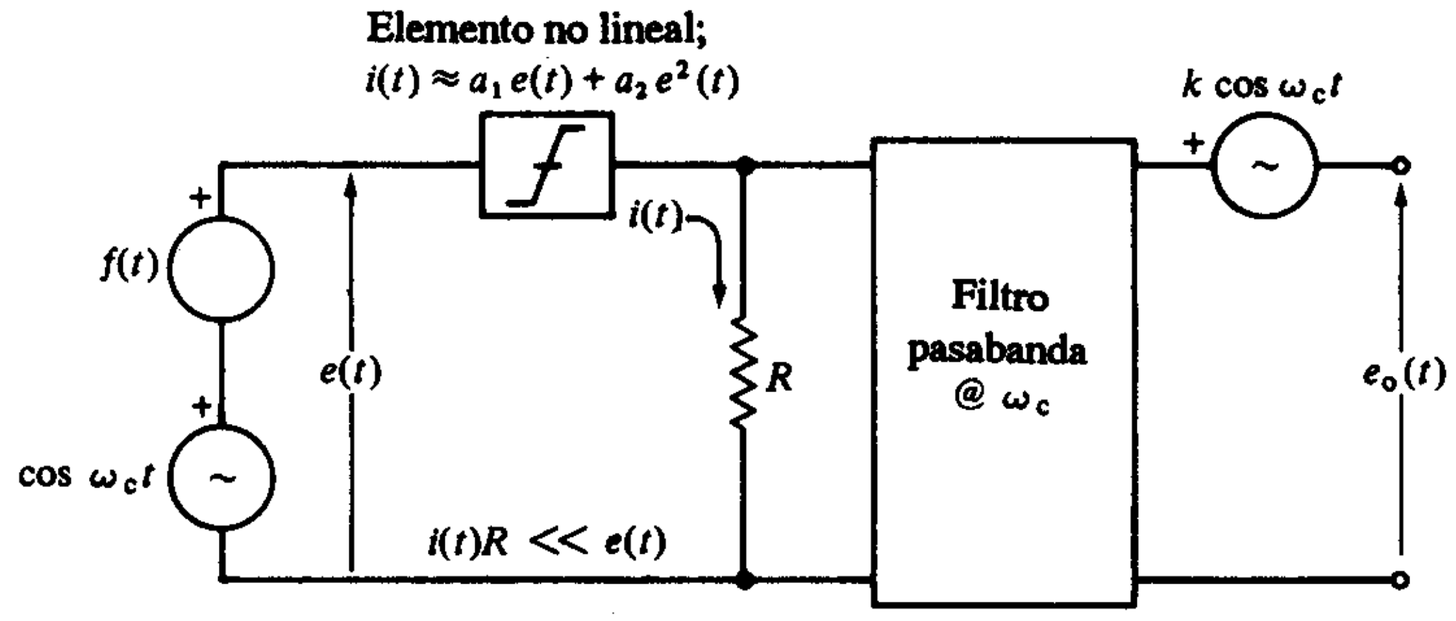


Figura 5.9 Modulador descrito en el ejercicio 5.1.4.

RESPUESTA: $k = a_1R$.

5.1.2 Demodulación (detección) de señales DSB-SC

Para restaurar la señal original $f(t)$ de la modulada $\phi(t)$, debe trasladarse de nuevo el espectro. Hemos visto que esto puede conseguirse multiplicando $\phi(t)$ por cos $\omega_c t$ (es decir, detección síncrona). Por tanto, para la demodulación se pueden usar los mismos circuitos que para la modulación, con pequeñas diferencias.

La primera diferencia consiste en que el espectro de salida del modulador estaba centrado en la frecuencia portadora. Todos los demás componentes de frecuencia se eliminaban usando un filtro pasabanda centrado en $\pm\omega_c$. Sin embargo, en el demodulador

http://libreria-universitaria.blogspot.com

el espectro de salida deseado se centra en $\omega = 0$, por lo que se necesita un filtro pasabajas en la salida.

Una segunda diferencia proviene del hecho de que el oscilador del demodulador debe sincronizarse con el del modulador para obtener una demodulación adecuada. Esto suele conseguirse con una conexión directa si el modulador y el demodulador están próximos, o bien suministrando una senoidal desplazada en frecuencia pero relacionada con la frecuencia del oscilador modulador. En este método, la senoidal se llama "portadora piloto". Habrá ocasión de ilustrar ambos métodos.

Amplificador de conmutación

Es difícil construir amplificadores con respuesta en cd o de muy baja frecuencia, más aún con desviaciones despreciables y componentes de tamaño razonable. El principio de la modulación DSB-SC puede aprovecharse para desplazar el espectro de la señal de entrada a frecuencias mayores, donde puede amplificarse con facilidad. Si se desea una salida de baja frecuencia, puede usarse un demodulador síncrono ya que se dispone de la señal del oscilador de modulación. Para esto se usa generalmente el modulador de conmutación.

En la figura 5.10(a) se muestra un amplificador de conmutación típico. El conmutador pasa a tierra la señal de entrada $f(t)$ cada medio ciclo, produciendo la señal y la densidad espectral de la figura 5.10(c). El amplificador pasabanda amplifica aquellas componentes espectrales que se encuentran alrededor de $\pm\omega_c$, produciendo la salida mostrada en la figura 5.10(d). El conmutador pasa a tierra la salida del amplificador cada medio ciclo, modulando sincrónicamente la señal de salida. Como se muestra, los medios ciclos de tierra en la entrada y salida son complementarios. Suponiendo una inversión de fase de 180° en el amplificador, la señal de salida es una réplica amplificada de la entrada. Nótese que debe cumplirse el teorema del muestreo para permitir una filtración adecuada.

La principal ventaja del amplificador de conmutación es que permite construir amplificadores de alta ganancia muy estables. En la figura 5.11 se muestra un diagrama simplificado de un voltímetro de bajo nivel estabilizado con conmutador. Pueden usarse conmutadores diferentes para la entrada y la salida si éstas se encuentran sincronizadas.

El uso de la modulación DSB-SC en el amplificador de conmutación es provechoso principalmente porque el modulador y el demodulador están muy cerca y pueden operar con una fuente común. Si el demodulador está alejado, surgen problemas de sincronización de fase y frecuencia. A continuación se verá el uso de una portadora piloto para resolver este problema.

Sistemas de portadora piloto

Un método para mantener la sincronización entre el modulador y el demodulador en la modulación DSB-SC es enviar un tono senoidal cuya frecuencia y fase estén relacionadas con la frecuencia portadora. Este tono se envía generalmente fuera de la banda de paso de la señal modulada para que no altere la capacidad de respuesta en frecuencia del sistema. Un circuito sintonizado en el receptor detecta el tono, lo traslada a la frecuencia apropiada y lo usa para demodular correctamente la señal DSB-SC.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

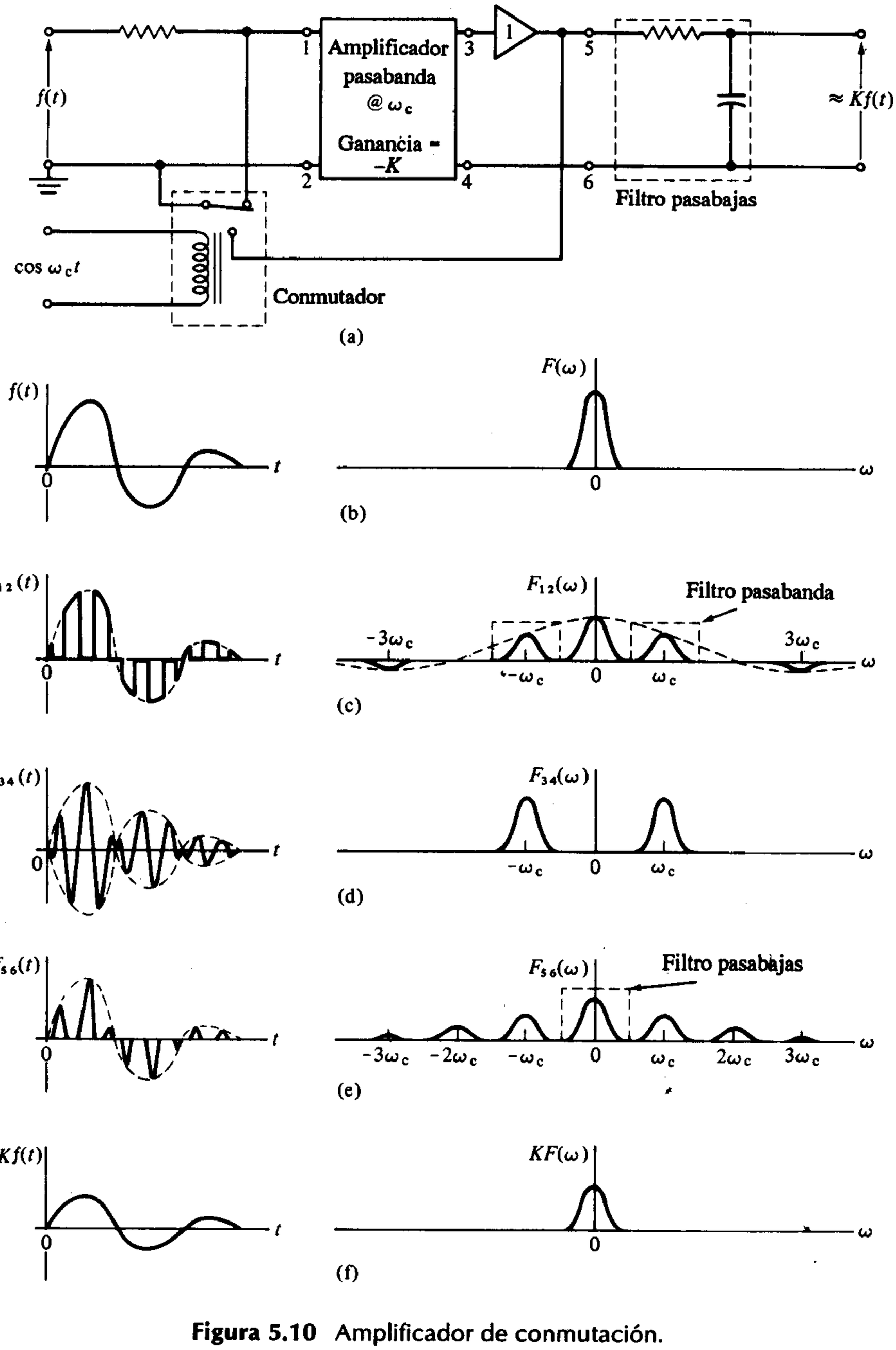


Figura 5.10 Amplificador de conmutación.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

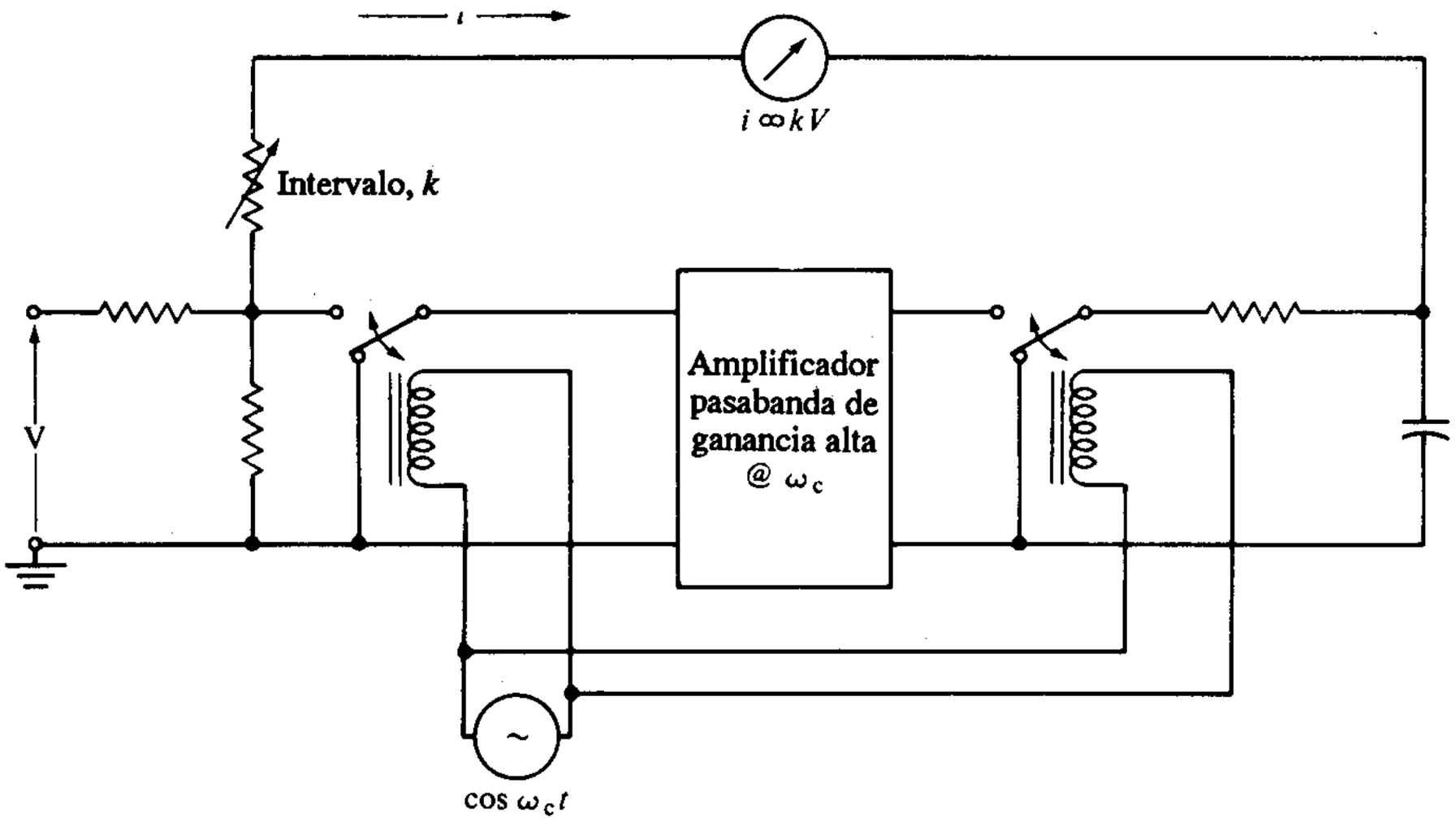


Figura 5.11 Voltímetro estabilizado con conmutador.

La multiplexión estéreo que se usa en las estaciones comerciales de frecuencia modulada (FM) es un ejemplo de sistema de tono piloto.† Para transmitir la señal compuesta, una estación de FM puede usar 75 kHz antes de la modulación de frecuencia. En la recepción se usan dos demoduladores en cascada, uno para la FM y otro para separar las señales de audio. La modulación de frecuencia se verá más adelante; aquí sólo se tratará la multiplexión estéreo.

En la radiodifusión estéreo es necesario transmitir y recibir tanto el canal izquierdo (L) como el derecho (R) además de la suma (L + R) a los receptores monofónicos. Para servir a ambos tipos de receptor, la señal (L + R) ocupa el espectro normal de audio hasta 15 kHz y la señal (L - R), también en el mismo intervalo espectral, se desplaza en frecuencia usando modulación DSB-SC. En la figura 5.12(a) se muestra un sistema diseñado para efectuar esto. La frecuencia portadora es de 38 kHz. En la figura 5.12(b) se muestra un esquema del espectro compuesto resultante. Esto deja desocupada la banda de frecuencias 15-23 kHz, y en 19 kHz se sitúa una portadora piloto. En el receptor, un filtro pasabanda estrecho, centrado en 19 kHz, selecciona la portadora piloto. El doble de esta frecuencia, 38 kHz, se usa para sincronizar el demodulador. Por último, la suma y la resta de las dos señales proporcionan las señales de audio L y R deseadas.

5.1.3 Usos en el diseño de filtros

Hasta aquí, en el estudio de la modulación DSB-SC se ha hecho hincapié en las señales, aunque los mismos principios pueden aprovecharse para el diseño de filtros especiales.

---

† La modulación de frecuencia se estudia en el capítulo 6.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

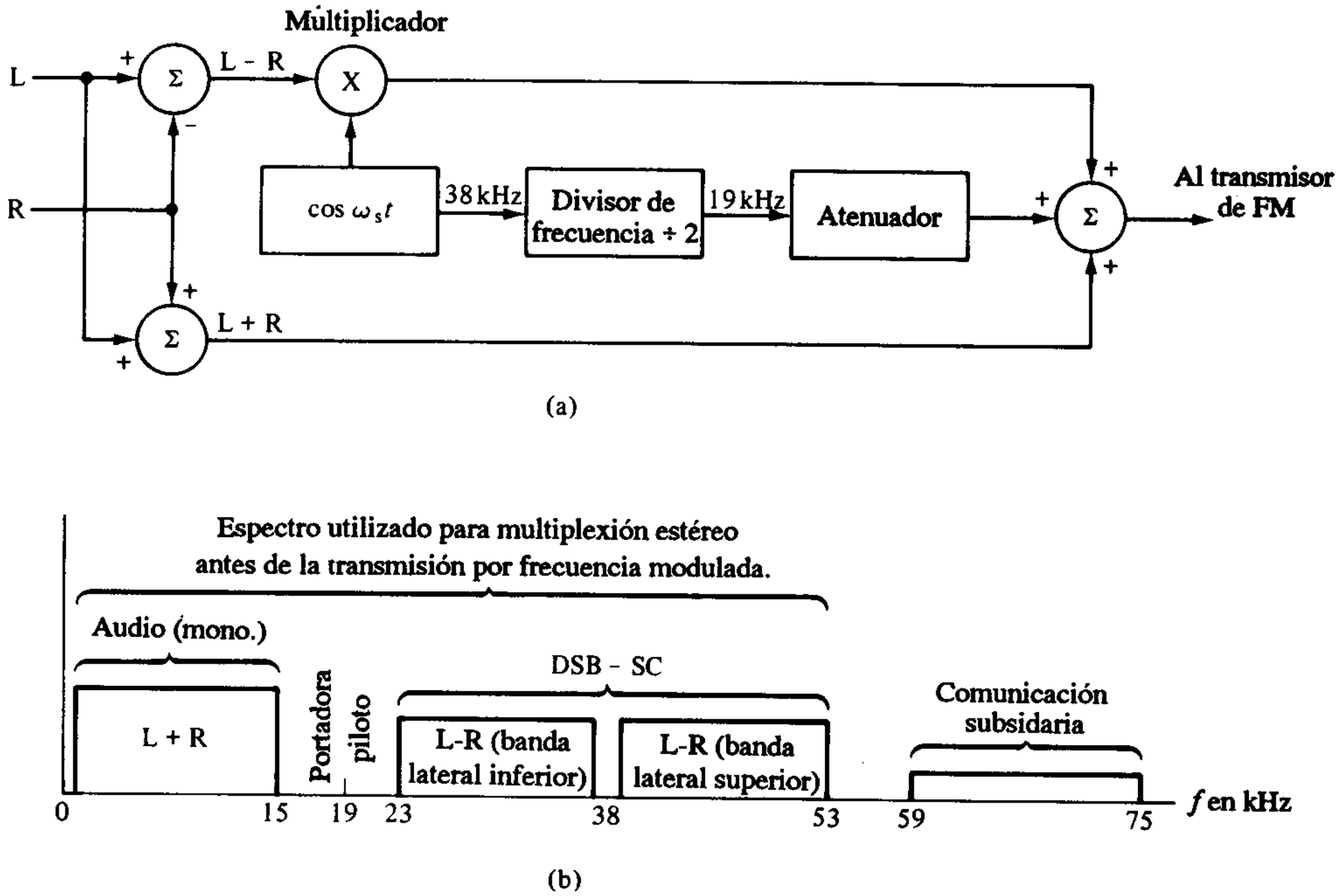


Figura 5.12 (a) Diagrama de bloques y (b) espectro de un sistema de estéreo multiplex.

De los que emplean estos principios, una clase importante es la de los filtros controlados de manera eléctrica.

En el diseño de algunos sistemas surge el problema del filtro pasabanda cuya frecuencia central es móvil y controlable. El diseño de tales filtros con los métodos usuales resulta a menudo difícil. Una alternativa interesante es usar un filtro fijo y mover las componentes de frecuencia de la señal, utilizando la modulación DSB-SC. Ahora se examinarán dos ejemplos.

Lazo de fase cerrada

En los sistemas de tono piloto surge una pregunta: ¿cuál es la mejor manera de sincronizar una senoidal con otra? Una posibilidad son los filtros pasabanda estrechos, aunque tienden a desviarse en la sintonización y no rechazan en forma óptima el ruido. Una solución muy conocida al problema de la sincronización es el llamado *lazo de fase cerrada* (PLL, *phase-locked loop*).

El lazo de fase cerrada consiste en un multiplicador de señales (es decir, un modulador balanceado), un filtro pasabajas y un oscilador controlado por tensión (VCO, *voltage-controlled oscilator*), como se muestra en la figura 5.13. Cuando la frecuencia del VCO está cerca de la frecuencia de entrada, la operación del lazo de fase cerrada es como sigue. La señal senoidal de entrada, cos $\omega_c t$, se multiplica por la salida del VCO.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

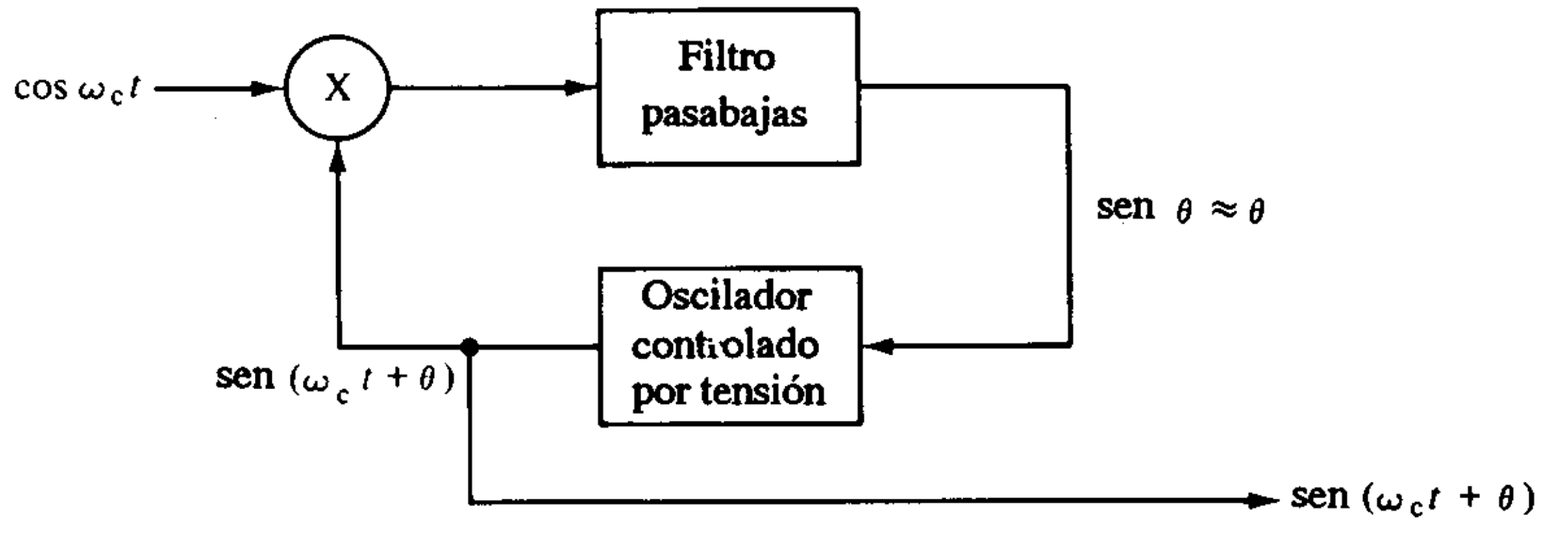


Figura 5.13 El lazo de fase cerrada.

La componente de baja frecuencia de la salida del multiplicador es una tensión con magnitud y signo proporcionales a la diferencia de fase entre la senoidal de entrada y el VCO, para diferencias pequeñas. Esta tensión se usa para controlar el VCO y el lazo intenta mantener la diferencia de fase pequeña (cero de manera ideal) entre la señal VCO y la de entrada. Así se cumple el objetivo de la sincronización entre ambas señales.

El ancho de banda del PLL es controlado por el ancho de banda del filtro pasabajas y puede hacerse muy pequeño para eliminar ruido. Sin embargo, en la práctica deben hacerse algunas concesiones porque es posible que el lazo no localice nunca la señal si la banda es estrecha. En general, el lazo se cerrará dentro de un ancho de banda. Sin embargo, la operación del lazo cuando no está cerrado es marcadamente no lineal, por lo que no se proseguirá aquí con este tema.

El PLL se utiliza en muchos tipos de equipos de medición y comunicación. En el capítulo 6 se examinará con más detalles. En la figura 5.14 se muestra un diagrama de bloques simplificado de un lazo de fase cerrada para la demodulación de multiplexión estéreo. Obsérvese que el uso de un circuito divisor por n siguiendo al VCO en la trayectoria de la señal retroalimentadora da por resultado una frecuencia VCO que es exactamente n veces la frecuencia de entrada. Esta técnica se usa a menudo en los sintetizadores de frecuencia.†

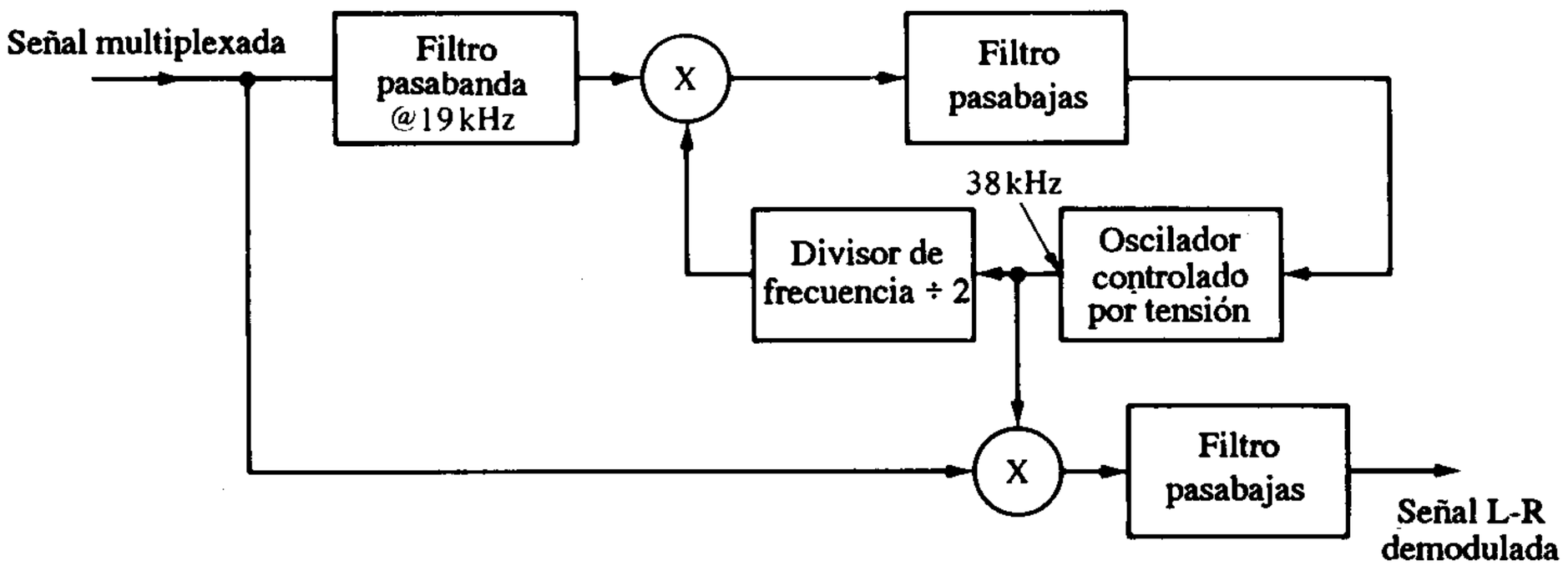


Figura 5.14 Demodulador estéreo simplificado de lazo de fase cerrada.

† Un buen tratamiento sobre el uso del PLL para sintetizadores de frecuencia se encuentra en U. Manassewitsch, *Frequency Synthesizers*, 3a. ed., Somerset, N. J., Wiley-Interscience, 1987.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Analizador de espectro

Como segundo ejemplo, supóngase que se quiere medir experimentalmente la magnitud de una densidad espectral de potencia. Como la potencia es proporcional al área bajo la densidad espectral, se necesita un filtro pasabanda muy estrecho para examinar lentamente todas las frecuencias de interés. Este filtro resulta difícil de construir. Por el contrario, es más fácil mover el espectro y mantener fijo el filtro. Normalmente, esto se consigue de la siguiente manera. Se genera una tensión rampa y se aplica a un VCO, como aparece en la figura 5.15. Esto produce una senoidal con amplitud constante y frecuencia proporcional a la tensión de entrada. Esto se usa para multiplicar $f(t)$ en un modulador balanceado, desplazando el espectro de $f(t)$. Al proseguir la rampa, el efecto neto consiste en que el espectro de la señal pasa por el filtro pasabanda (fijo) y no al revés. La tensión rampa sirve también para hacer que un rayo catódico se desplace horizontalmente, mientras que la magnitud de la salida del filtro pasabanda se usa para desviar el rayo en forma vertical. La imagen resultante es una aproximación del espectro de $f(t)$. La exactitud de la aproximación es mejor con anchos decrecientes del filtro y menores tasas de barrido de la rampa. Para conseguir tiempos de subida adecuados, la tasa de cambio de la frecuencia por lo general no es mayor que el cuadrado del ancho de banda del filtro en Hz (véase Problema 3.13.3).

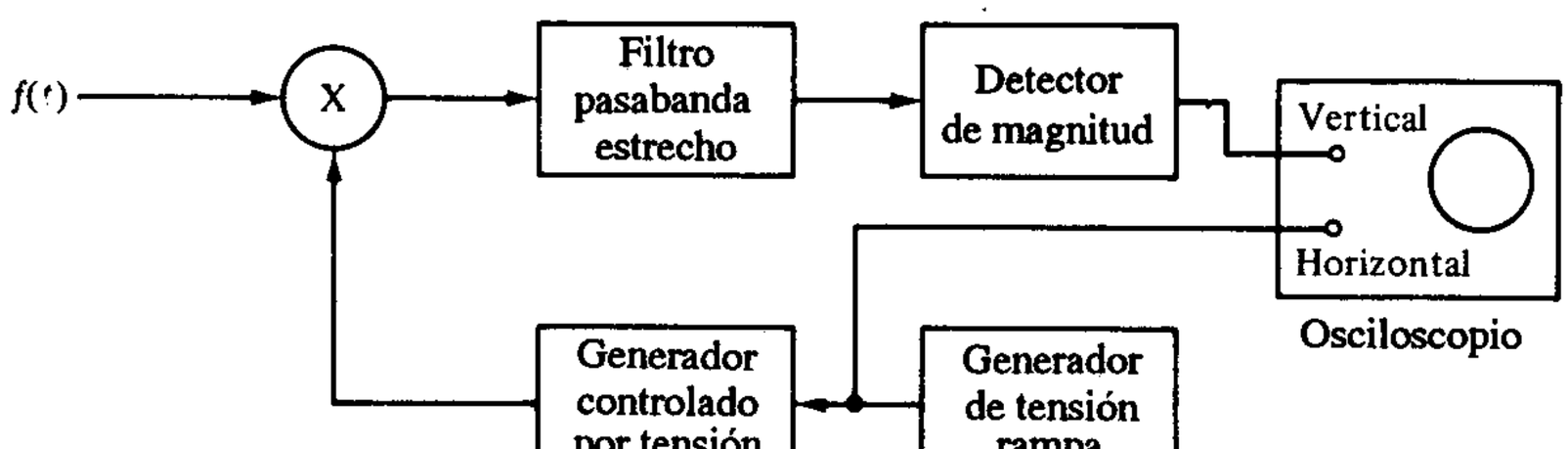


Figura 5.15 Analizador de espectro.

5.2 MODULACIÓN DE AMPLITUD: GRAN PORTADORA (AM)

Se ha visto que el uso de señales con portadora suprimida requiere circuitos bastante complejos para conseguir y mantener la necesaria sincronización de fase, si el receptor está situado a distancias grandes. Si se desea emplear receptores baratos, debe hallarse alguna alternativa para este problema de sincronización aun a expensas de un transmisor menos eficiente.

Con este objeto, supóngase que la información portadora se incorpora como parte de la señal transmitida y en el mismo ancho espectral de la señal deseada. De hecho, es conveniente hacer que la amplitud de este término portador sea mayor que cualquier otra porción de la densidad espectral de la señal. Pero si se agrega esta portadora, la respuesta de baja frecuencia del sistema se deteriorará. Sin embargo, para algunas

http://libreria-universitaria.blogspot.com

señales como las de audio, en realidad no se necesita una respuesta de frecuencia cero (se ha visto que con cd, esto es, $\omega = 0$, la respuesta en frecuencia de la señal DSB-SC aparece como la densidad espectral en ω_c). Así, en sistemas que no requieren respuesta en frecuencia cero, se puede situar un término portador grande en ω_c. Para diferenciarlo del anterior, este caso se designará como *doble banda lateral con gran portadora* (DSB-LC, *double-sideband large-carrier*). Como las estaciones de radio comerciales usan este método de transmisión, se conoce comúnmente como *modulación de amplitud* (AM).

La señal modulada de una señal DSB-LC puede describirse de manera matemática con la simple adición de un término portador, A cos $\omega_c t$, a una señal DSB-SC:

$$\phi_{AM}(t) = f(t) \cos \omega_c t + A \cos \omega_c t . \tag{5.13}$$

La densidad espectral de $\phi_{AM}(t)$ es

$$\Phi_{AM}(\omega) = \tfrac{1}{2}F(\omega + \omega_c) + \tfrac{1}{2}F(\omega - \omega_c) + \pi A\, \delta(\omega + \omega_c) + \pi A\, \delta(\omega - \omega_c) . \tag{5.14}$$

Esta densidad es igual a la de la señal DSB-SC $f(t)\cos \omega_c t$ con la adición de impulsos en $\pm\omega_c$. Esto se ve en la figura 5.16.

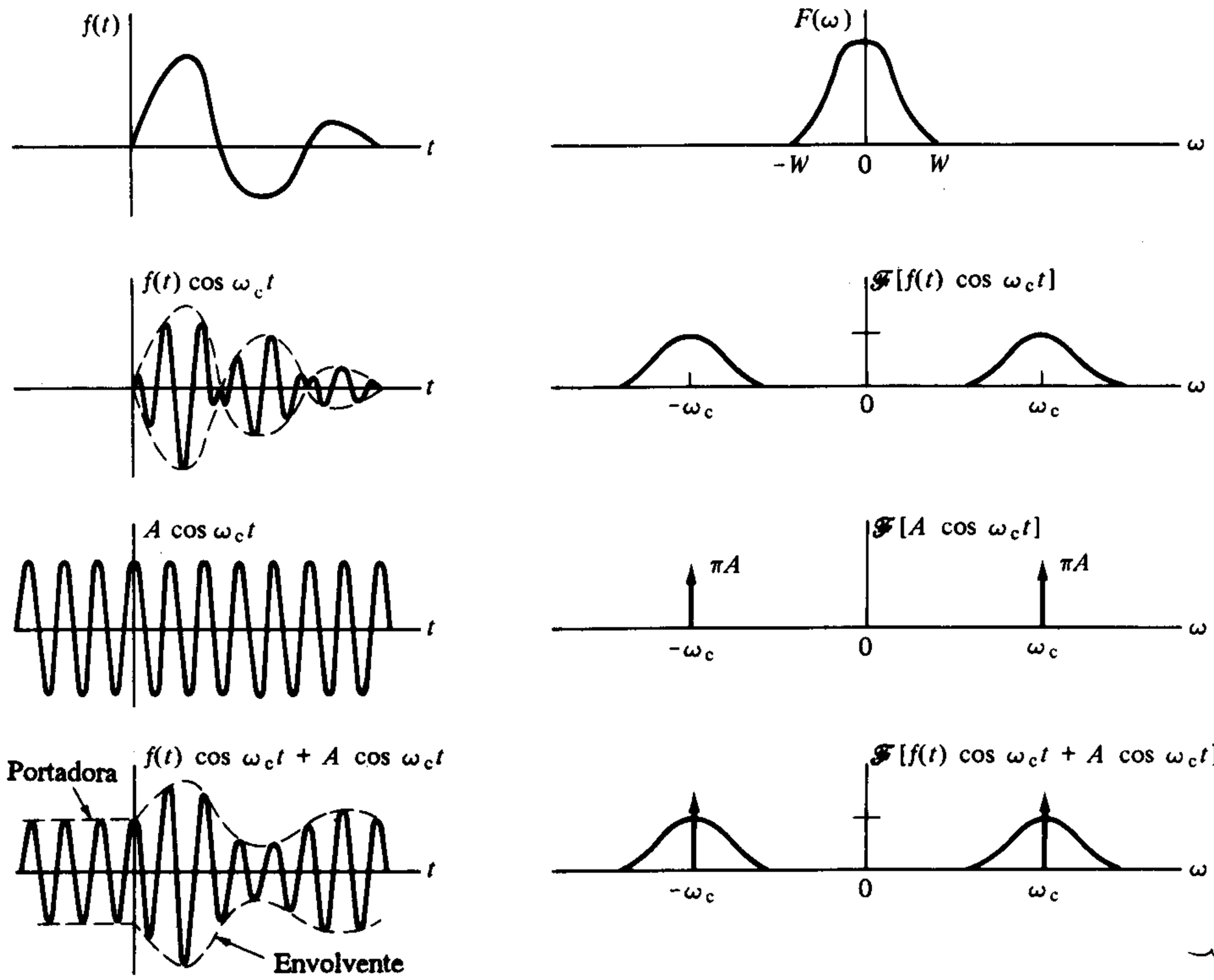


Figura 5.16 Adición de portadora para producir una señal DSB-LC.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La señal de amplitud modulada $\phi_{AM}(t)$ descrita por la ecuación (5.13) puede reescribirse en la forma

$$\phi_{AM}(t) = [A + f(t)] \cos \omega_c t . \tag{5.15}$$

Así, $\phi_{AM}(t)$ puede considerarse como la señal portadora cos $\omega_c t$ cuya amplitud está dada por la cantidad $[A + f(t)]$. Si A es bastante grande, la envolvente (la magnitud) de la señal modulada será proporcional a $f(t)$. En este caso, la demodulación se reduce a la detección de la envolvente de una senoidal, que no depende de la fase exacta o la frecuencia de ésta (es decir, de la portadora). Sin embargo, si A no es bastante grande, la envolvente de $\phi_{AM}(t)$ no es siempre proporcional a $f(t)$, como se aprecia en la figura 5.17.

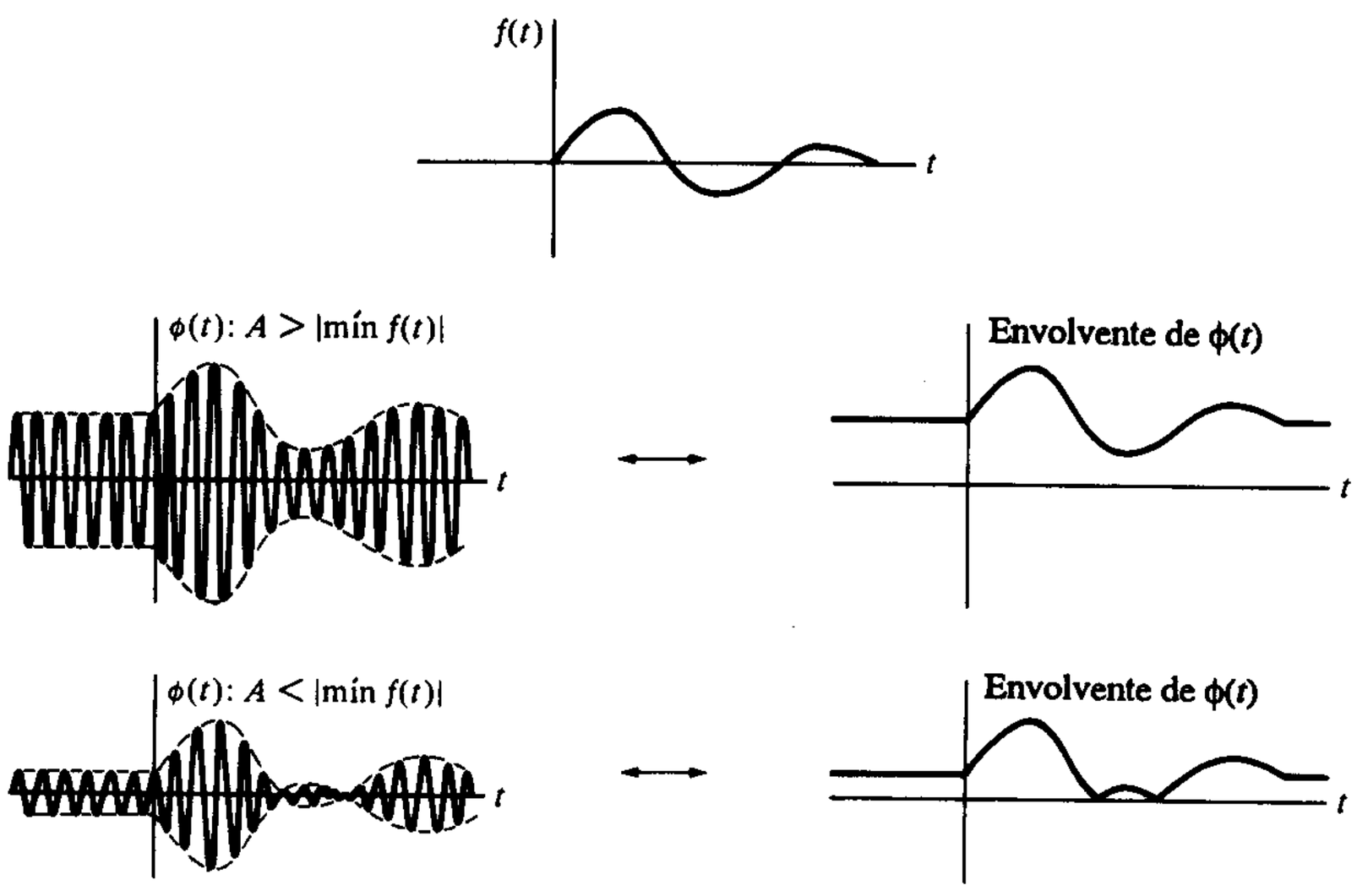


Figura 5.17 Importancia de una portadora suficiente en las señales DSB-LC.

La amplitud A de la portadora debe hacerse lo bastante grande para que $[A + f(t)] \geq 0$ en todo instante, o

$$A \geq |\text{mín } \{f(t)\}| . \tag{5.16}$$

Si esta ecuación no se satisface, $f(t)$ no puede ser recobrada por el simple proceso de detección de la envolvente.† Sin embargo, la detección síncrona aún demodulará en forma correcta tales señales. Nótese que en la demodulación se ha perdido la respuesta en cd de la señal $f(t)$ como resultado de la adición de la portadora.

Para reforzar estos conceptos, volveremos ahora al caso especial de un tono senoidal de frecuencia simple, cos $\omega_m t$, como señal moduladora. Como las magnitudes relativas

† En la sección 5.2.3 se examinarán métodos de detección de envolvente.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

de la banda lateral y la porción portadora de la señal son variables, se define un factor de escala adimensional, m, para controlar la relación entre las bandas laterales y la portadora:

$$m = \frac{\text{amplitud pico DSB–SC}}{\text{amplitud pico de la portadora}}, \tag{5.17}$$

de manera que†

$$\begin{aligned} \phi_{AM}(t) &= A \cos \omega_c t + mA \cos \omega_m t \cos \omega_c t \\ &= A(1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega_c t . \end{aligned} \tag{5.18}$$

En la figura 5.18 aparecen gráficas de cada uno de los términos de la ecuación (5.18) y su suma para diferentes valores del parámetro m. Nótese que las porciones de la señal DSB-SC que están en fase [es decir, $f(t) > 0$] con la portadora se suman, mientras que las que están desfasadas 180° [esto es, $f(t) < 0$] se restan. Los máximos de la envolvente de la señal compuesta son $(1 + m)A$ y los mínimos para $m \leq 1$ son $(1 - m)A$. Cuando $m \leq 1$, los valores pico de la portadora modulada determinan una señal envolvente proporcional al tono modulador, cos $\omega_m t$. Si $m = 0$, la envolvente se reduce a la constante A, como debería ocurrir.

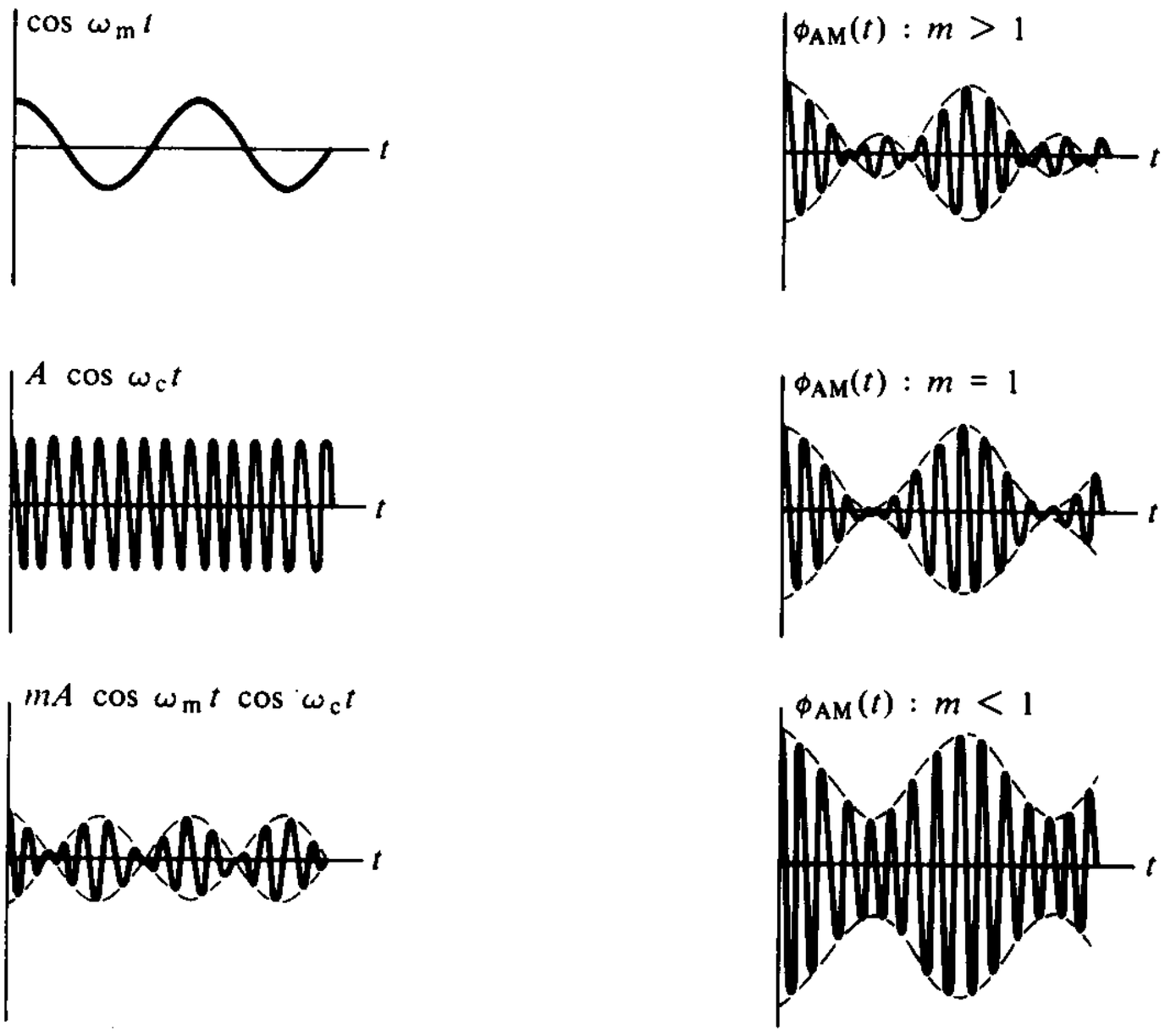


Figura 5.18 Efectos de la variación de los índices de modulación.

† Incluyendo la constante multiplicadora k_a, si $f(t) = a \cos \omega_m t$, entonces $m = ak_a$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

A menudo es conveniente definir un porcentaje de modulación para una señal DSB-LC con modulación senoidal como

$$\% \text{ mod.} = \frac{(\text{magnitud máx.}) - (\text{magnitud mín.})}{(\text{magnitud máx.}) + (\text{magnitud mín.})} \times 100\%$$

$$= \frac{(1 + m)A - (1 - m)A}{(1 + m)A + (1 - m)A} \times 100\% = m \times 100\% . \qquad (5.19)$$

El parámetro m que controla las proporciones relativas entre la banda lateral y la portadora se llama *índice de modulación* de la señal AM. De la ecuación (5.18) puede verse fácilmente que para que ocurra una detección de la envolvente sin fuerte distorsión, hace falta que $m \leq 1$. Si $m > 1$ se dice que la señal está sobremodulada.

El estudiante debe tener cuidado de no confundir la señal de la sumatoria de dos senoidales con la de una señal senoidal de amplitud modulada con índice de modulación pequeño. Ambos casos se describen en la figura 5.19. Nótese que sus densidades espectrales son muy diferentes.

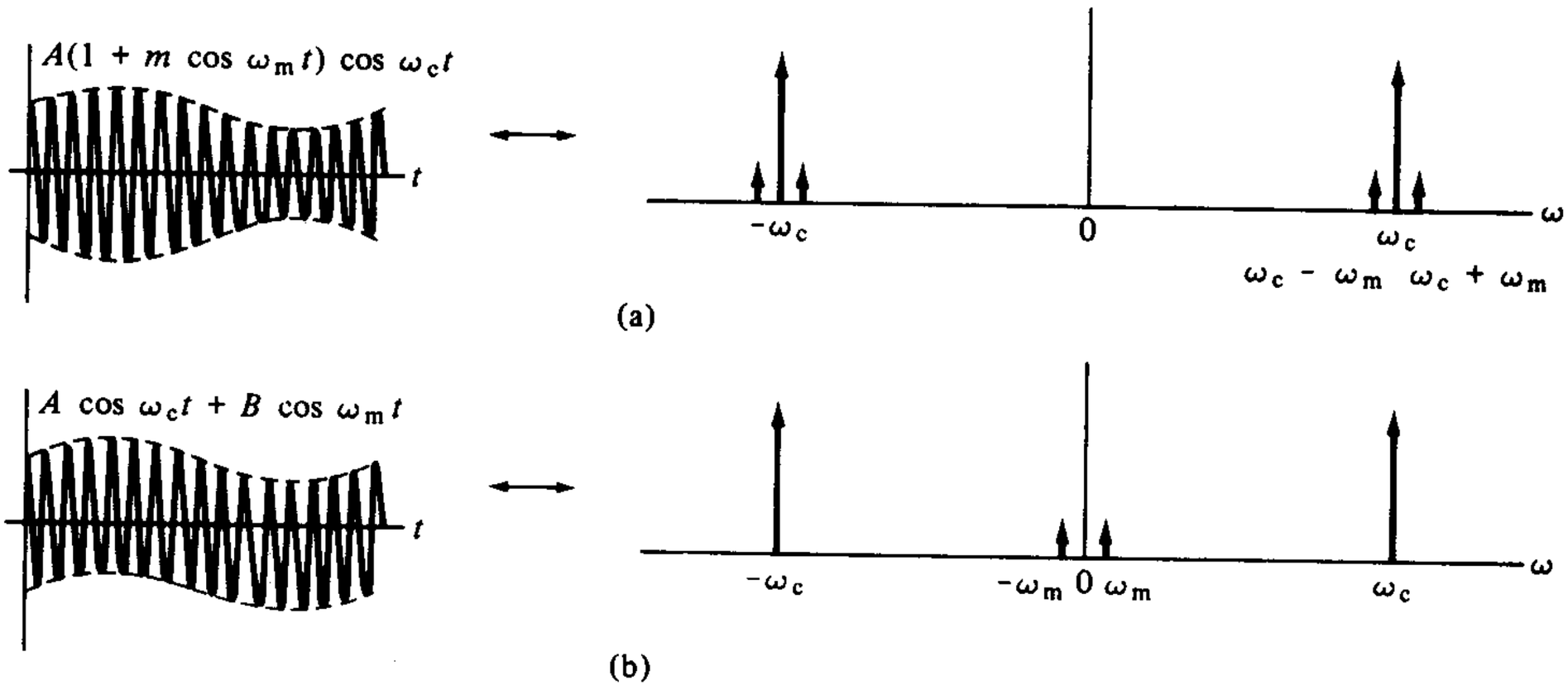


Figura 5.19 Modulación (a) y suma (b) de amplitud para el caso senoidal.

$$\phi_{AM}(t) = A \cos \omega_c t + f(t) \cos \omega_c t . \qquad (5.20)$$

5.2.1 Potencia de la portadora y la banda lateral en AM

En las señales de AM, el término portador no contiene información alguna sobre la señal moduladora $f(t)$. Por tanto, la potencia empleada en la portadora se desperdicia para cualquier transferencia de información. Es el precio que debe pagarse para disponer de receptores baratos.

En general, una señal AM puede describirse por medio de

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Para una carga de un ohm, la potencia promedio total está dada por el valor cuadrático medio de la ecuación (5.20),

$$\overline{\phi_{AM}^2(t)} = A^2\,\overline{\cos^2 \omega_c t} + \overline{f^2(t)\cos^2 \omega_c t} + 2A\overline{f(t)\cos^2 \omega_c t}\,, \tag{5.21}$$

donde la barra indica promedio temporal. Se supondrá que $f(t)$ varía lentamente con relación a cos $\omega_c t$. Si además se supone que el valor promedio de $f(t)$ es cero (el caso usual), entonces el último término de la ecuación 5.21 es cero y queda†

$$\begin{aligned}\overline{\phi_{AM}^2(t)} &= A^2\,\overline{\cos^2 \omega_c t} + \overline{f^2(t)}\;\overline{\cos^2 \omega_c t} \\ &= A^2/2 + \overline{f^2(t)}/2\,. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Por tanto, la potencia total P_t puede expresarse como la suma de una potencia portadora P_c y una de banda lateral P_s:

$$P_t = \tfrac{1}{2}A^2 + \tfrac{1}{2}\overline{f^2(t)} = P_c + P_s\,. \tag{5.23}$$

La fracción de la potencia total contenida en las bandas laterales, μ, está dada por

$$\mu = \frac{P_s}{P_t} = \frac{\overline{f^2(t)}}{A^2 + \overline{f^2(t)}}\,. \tag{5.24}$$

Volviendo al caso en que $f(t)$ es una senoidal simple [véase Ec. (5.18)],

$$\begin{aligned}\phi_{AM}(t) &= A(1 + m\,\cos \omega_m t)\cos \omega_c t \\ &= A\,\cos \omega_c t + mA\,\cos \omega_m t\,\cos \omega_c t\,,\end{aligned}$$

se tiene

$$\overline{\phi_{AM}^2(t)} = \tfrac{1}{2}A^2 + (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})m^2A^2, \tag{5.25}$$

y

$$\mu = \frac{m^2}{2 + m^2}\,. \tag{5.26}$$

Como $m \leq 1$, en la ecuación (5.26) se ve que la eficiencia de la transmisión de un sistema AM (DSB-LC) es, cuando mucho, de 33%. En las mejores condiciones, es decir, $m = 1$, 67% de la potencia total se consume en la portadora y representa potencia desperdiciada por lo que concierne a la transferencia de información. Para índices de modulación más bajos, la eficiencia es menor que 33%. Por ejemplo, un índice de 0.5 da una eficiencia de 11.1%. Por el contrario, la eficiencia de transmisión de un sistema DSB-SC es de 100% (si se transmite una portadora piloto, la eficiencia es ligeramente menor que 100%).

---

† Si $\overline{f(t)}$ no es cero, entonces el primero y el último términos de la derecha de la ecuación (5.21) pueden combinarse en una potencia portadora efectiva. Es decir, un valor promedio de $f(t)$ distinto de cero aparece en la señal AM como un término portador.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJEMPLO 5.2.1

Una estación de radio AM (DSB-LC) transmite una potencia portadora promedio total de salida de 40 kW y usa un índice de modulación de 0.707 para modulación de señal senoidal. Calcule (a) la potencia promedio total de salida; (b) la eficiencia de transmisión y (c) la amplitud pico de la portadora si la antena está representada por una carga resistiva de 50 Ω.

Solución a) De la ecuación (5.25), tenemos

$$P_t = P_c(1 + m^2/2)\,.$$

Para $m = 0.707$,

$$P_t = (1 + \tfrac{1}{4})P_c = \tfrac{5}{4}P_c\,,$$

$$P_t = 50 \text{ kW}.$$

b) De la ecuación (5.26), obtenemos

$$\mu = \frac{(0.707)^2}{2 + (0.707)^2} = \frac{0.500}{2.500} = 20\%\,.$$

c) Entonces

$$P_c = \frac{A^2}{2R}\,,$$

$$A^2 = 2RP_c = 4 \times 10^6,$$

$$(1 + m)A = 3414 \text{ V}.$$

EJERCICIO 5.2.1

En el ejemplo anterior, la amplitud del tono modulador disminuye hasta que la potencia total es de 45 kW. Suponiendo que la potencia portadora es constante, calcule el nuevo índice de modulación y la eficiencia de transmisión.

RESPUESTA: (a) 0.500; (b) 11.1%.

5.2.2 Generación de señales DSB-LC

De manera conceptual, la forma más fácil de generar una señal DSB-LC es producir primero una señal DSB-SC y luego agregarle alguna portadora. Esto se muestra en forma de diagrama de bloques en la figura 5.20. Sin embargo, resulta que las señales DSB-LC son, en general, más fáciles de generar en forma directa, por lo que el sistema de la figura 5.20 tiene un valor más analítico que práctico.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

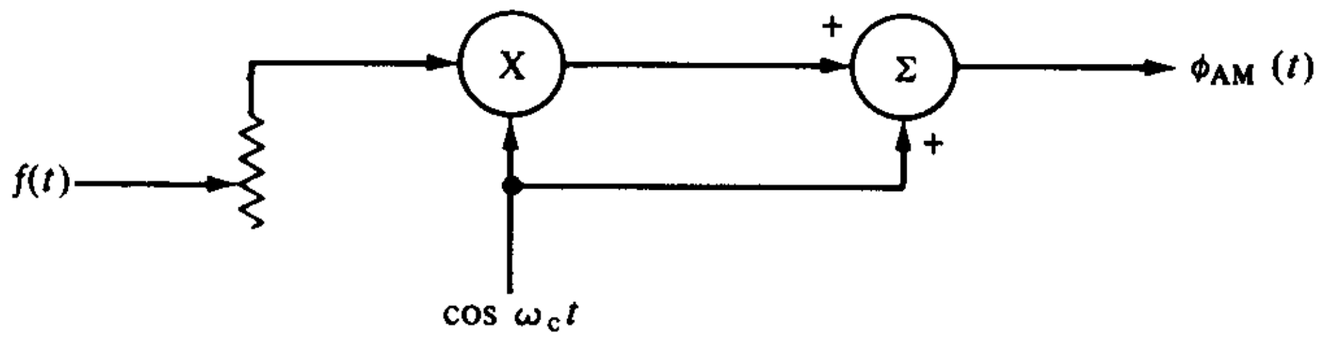


Figura 5.20 Diagrama de bloques de la generación de DSB-LC.

Como en el caso de las señales DSB-SC, la generación de señales DSB-LC puede dividirse entre los moduladores de tipo conmutador (interruptor) y los que usan características no lineales de los dispositivos.

Modulador (rectificador) de conmutación

El modulador de conmutación se puede extender directamente para la generación de AM agregando un nivel de cd a $f(t)$ antes de la conmutación. Si este nivel es lo bastante grande para cumplir la condición $[A + f(t)] > 0$, es fácil ver que la señal de salida será DSB-LC.

Otra posibilidad para obtener lo mismo es añadir a $f(t)$ alguna portadora antes de la conmutación. Esto se muestra en la figura 5.21(a). La acción de la conmutación puede verse como la multiplicación de la señal de entrada por una señal periódica cuadrada $p_T(t)$ cuya frecuencia fundamental es de ω_c rad/s. La densidad espectral de la señal conmutada resultante puede hallarse usando la propiedad de modulación de la transformada de Fourier o haciendo convolución en frecuencia de la densidad espectral de $[f(t) + k \cos \omega_c t]$ con la densidad espectral de $p_T(t)$, como se muestra en la figura 5.21. El resultado es un término: $[\frac{1}{2}k \cos \omega_c t + (2/\pi)f(t) \cos \omega_c t]$ centrado en $\pm\omega_c$. Las componentes de frecuencia no deseadas en $\omega = 0, \pm 3\omega_c, \pm 5\omega_c$, etc., se pueden bloquear con un filtro pasabanda adecuado.

No es necesario que el conmutador sea accionado por una fuente separada si la amplitud de la portadora se hace mucho mayor que $f(t)$. Un diodo ideal actuará muy bien como interruptor y, si la portadora es grande, apagará y encenderá a la frecuencia de ésta. En la figura 5.21(b) aparece el diagrama de un modulador con un diodo como interruptor. Las características espectrales son iguales que las del modulador de conmutación descrito. Como el diodo elimina la parte negativa de la señal compuesta $[f(t) + k \cos \omega_c t]$, efectúa, en esencia, una rectificación de media onda de la señal de entrada. Por ello, este modulador se conoce también como modulador de tipo rectificador.

La modulación de amplitud con este modulador es relativamente fácil de obtener en niveles de potencia altos usando amplificadores operados en condiciones de clase C. Un filtro *LC* en paralelo en la salida realiza la operación de filtración pasabanda requerida. Si se intenta sobremodular con este tipo de modulador, no aparecerá salida en lugar de la inversión de fase portadora. Esto provoca abruptas discontinuidades en la señal modulada e introduce mucho contenido armónico en el espectro. Para evitar esto, se requieren transmisores de radio AM de alta potencia que mantengan un índice de modulación inferior al 100% en los picos negativos del contenido del programa.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

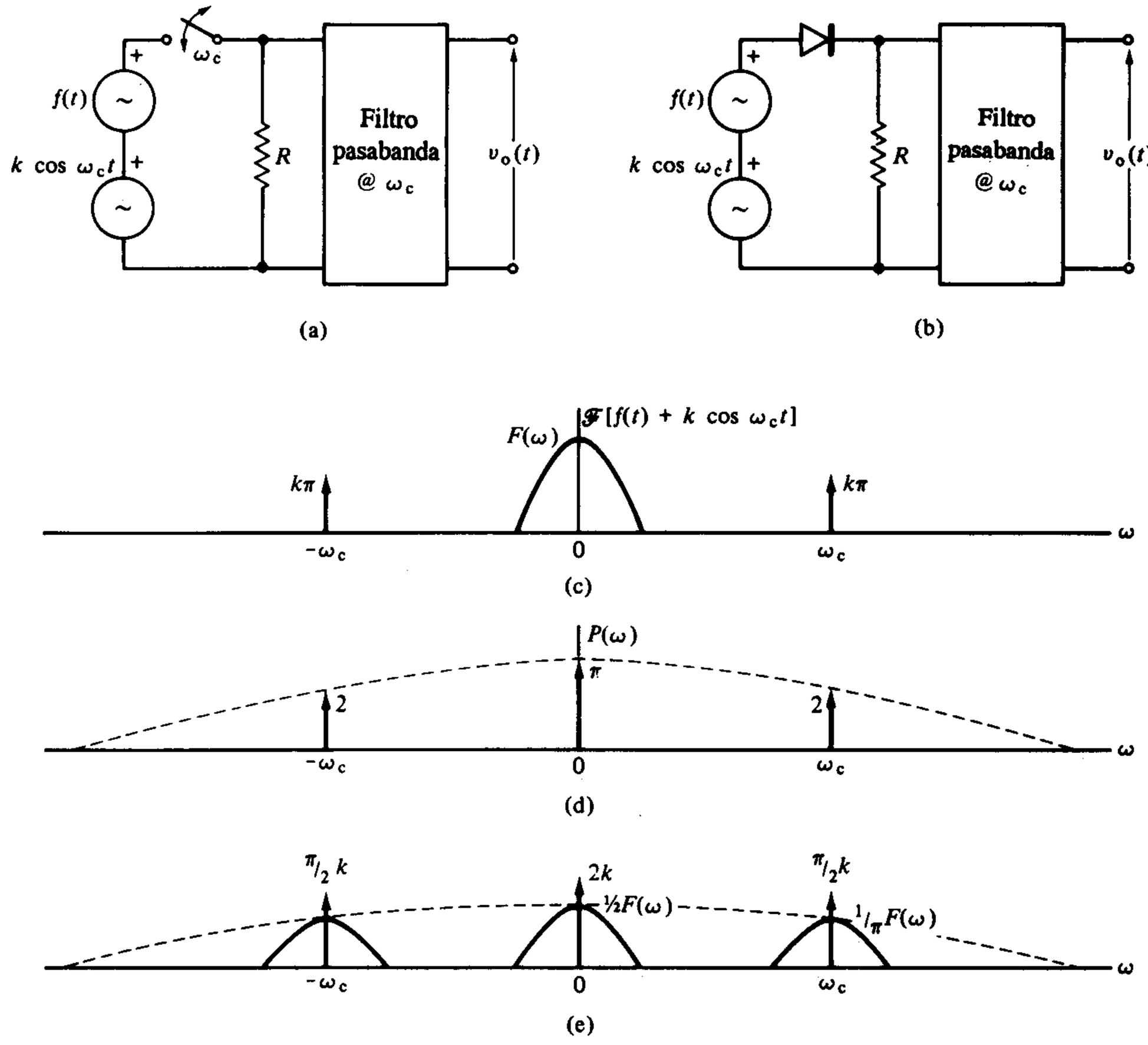


Figura 5.21 Generación de una señal de AM usando el modulador (rectificador) de conmutación.

Modulador que usa no linealidades

El sistema de la figura 5.21(b) puede usarse para generar AM, aun cuando el diodo no opere como interruptor ideal. En este caso, las no linealidades en la característica del diodo pueden aproximarse con una serie de potencias de la forma

$$i(t) = a_1 e(t) + a_2 e^2(t) + \cdots, \qquad i(t)R \ll e(t). \tag{5.27}$$

Reteniendo sólo los dos primeros términos, encontramos que la tensión en la entrada del filtro pasabanda (despreciando los efectos de cualquier impedancia de entrada finita) es

$$i(t)R = a_1 R[f(t) + k \cos \omega_c t] + a_2 R[f(t) + k \cos \omega_c t]^2 + \cdots. \tag{5.28}$$

Expandiendo y agrupando términos en la frecuencia portadora, tenemos

$$v_o(t) = a_1 Rk \cos \omega_c t + 2a_2 Rkf(t) \cos \omega_c t. \tag{5.29}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Esta ecuación es el resultado deseado para una señal DSB-LC. El diodo semiconductor actúa como una combinación del modulador rectificador y del modulador que usa una característica no lineal.

EJERCICIO 5.2.2

Sea $f(t)$ igual a cos $\omega_m t$. Si $a_1 = 0.010$ y $a_2 = 0.001$ en la ecuación (5.28), determine el índice de modulación de la señal DSB-LC resultante cuando se bloquean todos los términos excepto los cercanos a la frecuencia portadora.

RESPUESTA: $m = 0.20$.

5.2.3 Demodulación (detección) de señales DSB-LC (AM)

En señales DSB-LC (AM), la señal $f(t)$ deseada está disponible en la envolvente de la señal modulada. Por supuesto, la detección síncrona dará la señal deseada, pero es posible demodular señales AM con técnicas mucho más simples. El método más sencillo y usual es el que detecta directamente la envolvente de la señal modulada; se llama detector de envolvente.

Detector de envolvente

Cualquier circuito cuya salida siga a la envolvente de la señal de entrada sirve como detector de envolvente. El más simple es un circuito de carga no lineal de carga rápida y descarga lenta. Puede construirse con facilidad usando un diodo en serie con un capacitor, como se muestra en la figura 5.22(b). Un resistor en paralelo con el capacitor

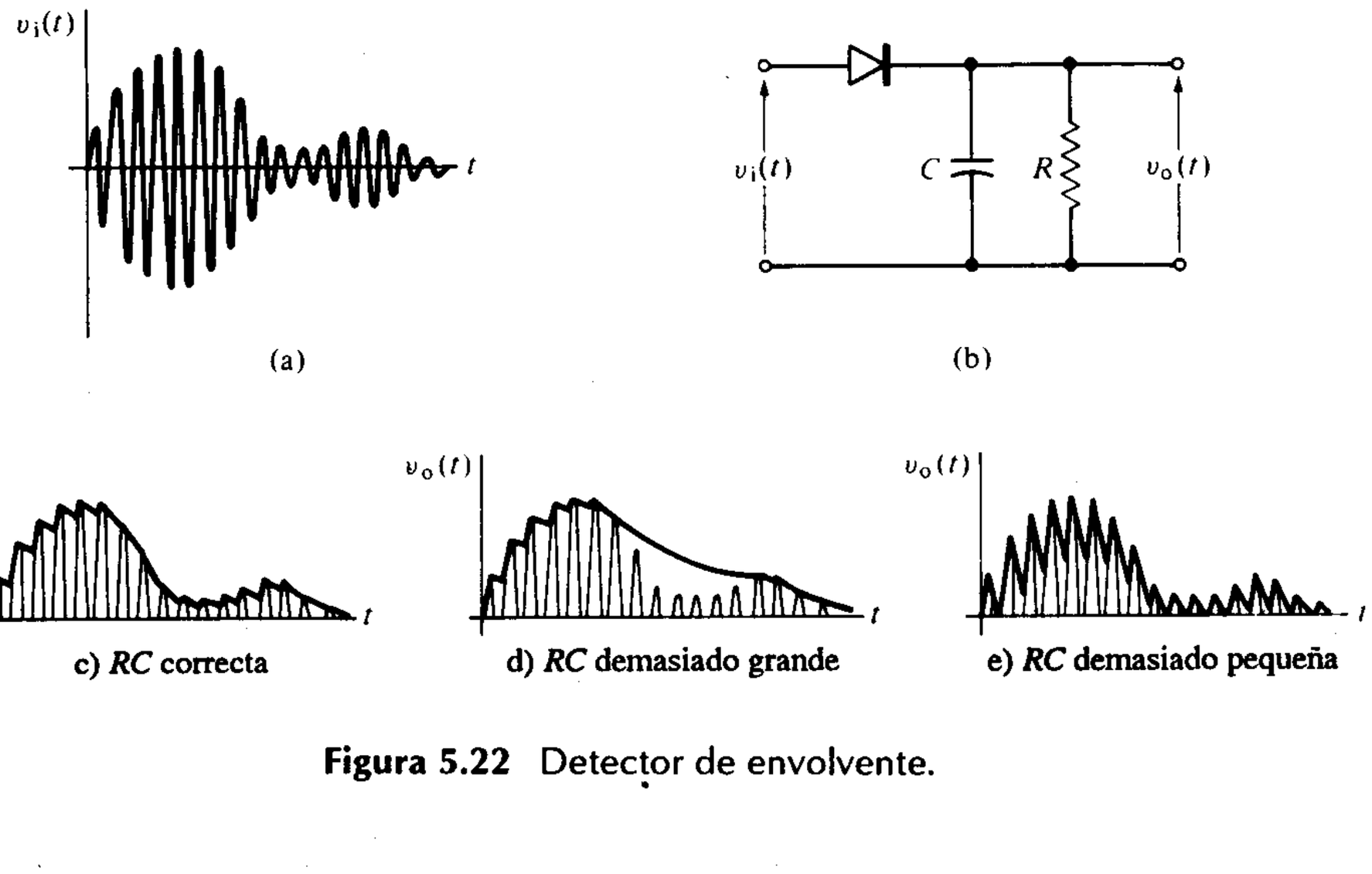


Figura 5.22 Detector de envolvente.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

controla la constante de descarga. Los efectos de varias constantes de descarga se muestran en la figura 5.22(c), (d) y (e).

El detector de envolvente opera como sigue. En los medios ciclos positivos de la señal de entrada, el capacitor C se carga hasta el valor pico de la señal. Cuando la señal de entrada cae por debajo de este valor, el diodo se cierra. El capacitor se descarga lentamente a través del resistor hasta el siguiente medio ciclo positivo, en el cual la señal de entrada se hace mayor que la tensión del capacitor y el diodo conduce de nuevo. El capacitor se carga hasta el nuevo valor pico, etcétera.

Para una mejor operación, la constante de tiempo de descarga *RC* debe ajustarse de manera que la máxima pendiente negativa de la envolvente no exceda nunca la razón exponencial de descarga. Si esta constante es muy grande, el detector puede perder algunos medios ciclos positivos de la portadora y, en consecuencia, no reproducir con fidelidad la envolvente. Si la constante de tiempo es demasiado pequeña, el detector genera una señal muy escabrosa, perdiendo algo de eficiencia. La señal detectada resultante se pasa de manera usual por un filtro pasabajas para eliminar el contenido armónico no deseado. Para eliminar el nivel de cd introducido por la portadora, puede usarse un capacitor de acoplamiento. Debido a la presencia de este nivel de cd, los métodos DSB-LC no son apropiados si se desea una respuesta de frecuencia de $f(t)$ hasta $\omega = 0$.

El detector de envolvente es simple, eficiente y barato, y es de uso casi universal para la detección de señales DSB-LC.

El fácil empleo del detector de envolvente sugiere que quizá estas técnicas también podrían usarse para la detección de señales DSB-SC. Como en estas señales no hay término portador, debe añadirse suficiente portadora en el receptor para hacer posible la detección. Esto se hace a veces para simplificar el diseño del receptor; este tipo de receptor se llama receptor de tipo *portadora inyectada*. Por supuesto, el problema es mantener la portadora en la frecuencia correcta, por lo que tales sistemas tienen problemas de sincronización.

Otros métodos de detección

Si el circuito detector de envolvente descrito antes se conecta a tierra, puede hacerse que el diodo trabaje esencialmente como interruptor, encendiéndose y apagándose al ritmo de la portadora. Como tal acción rectifica la señal modulada, esto se conoce como detector rectificador. Un filtro pasabajas elimina los términos de alta frecuencia después de la rectificación, como se muestra en la figura 5.23. El detector rectificador no es tan eficiente como el de envolvente, y rara vez se usa en receptores comerciales. Encuentra aplicación en la detección de amplitud de señales pulsantes, donde la lenta descarga exponencial del detector de envolvente no es deseable.

Los métodos de detección síncrona usados para señales DSB-SC se pueden usar también para señales DSB-LC. Por ejemplo, puede emplearse un PLL para sincronizar un oscilador con la frecuencia portadora y esto, a su vez, utilizarse para demodular de manera síncrona la señal. Sin embargo, tan elaboradas técnicas de recepción se usan rara vez debido a la mayor complejidad en el diseño y operación del receptor.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

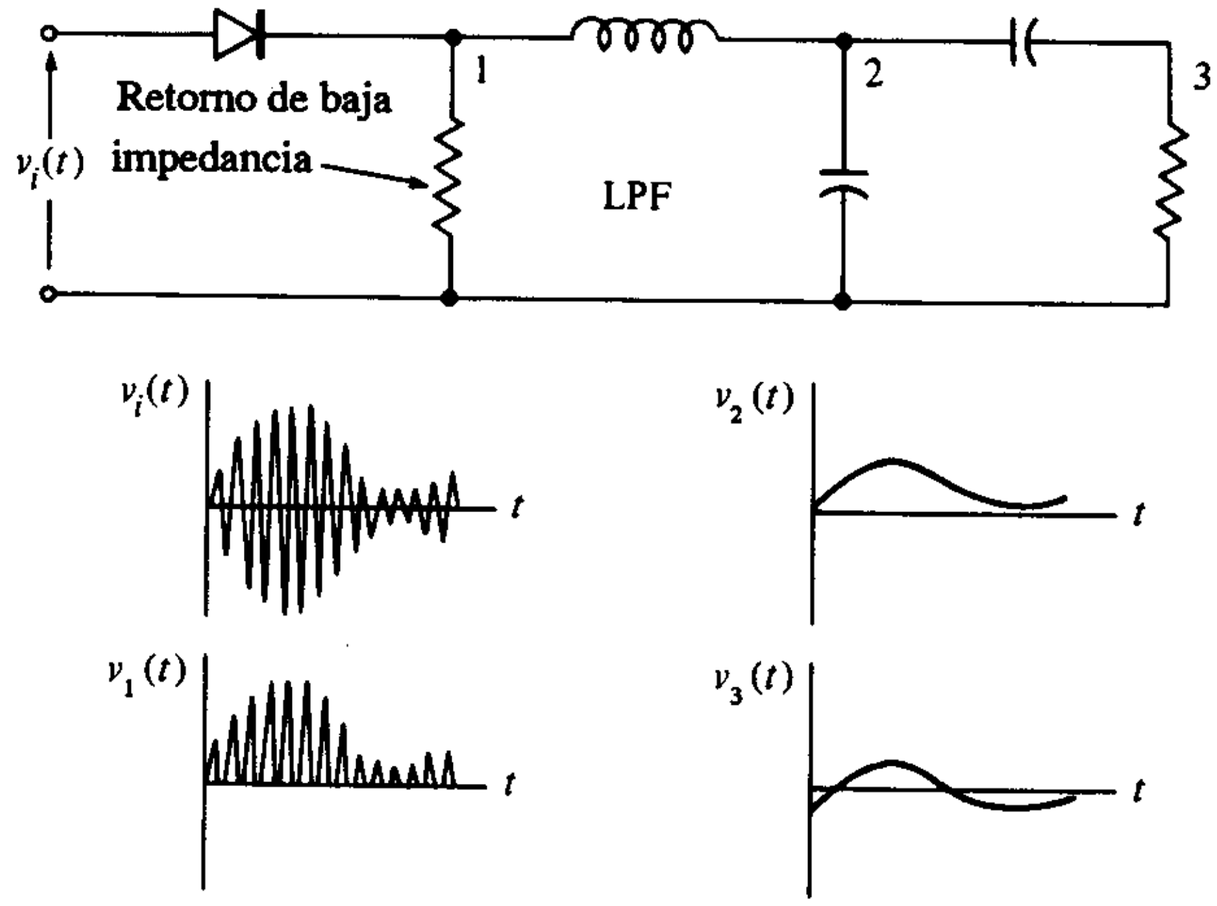


Figura 5.23 Detector rectificador.

5.3 MULTIPLEXIÓN POR DIVISIÓN EN FRECUENCIA (FDM)

Del estudio de la modulación de amplitud, vemos que es posible enviar varias señales en forma simultánea eligiendo una frecuencia portadora diferente para cada una. Estas frecuencias se seleccionan de manera que los espectros de las señales no se traslapen. Este modo de transmisión se llama *multiplexión por división en frecuencia* (FDM, *frequency-division multiplexing*) y consiste en situar los espectros de las señales en frecuencia de manera que cada uno pueda separarse de los demás por filtración. Aquí se destaca el uso de la modulación de amplitud, aunque la multiplexión por división en frecuencia no excluye el uso de otros métodos de modulación.

Para ilustrar los principios de la FDM, supóngase que se quieren transmitir de manera simultánea varias señales, usando modulación DSB-LC o DSB-SC. Supóngase también que hay N señales diferentes y que, por conveniencia, la banda de cada una está limitada a ω_m rad/s. Para separarlas en frecuencia, cada señal se modula con una frecuencia portadora $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$. Por tanto, la densidad espectral de cualquier señal modulada tiene un ancho de banda de $2\omega_m$ y cada una se centra en varias frecuencias portadoras $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$. Estas frecuencias se eligen lo bastante alejadas entre sí como para que cada densidad espectral esté separada de las demás. Esto requiere una separación entre frecuencias adyacentes de por lo menos $2\omega_m$. En la figura 5.24(a), (b) y (c) se ilustra el caso en que tres señales se trasladan en frecuencia y se transmiten de manera simultánea.

En el receptor se consideran dos posibilidades. En la primera, el receptor procesa de manera simultánea los distintos espectros, separándolos en frecuencia con los filtros pasabanda adecuados y después demodulándolos. Esto se muestra en la figura 5.24(d). En la práctica, la señal compuesta formada al espaciar varias señales puede, a su vez, modularse usando otra frecuencia portadora. Para distinguir esta elección de las primeras frecuencias portadoras en este caso, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ se llaman *subportadoras*.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

http://libreria-universitaria.blogspot.com

al receptor sólo una gran portadora o varias portadoras piloto. Esto permite usar la modulación DSB-SC, más eficiente. La multiplexión estéreo examinada antes es un ejemplo común de esto. Por otra parte, en el segundo método sólo se recibe una señal a la vez y, para que el receptor sea sencillo, suele usarse la DSB-LC. Los receptores comerciales de radio y televisión representan ejemplos familiares de este tipo de FDM. Merece la pena examinar el receptor de radio normal para ver cómo se consigue esto en la práctica.

Cada transmisor comercial de radio AM envía una señal DSB.LC cuya frecuencia portadora está separada de las de otras estaciones. Las frecuencias portadoras se asignan a espacios de 10 kHz, de 540 a 1600 kHz.† Un receptor puede elegir cualquiera de ellas sintonizando la frecuencia portadora adecuada. La señal seleccionada se demodula usando un detector de envolvente o un detector rectificador para producir la señal deseada.

Los primeros receptores de AM efectuaban estas operaciones exactamente en la misma forma. Estos receptores estaban constituidos por una antena, un sistema *LC* de sintonización para seleccionar estaciones, un diodo como detector y un par de audífonos. A menos que se viviera cerca de una emisora, las señales recibidas en las terminales de la antena eran débiles y se necesitaba amplificación y filtración para mejorar la sensibilidad (es decir, la capacidad de recibir señales débiles) y la selectividad (es decir, la capacidad de separar las señales de diferentes estaciones).

El siguiente paso lógico en el desarrollo del receptor fue la sintonización de radiofrecuencias (TRF, *tuned-radio-frequency*), que se muestra en la figura 5.25(a). Todas las etapas de amplificación (usualmente unas tres) se sintonizaban al mismo tiempo para seleccionar las estaciones. Sin embargo, manejar tres controles de sintonía separados hacía del cambio de estaciones una tarea frustrante. Por otra parte, combinar los tres creaba problemas adicionales dado que todas las etapas no siempre cambian al mismo ritmo, a menos que se ensanchen las bandas de cada una, deteriorando la selectividad y la sensibilidad. Lo que hacía falta era la amplificación de una estrecha banda de frecuencias que se mantuviera constante sin importar la estación seleccionada. Esto dio origen al receptor heterodino, tan usado en la actualidad.

Heterodinizar significa trasladar o desplazar en frecuencia. En el receptor heterodino, la señal modulada de entrada se traslada en frecuencia, ocupando así el mismo ancho de banda centrado en una nueva frecuencia. Ésta, conocida como frecuencia intermedia (IF, *intermediate frequency*), es fija y no depende de la frecuencia central de la señal recibida. La señal se amplifica en la IF antes de la demodulación. Si la frecuencia intermedia es menor que la de la portadora recibida pero mayor que la de la señal de salida final, el receptor se llama superheterodino. En la mayoría de los receptores de radio AM de este tipo, la frecuencia intermedia es de 455 kHz. En la radiodifusión AM, las asignaciones de frecuencia son de 540 kHz a 1600 kHz. La traslación a la frecuencia intermedia se consigue mezclando la señal de entrada con una señal generada localmente que difiere de la portadora de entrada por la frecuencia intermedia (en este caso, 455 kHz). La señal recibida, trasladada a una frecuencia inter-

† Las asignaciones de frecuencias en Estados Unidos se describen en el apéndice C.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

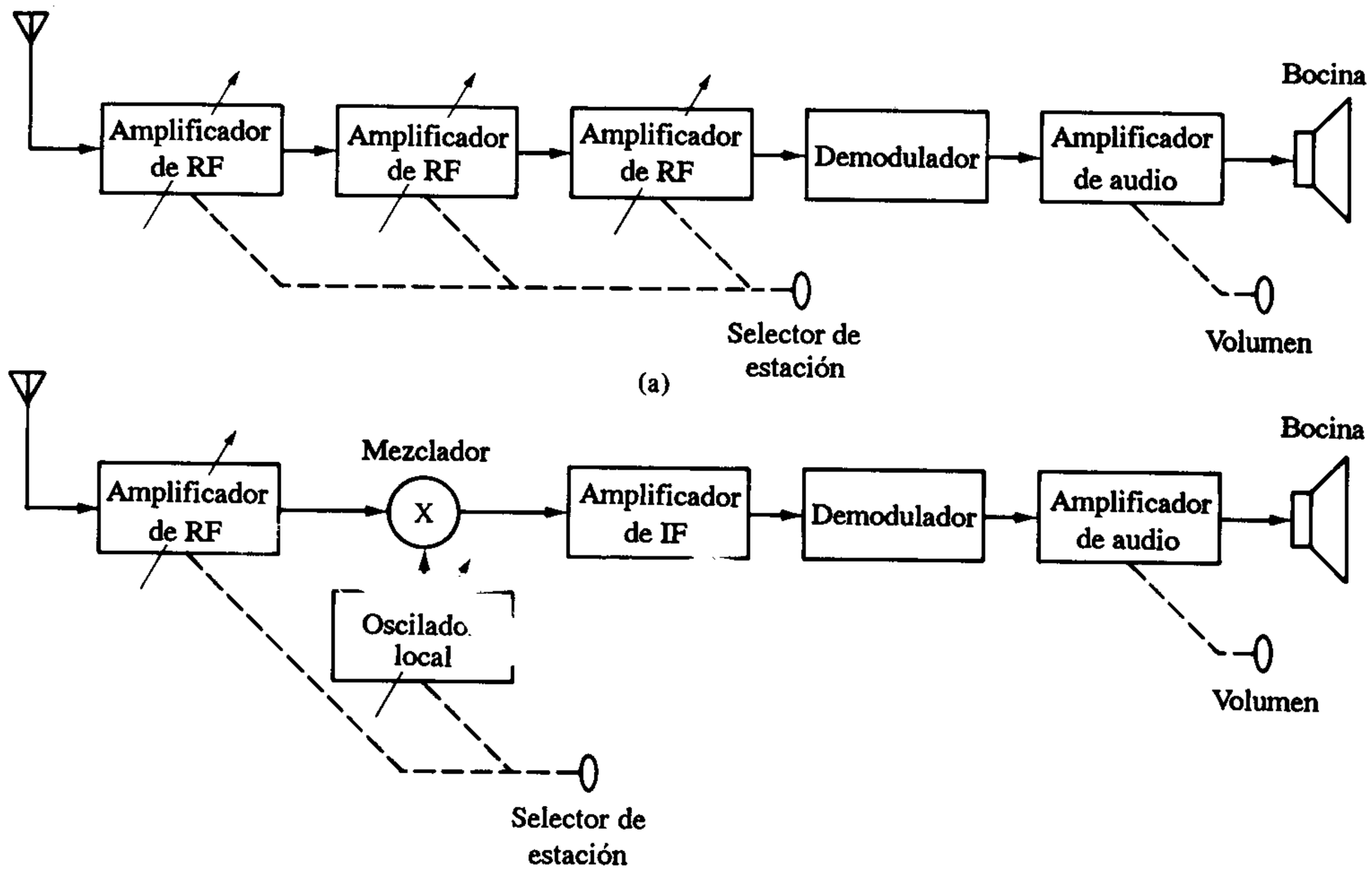


Figura 5.25 Receptores de radio: (a) TRF y (b) superheterodino.

media fija, se puede amplificar, filtrarse y demodularse con facilidad.† La principal ventaja del receptor superheterodino sobre el TRF es que la amplificación y la filtración se efectúan a una frecuencia fija y de manera independiente de la selección de estaciones. En la figura 5.25(b) se muestra un diagrama de bloques del receptor superheterodino.

Para trasladar el espectro de la señal de entrada a la frecuencia intermedia fija, la portadora local debe estar a una frecuencia ya sea por encima o por debajo de la frecuencia de la portadora de entrada por una cantidad igual a la frecuencia intermedia (455 kHz). En el receptor AM superheterodino, la frecuencia generada localmente se elige 455 kHz mayor que la de la señal de entrada. La razón de esto es simple: resulta más fácil construir osciladores de sintonía razonablemente lineal en el intervalo de 1–2 MHz que en el de 0.1–1.1 MHz.

El receptor superheterodino tiene también algunas desventajas. Supóngase, por ejemplo, que se desea recibir una estación de AM en 600 kHz. Esto significa que la portadora generada localmente, si está 455 kHz por encima de la portadora de la estación, se encontrará en 1055 kHz. Ahora, si hay otra estación en 1510 kHz, también se recibirá (nótese que 1510 kHz - 1055 kHz = 455 kHz). Esta segunda frecuencia, 1510 kHz, se llama *frecuencia imagen* de la primera, y después de la operación de heterodinizar es imposible distinguirlas entre sí.

---

† Para la recepción a mayores frecuencias, se puede repetir la traslación a una frecuencia intermedia. Los receptores que usan este método se llaman de conversión doble.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Es instructivo utilizar la propiedad de modulación (o la propiedad de frecuencia de convolución) de la transformada de Fourier para ver cómo surge el problema frecuencia-imagen. En la figura 5.26 se muestran las densidades espectrales para casos en los que la frecuencia central de la estación es superior o inferior a la frecuencia del oscilador local por la cantidad de frecuencia intermedia. Si *ambas* trasmisiones están presentes, ambas se recibirán bien. Una se denomina *imagen* de la otra. Obsérvese que la frecuencia imagen está desplazada dos veces de la frecuencia intermedia a partir de la frecuencia de estación deseada.

Existen dos formas de minimizar este problema. Como la frecuencia imagen está separada de la señal deseada por exactamente el doble de la frecuencia intermedia, una forma es elegir a la frecuencia intermedia tan alta como sea posible y práctico. Una segunda forma es atenuar la frecuencia imagen antes de heterodinizar. Ésta es la función principal de un amplificador selectivo de radiofrecuencia (RF) situado antes del mezclador. Por supuesto, debe ser sintonizable dentro del intervalo de frecuencias de las señales de entrada.

Otra desventaja del receptor superheterodino es que las etapas IF de alta ganancia se sintonizan fuera de la banda de frecuencias asignada, por lo que se debe tener cuidado de que la frecuencia intermedia elegida esté libre de transmisiones fuertes o, de lo

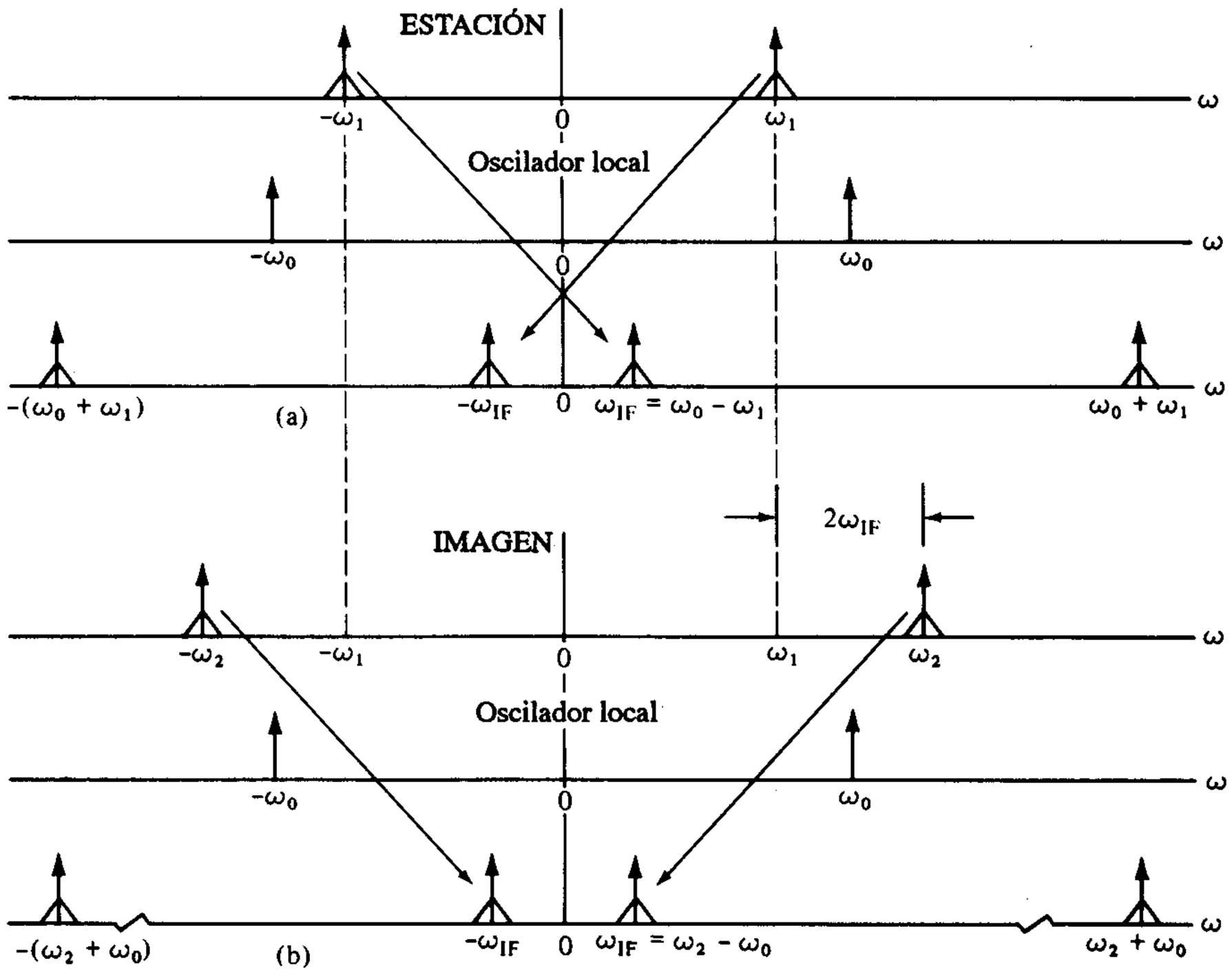


Figura 5.26 Frecuencia heterodina con un oscilador local sobre la estación portadora mostrando (a) la traslación de la señal de la estación receptora a la frecuencia intermedia y (b) la traslación de la frecuencia imagen a la frecuencia intermedia.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

contrario, el receptor amplificará estas señales espurias que se introduzcan en las etapas IF de alta ganancia. Con todo esto, la elección de 455 kHz es apropiada para receptores normales de radio AM. Aunque los detalles de la modulación difieren, los receptores comerciales de FM y televisión usan el mismo principio superheterodino con frecuencias intermedias usuales, de 10.7 MHz y alrededor de 44 MHz, respectivamente.

Como el receptor heterodino genera una portadora interna, es también un transmisor de energía en miniatura a la frecuencia del oscilador local. Esto puede demostrarse situando dos receptores AM superheterodinos próximos entre sí y sintonizando uno a 455 kHz por debajo del otro. Cerca de este valor, en la bocina puede oírse un tono de diferencia de frecuencias (pulsación) entre los dos osciladores locales. Esta radiación del receptor heterodino ha sido aprovechada para la detección y las contramedidas electrónicas. Por otra parte, puede causar efectos indeseables de interferencia. Estos efectos pueden minimizarse cubriendo adecuadamente el receptor perjudicial.

EJEMPLO 5.3.1

Un receptor de radar opera a una frecuencia de 2.80 GHz y usando el principio superheterodino tiene una frecuencia del oscilador local de 2.86 GHz. Un segundo receptor de radar opera a la frecuencia imagen del primero, por lo que se produce interferencia.

a) Determine la frecuencia intermedia del primer receptor.
b) ¿Cuál es la frecuencia portadora del segundo receptor?
c) Si hubiera que diseñar el receptor de radar, ¿cuál sería la mínima frecuencia intermedia que usted elegiría para evitar problemas de frecuencia imagen en la banda de radar de 2.80–3.00 GHz?

Solución a) $f_{FI} = f_{LO} - f_c = 2.86\ \text{GHz} - 2.80\ \text{GHz} = 60\ \text{MHz}$

b) $f_{IMAGEN} = f_c + 2f_{FI} = 2.80\ \text{GHz} + 0.12\ \text{GHz} = 2.92\ \text{GHz}$

c) $2f_{FI} \geq f_{MÁX} - f_{MÍN} = 3.00\ \text{GHz} - 2.80\ \text{GHz} = 0.20\ \text{GHz}; f_{FI} \geq 100\ \text{MHz}$

EJERCICIO 5.3.1

Un receptor de telemetría está diseñado para recibir transmisiones de satélite a 136 MHz. El receptor emplea dos operaciones heterodinas con frecuencias intermedias de 30 MHz y 10 MHz (este tipo de receptor, conocido de manera usual como de conversión doble, se muestra en el diagrama de bloques de la figura 5.27). El primer oscilador local se diseña para operar por debajo de la frecuencia portadora de entrada; el segundo, por encima de la primera frecuencia intermedia (30 MHz). Determine todas las posibles frecuencias imagen, sin suponer que los filtros son ideales. (En otras palabras, ¿cuáles son las posibles frecuencias de entrada que podrían dar lugar a imágenes tanto para el primero como para el segundo mezclador de frecuencias si los filtros no son ideales?)

http://libreria-universitaria.blogspot.com

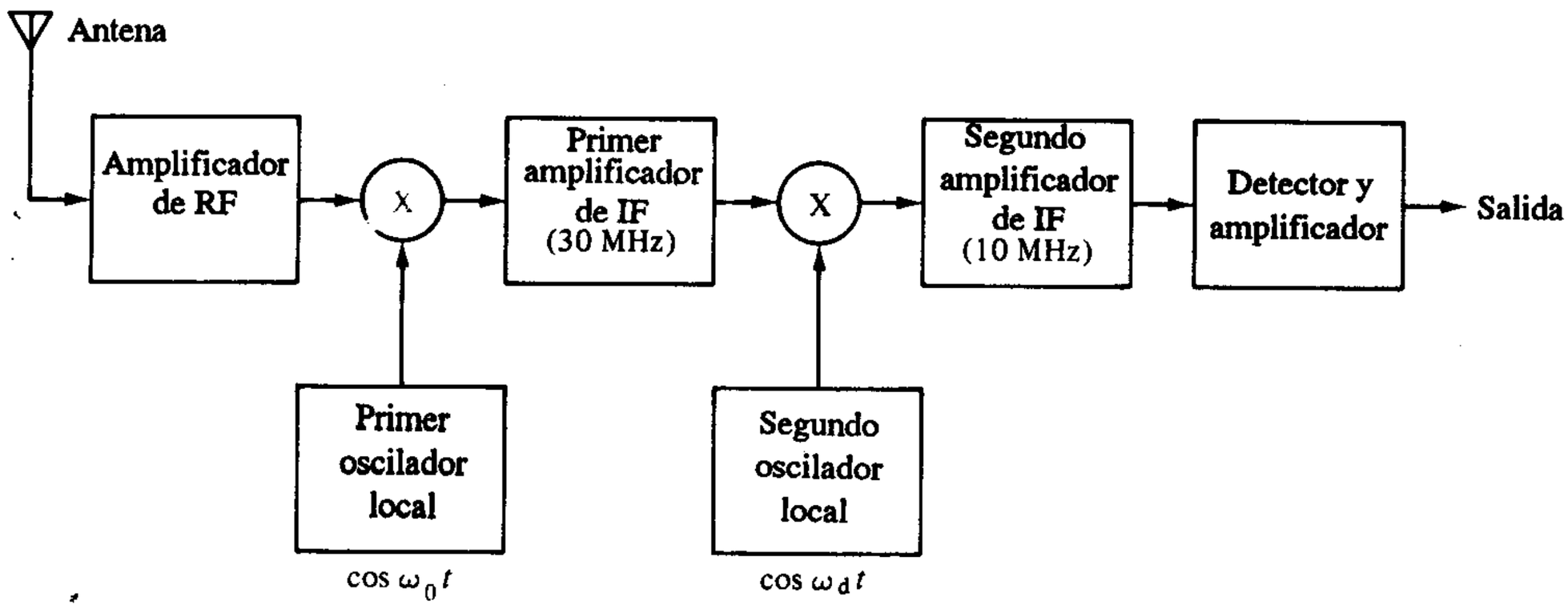


Figura 5.27 Diagrama de bloques de un receptor de doble conversión (véase Ejer. 5.3.1).

RESPUESTA: 56 MHz, 76 MHz, 156 MHz.

5.4 MODULACIÓN DE BANDA LATERAL ÚNICA (SSB)

En las secciones anteriores se vio que la modulación DSB duplica el ancho de banda de una señal dada. Sin embargo, esta duplicación es una desventaja cuando determinada banda de frecuencias se satura; hace falta investigar si es realmente necesaria.

Será útil recordar las densidades espectrales de las señales DSB (suponiendo, por conveniencia, portadora suprimida). La densidad espectral de cualquier señal de valor real presenta la condición de simetría (véase Fig. 5.28a)

$$F(-\omega) = F^*(\omega)\,. \tag{5.30}$$

Después de multiplicarse por una senoidal a ω_c rad/s, la mitad de esta densidad espectral se traslada en frecuencia y se centra en ω_c y la otra mitad se traslada a $(-\omega_c)$, como se muestra en la figura 5.28(b).

En la figura 5.28(a) y (b) puede verse que lo que originalmente era el contenido positivo de frecuencias de $F(\omega)$ se convierte en la banda lateral superior para $\omega > 0$ y la inferior para $\omega < 0$. Recíprocamente, lo que era el contenido negativo de frecuencias se convierte en la banda lateral inferior para $\omega > 0$ y en la superior para $\omega < 0$. En todo este proceso se satisface la ecuación (5.30). Cada par de bandas laterales (es decir, superior o inferior) contiene la información completa sobre la señal original.

Ahora aparece una idea interesante: ¿por qué no transmitir sólo el par de bandas laterales superior o inferior, dado que cada par contiene toda la información acerca de la señal? Se advierte que la ecuación (5.30) será aún satisfecha y que la señal original

http://libreria-universitaria.blogspot.com

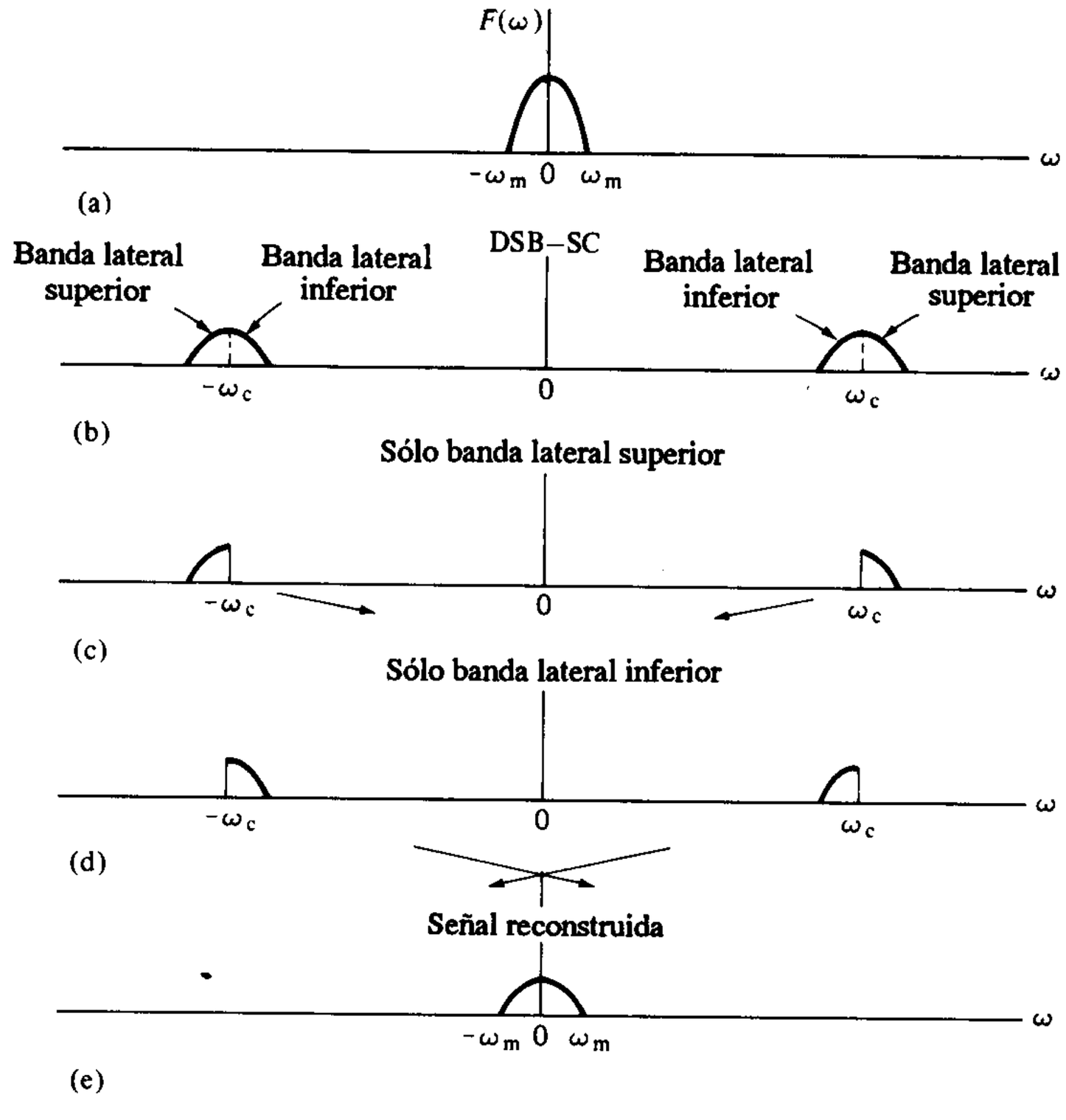


Figura 5.28 Espectros de señales DSB y SSB.

podrá recuperarse de nuevo a partir del par superior o inferior de bandas laterales por medio de una traslación de frecuencias adecuada, como se sugiere en la figura 5.28(e). Este tipo de modulación se llama de *banda lateral única* (SSB, *single-sideband*). Esta modulación es eficiente porque no requiere más ancho de banda que el de la señal original y sólo la mitad del de la señal DSB correspondiente. Los métodos de modulación y demodulación SSB se examinarán con más detalle.

5.4.1 Generación de señales SSB

En forma conceptual, la forma más expedita de generar señales SSB es producir antes una DSB y luego suprimir mediante filtración una de las bandas laterales. Este procedimiento se muestra en la figura 5.29.

En la práctica, estas operaciones no son tan fáciles como parecen, y la primera dificultad es llenar los requisitos del filtro. El filtro de banda lateral debe tener características de corte muy abruptas en ω_c para rechazar todas las componentes de frecuencia en un lado de ω_c y aceptar todas en el otro lado de ω_c. Como es imposible obtener una característica de filtro ideal, deben hacerse algunas concesiones. Primero, si la señal moduladora $f(t)$ no contiene componentes de baja frecuen-

http://libreria-universitaria.blogspot.com

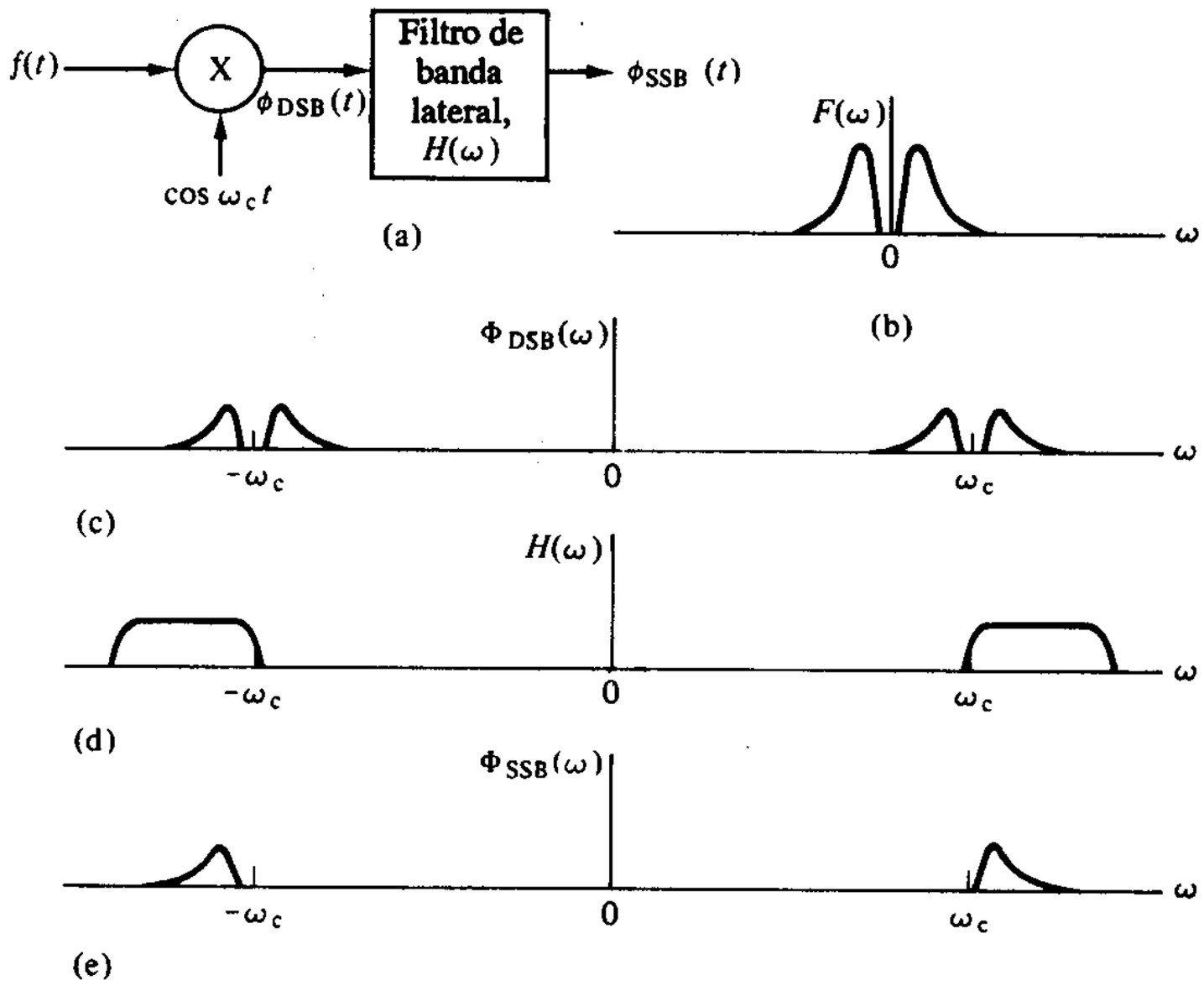


Figura 5.29 Modulador SSB filtrando la banda lateral superior.

cia importantes, no habrá componentes significativas en la cercanía de ω_c después de la modulación. Por tanto, una respuesta que no disminuya hasta frecuencia cero permitirá usar un filtro con pendiente menos pronunciada. Segundo, suele ser más sencillo construir un filtro de banda lateral a una frecuencia adecuada a los componentes de éste que a la frecuencia transmitida. Puede usarse la heterodinización para trasladar el espectro cuanto se desee, después de la filtración. Aun con estas previsiones, el diseño de filtros de banda lateral no es fácil. En la práctica, para el intervalo de 0.05–0.5 MHz se usan filtros resonadores electromecánicos y en el intervalo de 1–10 MHz, filtros de cristal.

También es posible generar SSB por medio de una adecuada puesta en fase de las señales. Como este método proporciona ciertos elementos sobre la naturaleza de las señales SSB, se examinará con algún detenimiento, primero con señales senoidales y después en forma más general.

Considérese una señal exponencial compleja de frecuencia simple. Esta señal tiene una densidad espectral unilateral que sólo tomando la parte real se convierte en bilateral. En forma específica, sea la señal moduladora $f(t) = e^{j\omega_m t}$ y la portadora $e^{j\omega_c t}$. Las densidades espectrales de estas señales se muestran en la figura 5.30. Multiplicando, se obtiene $f(t)e^{j\omega_c t} = e^{j\omega_m t}e^{j\omega_c t}$, desplazando en frecuencia la densidad espectral de acuerdo con la propiedad de traslación de frecuencia de la transformada de Fourier. Tomando ahora la parte real (véase Ap. A), se obtiene

$$\mathcal{R}e\{e^{j\omega_m t}e^{j\omega_c t}\} = \mathcal{R}e\{e^{j\omega_m t}\}\mathcal{R}e\{e^{j\omega_c t}\} - \mathcal{I}m\{e^{j\omega_m t}\}\mathcal{I}m\{e^{j\omega_c t}\}$$

$$= \cos \omega_m t \cos \omega_c t - \text{sèn } \omega_m t \,\text{sen}\, \omega_c t.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

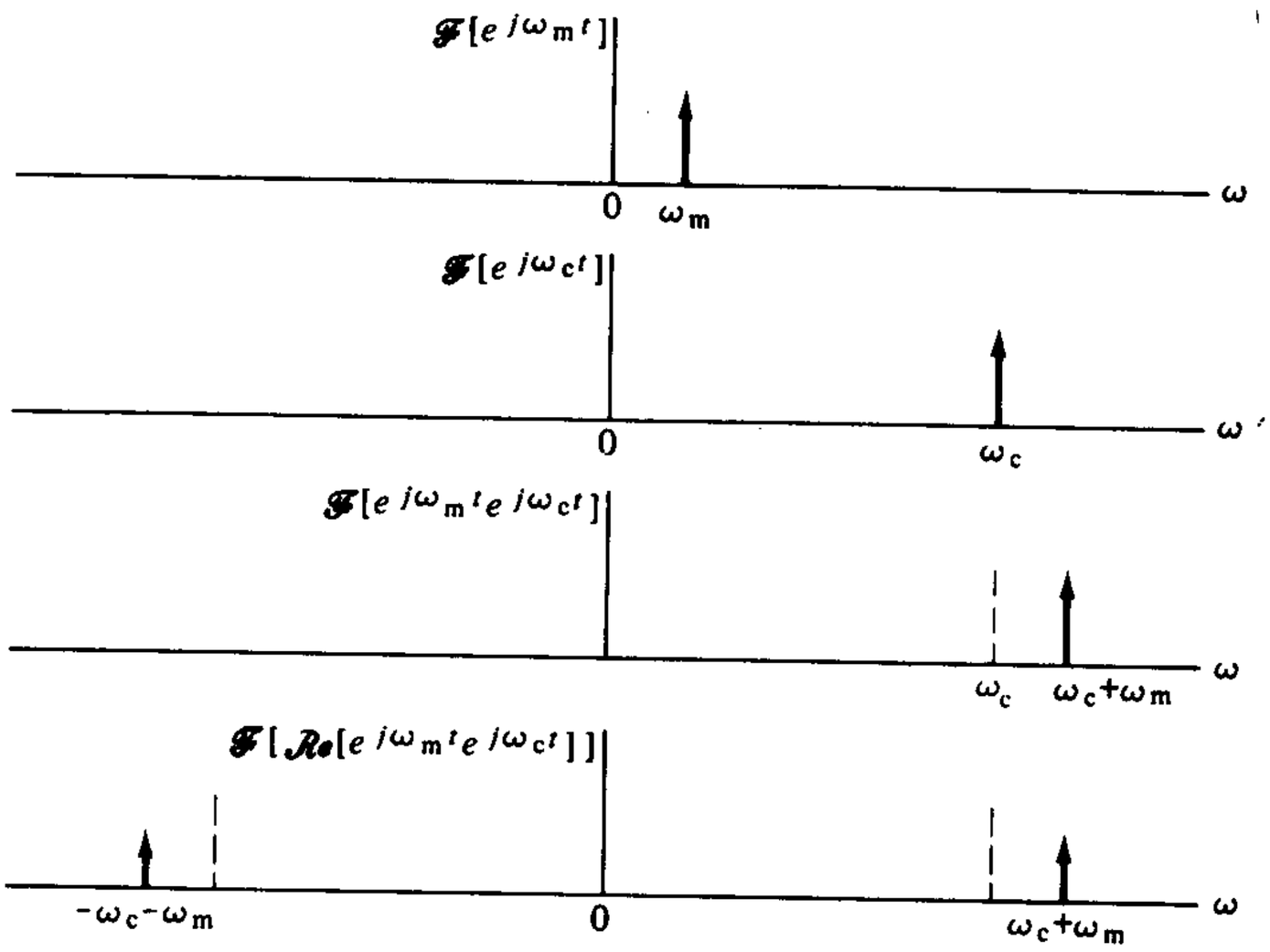


Figura 5.30 Generación analítica de SSB; banda lateral superior.

El procedimiento de tomar la parte real restaura la característica bilateral para la densidad espectral, por lo que este resultado puede obtenerse usando señales de valor real. Como esto representa la banda lateral superior, puede escribirse

$$\phi_{SSB_+}(t) = \cos \omega_m t \cos \omega_c t - \operatorname{sen} \omega_m t \operatorname{sen} \omega_c t . \tag{5.31}$$

Se deja al lector verificar que la banda lateral inferior puede obtenerse de manera similar haciendo $f(t) = e^{-j\omega_m t}$, lo que da

$$\phi_{SSB_-}(t) = \cos \omega_m t \cos \omega_c t + \operatorname{sen} \omega_m t \operatorname{sen} \omega_c t . \tag{5.32}$$

Aunque estos resultados provienen del caso senoidal, son válidos para un caso más general, por lo que puede escribirse

$$\phi_{SSB_\mp}(t) = f(t) \cos \omega_c t \pm \hat{f}(t) \operatorname{sen} \omega_c t , \tag{5.33}$$

donde $\hat{f}(t)$ es la señal obtenida al desplazar la fase de $f(t)$ 90° en cada frecuencia. En la sección siguiente se analizará esto con más detalle.

Las señales descritas por las ecuaciones (5.31) y (5.32) pueden producirse con moduladores balanceados, siempre que tanto la señal moduladora como la portadora experimenten un desfasamiento de 90° para formar los segundos términos de dichas ecuaciones. Este método de desfasamiento para generar señales SSB aparece en el diagrama de la figura 5.31, y se emplea en la generación de baja frecuencia y digital de señales SSB. El principal problema en el diseño de este sistema es la realización práctica de la red de desfasamiento en 90° de $f(t)$, porque todas las componentes de frecuencia deben desfasarse exactamente 90°. Por tanto, dichos sistemas tienen anchos de banda muy restringidos.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

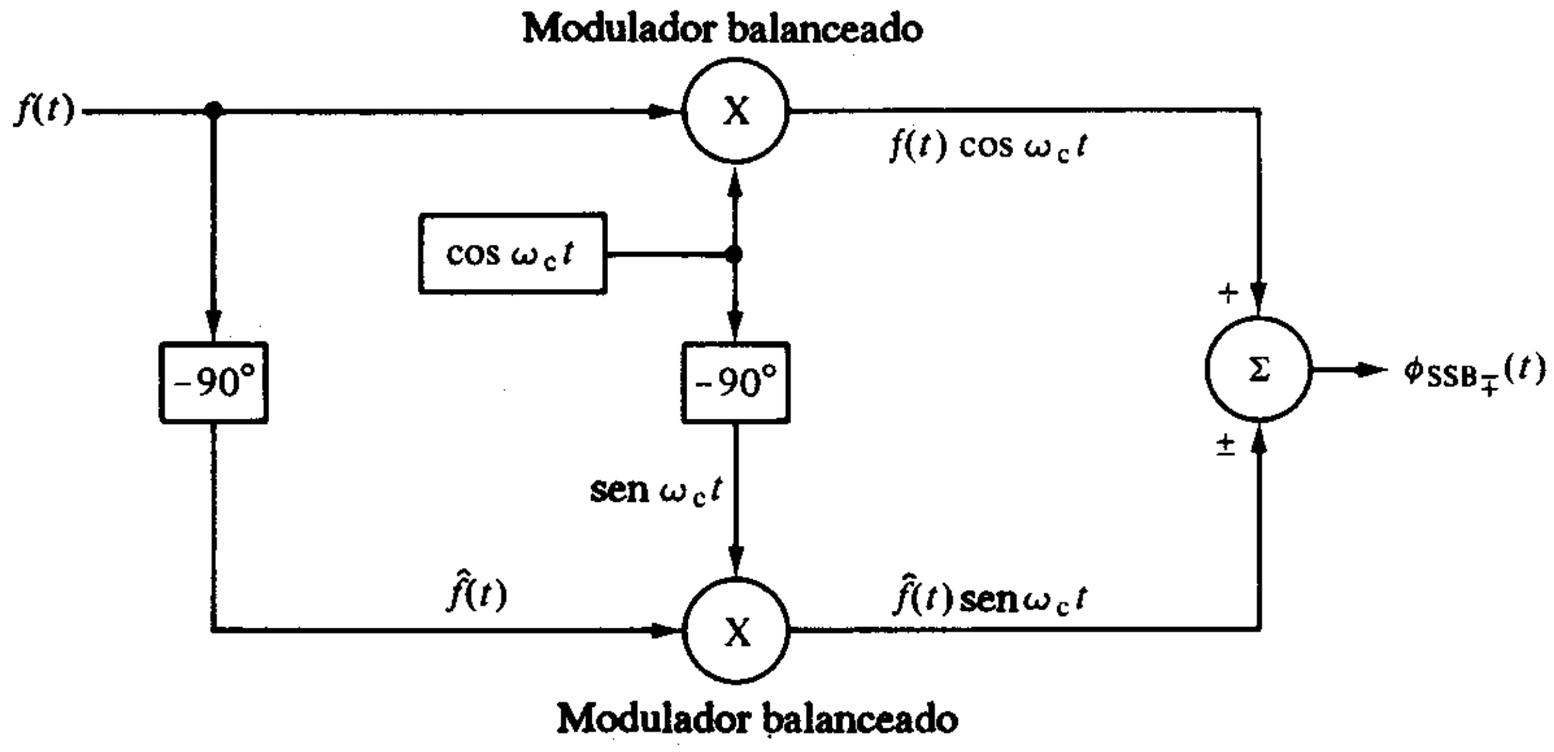


Figura 5.31 Método de desfasamiento para generar SSB.

Se genera una señal DSB-LC usando una portadora a 1 kHz y la entrada $f(t) = \cos 200\pi t$. El índice de modulación es de 80%. La banda lateral inferior se bloquea (suponga filtración ideal). Halle una expresión para la señal SSB-LC resultante si se desarrolla 0.58 watts a través de una carga resistiva de un ohm.

RESPUESTA: $\cos(2000\pi t) + 0.4 \cos(2200\pi t)$.

5.4.2 ★ Señales analíticas y transformada de Hilbert

El anterior estudio de las señales SSB mostró que las señales pasabanda de valor real podían representarse en términos de señales de valor complejo con densidades espectrales unilaterales. Tales señales se llaman *analíticas* y son útiles para describir el comportamiento general de las señales. En otras palabras, una señal analítica es una señal de valor complejo cuya densidad espectral es unilateral y cuya parte real es la señal de valor real original. No todas las señales de valor complejo son analíticas, pero todas las señales analíticas deben ser de valor complejo.

Sea una señal de valor real dada $f(t)$ y su representación en señal analítica $z(t)$. Si $f(t)$ es la parte real de $z(t)$, puede escribirse

$$z(t) = f(t) + j\hat{f}(t)\,, \tag{5.34}$$

donde $\hat{f}(t)$ debe determinarse. La transformada de Fourier de la ecuación (5.34) es

$$Z(\omega) = F(\omega) + j\hat{F}(\omega)\,. \tag{5.35}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Para ser una señal analítica, $Z(\omega)$ debe ser unilateral. Sea $Z(\omega) = 0$ para $w < 0$; una breve reflexión muestra que [puesto que la parte real de las ecuaciones (5.34) y (5.35) no puede cambiarse]

$$\hat{F}(\omega) = jF(\omega), \qquad \omega < 0. \tag{5.36}$$

Para mantener una característica de fase que sea función impar de la frecuencia, se requiere que

$$\hat{F}(\omega) = -jF(\omega), \qquad \omega > 0. \tag{5.37}$$

Combinando las ecuaciones (5.36) y (5.37), se tiene

$$\hat{F}(\omega) = \left\{ \begin{matrix} -jF(\omega) & \omega > 0 \\ jF(\omega) & \omega < 0 \end{matrix} \right\} = -jF(\omega)\ \text{sgn}\ (\omega). \tag{5.38}$$

Con la ecuación (5.38) en la (5.35), puede verificarse que la densidad espectral de $z(t)$ es unilateral:

$$Z(\omega) = \begin{cases} 2F(\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}. \tag{5.39}$$

Se deja al lector verificar que $\Im\{z^*(t)\}$ es similar a la ecuación (5.39), excepto que las desigualdades se invierten.

La función $f(t)$ puede hallarse tomando la transformada de Fourier inversa

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{5.40}$$

La función $\hat{f}(t)$ se llama función cuadratura de $f(t)$ porque cada componente de frecuencia de $\hat{f}(t)$ se encuentra en cuadratura de fase (es decir, 90°) con las de $f(t)$. Ahora se ve que ésta es una relación general y no se limita a las senoidales de la sección anterior.

Las condiciones descritas por la ecuación (5.38) definen lo que se conoce como *transformada de Hilbert*; esto es, la función $\hat{f}(t)$ es la transformada de Hilbert de $f(t)$ si se cumple la ecuación (5.38). En estos casos específicos, pueden usarse las ecuaciones (5.38) y (5.40) para hallar $\hat{f}(t)$ a partir de $f(t)$. Por ejemplo, sea $f(t)$ la señal pulso rectangular: $f(t) = \text{rect}\ (t/\tau)$. Usando (véase núm. 13 en la Tabla 3.1) $F(\omega) = \tau \text{Sa}(\omega\tau/2)$, las ecuaciones (5.38) y (5.40) dan

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{t + \tau/2}{t - \tau/2} \right|,$$

lo que se muestra en la figura 5.32. Nótese que la transformada de Hilbert se hace infinita en puntos de discontinuidad finita de $f(t)$. Por esto, se requiere un pico de potencia instantánea muy grande para transmitir pulsos por medio de SSB.

EJERCICIO 5.4.2

Demuestre que (a) $\hat{\hat{f}}(t) = -f(t)$; (b) $\overline{f^2(t)} = \overline{\hat{f}^2(t)}$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

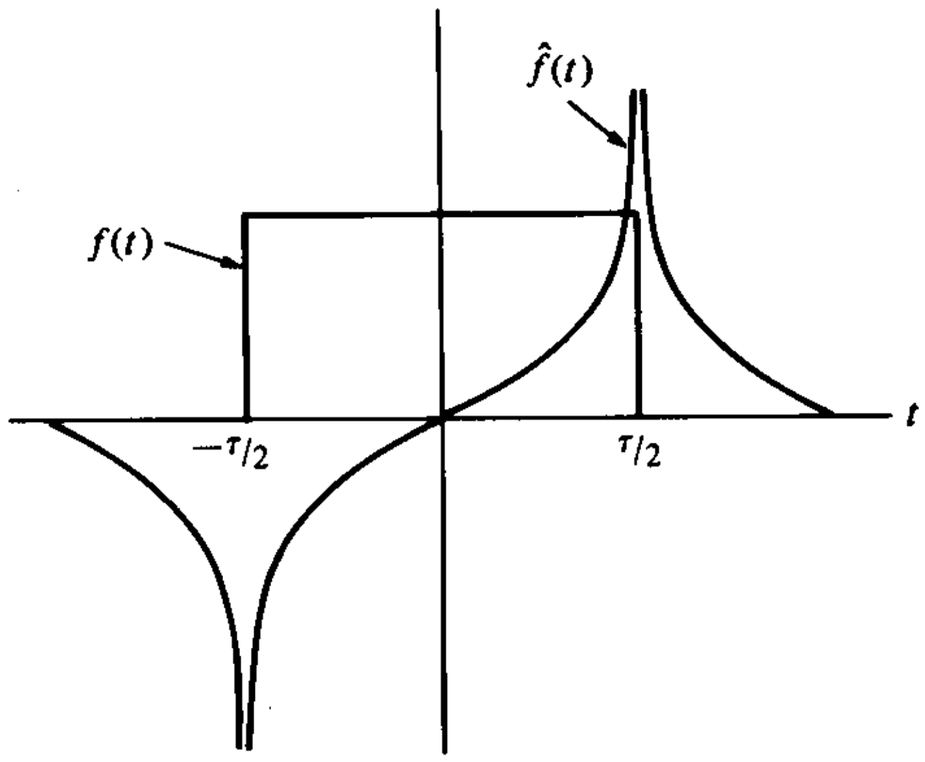


Figura 5.32 Transformada de Hilbert de un pulso rectangular.

También se pueden escribir relaciones en el dominio del tiempo usando (véase el par transformado núm. 6, Tabla 3.1)

$$\text{sgn}\ (\omega) \leftrightarrow \frac{j}{\pi t}.$$

La aplicación de la propiedad de convolución en el tiempo a la ecuación (5.38) da

$$\hat{f}(t) = f(t) \circledast \frac{1}{\pi t}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau\,. \tag{5.41}$$

Esta ecuación es una definición alterna de la transformada de Hilbert, aunque no tan útil como la interpretación de desfasamiento, debido a la forma impropia de la integral.

Volvamos a la señal SSB. Dada una señal $f(t)$, se forma una señal analítica $z(t)$ añadiendo $\hat{f}(t)$ en cuadratura, esto es, $z(t) = f(t) + j\hat{f}(t)$. La densidad espectral de $Z(\omega)$ es unilateral, como se ve en la figura 5.33. Multiplicando $z(t)$ por $e^{j\omega_c t}$ se traslada $Z(\omega)$ a $Z(\omega - \omega_c)$. Por último, la parte real de $Z(\omega - \omega_c)$ se sitúa a la mitad de la densidad espectral, con la fase invertida y simétricamente alrededor de $\omega = 0$, como se muestra en la figura 5.33. El equivalente en el dominio del tiempo es

$$\mathcal{R}e\{z(t)e^{j\omega_c t}\} = \mathcal{R}e\{[f(t) + j\hat{f}(t)]e^{j\omega_c t}\}$$

$$= f(t)\cos\omega_c t - \hat{f}(t)\,\text{sen}\,\omega_c t\,,$$

verificando la ecuación (5.33). Estas relaciones son para el caso de la banda lateral superior; se deja al lector verificar que el uso de $z^*(t)$ proporciona la banda lateral inferior.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

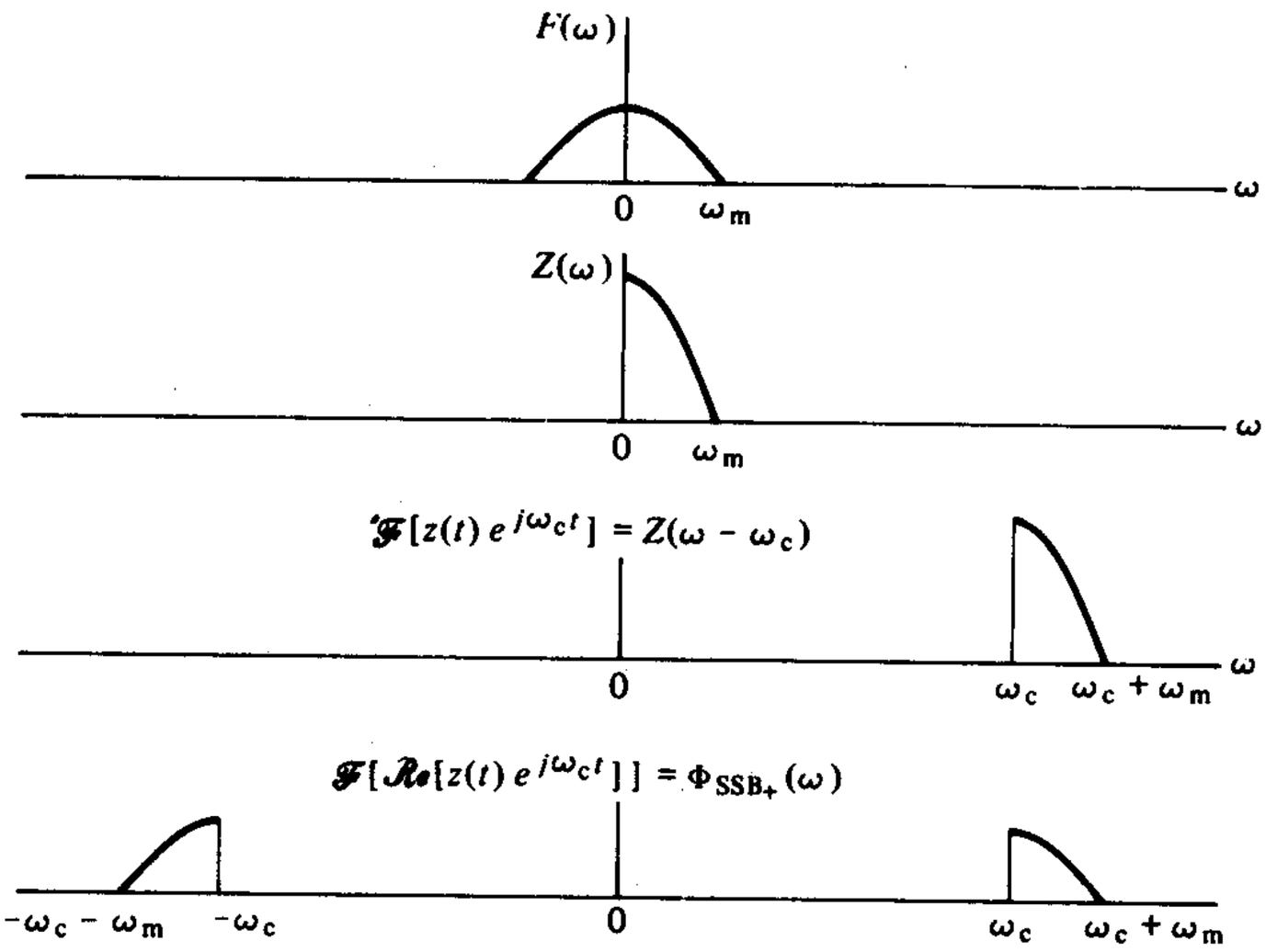


Figura 5.33 Generación de SSB usando señales analíticas.

5.4.3 Demodulación de señales SSB

Para la demodulación, la densidad espectral de la señal SSB debe trasladarse de nuevo a $\omega = 0$. Como ya se apuntó, esto puede conseguirse usando detección síncrona. La multiplicación de la señal SSB por cos $\omega_c t$ traslada la mitad de cada densidad espectral hacia arriba en ω_c rad/s y la otra mitad hacia abajo en la misma cantidad, como se muestra en la figura 5.34. La porción desplazada hasta una frecuencia de $2\omega_c$ puede bloquearse con un filtro pasabajas. Se concluye que el detector síncrono demodulará adecuadamente las señales SSB-SC.†

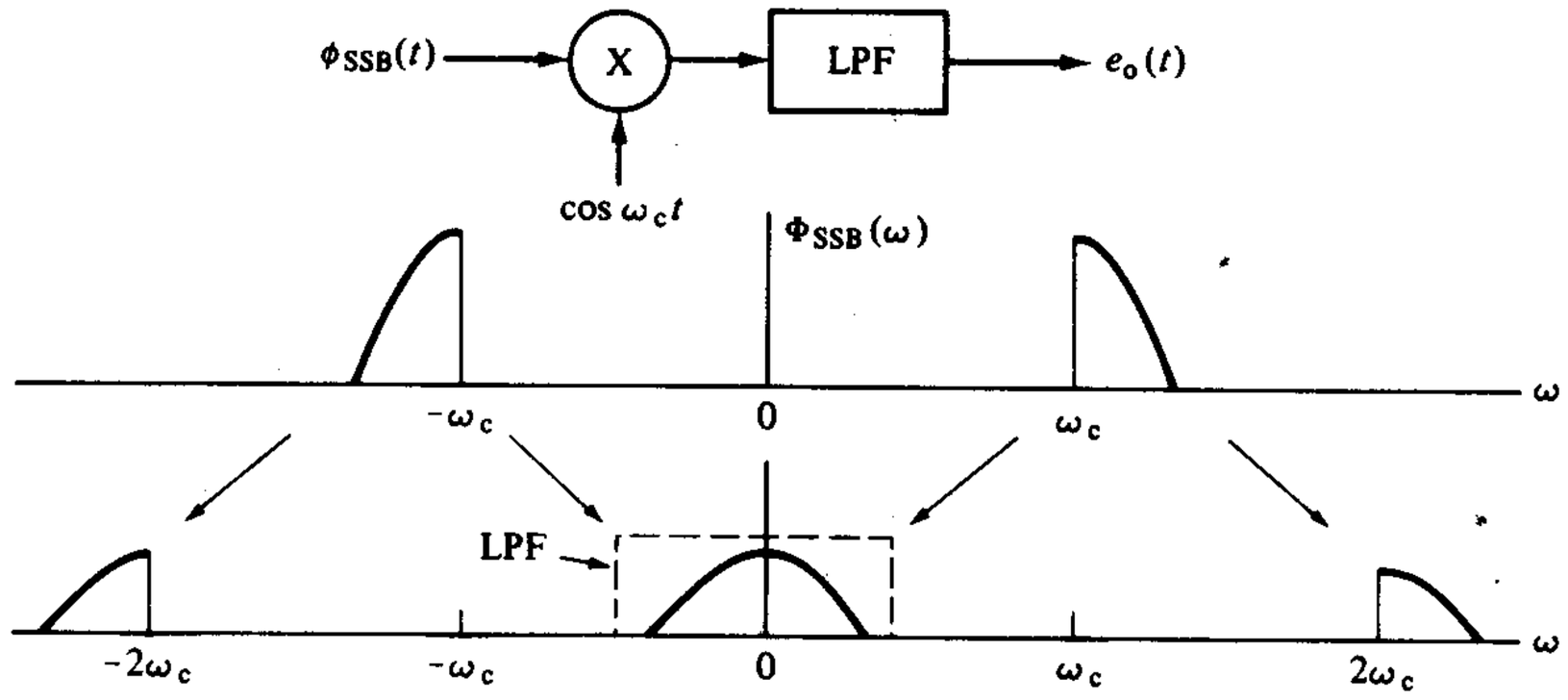


Figura 5.34 Demodulación síncrona de una señal SSB.

†Aunque se ilustra el caso de la banda lateral superior, para la inferior se obtiene un resultado similar.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Por supuesto, en el caso anterior se consideraron condiciones ideales. Ahora se reconsiderará cuando existen errores de frecuencia y de fase en el proceso de demodulación. La señal SSB-SC de entrada se puede expresar como [véase Ec. (5.33)]

$$\phi_{\mathrm{SSB}_{\mp}}(t) = f(t)\cos\omega_c t \pm \hat{f}(t)\,\mathrm{sen}\,\omega_c t\,.$$

Sea la señal portadora generada en forma local $\phi_d(t) = \cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \theta]$, donde $(\Delta\omega)$ es el error de frecuencia y θ el de fase. Multiplicando, se tiene

$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{SSB}_{\mp}}(t)\phi_d(t) &= [f(t)\cos\omega_c t \pm \hat{f}(t)\,\mathrm{sen}\,\omega_c t]\cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \theta] \\ &= \tfrac{1}{2}f(t)\{\cos[(\Delta\omega)t + \theta] + \cos[(2\omega_c + \Delta\omega)t + \theta]\} \\ &\quad \mp \tfrac{1}{2}\hat{f}(t)\{\mathrm{sen}[(\Delta\omega)t + \theta] - \mathrm{sen}[(2\omega_c + \Delta\omega)t + \theta]\}\,. \qquad (5.42)\end{aligned}$$

Los términos de frecuencia de doble portadora pueden eliminarse con un filtro pasabajas. Designando la salida del filtro como $e_o(t)$, se tiene†

$$e_o(t) = \tfrac{1}{2}f(t)\cos[(\Delta\omega)t + \theta] \mp \tfrac{1}{2}\hat{f}(t)\,\mathrm{sen}\,[(\Delta\omega)t + \theta]\,. \qquad (5.43)$$

Como prueba, si la frecuencia de error $(\Delta\omega)$ y el error de fase θ son cero, la salida es

$$e_o(t) = \tfrac{1}{2}f(t)\,.$$

Por tanto, un detector síncrono compuesto por un oscilador local, un multiplicador y un filtro pasabajas demodulará de manera correcta las señales SSB-SC si está sincronizado en forma adecuada.

Para investigar los efectos de un error de fase, se hace $(\Delta\omega) = 0$ y la ecuación (5.43) queda así:

$$e_o(t) = \tfrac{1}{2}[f(t)\cos\theta \mp \hat{f}(t)\,\mathrm{sen}\,\theta]\,. \qquad (5.44)$$

El primer término es el mismo que apareció, para un error de fase, en el caso de DSB-SC. Sin embargo, ahora se presenta un segundo término que no puede bloquearse. Para investigar, la ecuación (5.44) se reescribe como (véase Ap. A)

$$e_o(t) = \tfrac{1}{2}\,\mathscr{R}e\{[f(t) \pm j\hat{f}(t)]e^{j\theta}\}\,. \qquad (5.45)$$

Puesto que ahora tanto $f(t)$ como $\hat{f}(t)$ están presentes en la salida, concluimos que un error de fase en la portadora generada localmente provoca una distorsión de fase en la salida del receptor.

Como el oído humano es relativamente insensible a los cambios de fase en las señales, esta distorsión en la demodulación SSB-SC es bastante tolerable para comunicación oral. De hecho, aun los errores de frecuencia de variación lenta son tolerables para la voz, manteniendo la inteligibilidad pero cambiando la calidad de la reproducción del parlamento. No obstante, para otras señales (particularmente los pulsos) este tipo de distorsión limita el uso de los sistemas SSB-SC.

Procediendo de igual forma para ver los efectos de los errores de frecuencia, se hace $\theta = 0$ y la ecuación (5.43) queda así:

$$e_o(t) = \tfrac{1}{2}[f(t)\cos(\Delta\omega)t \mp \hat{f}(t)\,\mathrm{sen}\,(\Delta\omega)t]\,, \qquad (5.46)$$

---

† Nótese que el conjunto de signos superior se refiere a la banda lateral inferior, y el conjunto inferior, a la banda lateral superior.]

http://libreria-universitaria.blogspot.com

o

$$e_o(t) = \tfrac{1}{2}\,\mathcal{R}e\{[f(t) \pm j\hat{f}(t)]e^{j\Delta\omega t}\}\,. \tag{5.47}$$

Así, los errores de frecuencia producen desplazamientos espectrales y distorsión de fase en la salida demodulada. Mientras estos desplazamientos sean pequeños, pueden tolerarse en la comunicación oral.

Para errores de frecuencia ($\Delta\omega$) próximos al ancho de banda de la señal moduladora $f(t)$ puede ocurrir un efecto interesante, como se muestra en la figura 5.35. Aquí el error de frecuencia es igual al ancho de banda de $f(t)$, elegido en forma tal que los extremos de los espectros se encuentran exactamente invertidos. Este sistema es un inverso de espectro, intercambiando componentes de alta frecuencia por los de baja frecuencia y viceversa. Toda la energía de la señal está presente, aunque debe reordenarse. Esta inversión espectral provoca un lenguaje poco inteligible, y el principio se usa para garantizar privacía en la comunicación privada. El lector podrá verificar que la repetición de estas operaciones reordenará por completo la señal.

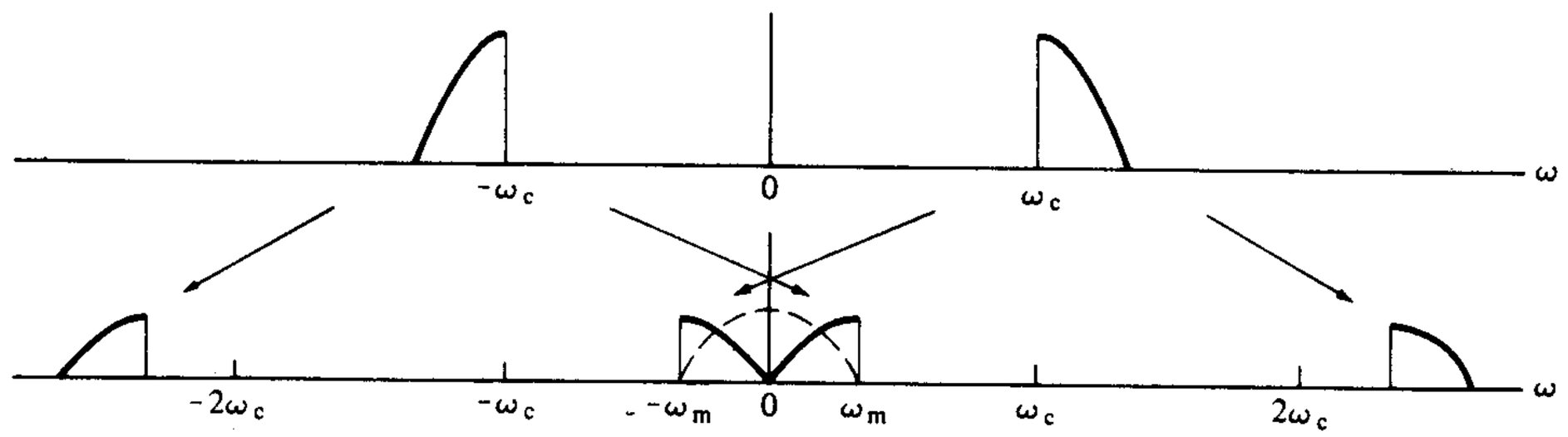


Figura 5.35 Algunos efectos de errores de frecuencia en la demodulación de señales SSB

Igual que con las señales DSB, aquí es posible agregar grandes cantidades de portadora a las señales SSB, que se designarán como SSB-LC. Una expresión de dicha señal es

$$\phi(t) = A\,\cos\,\omega_c t + f(t)\,\cos\,\omega_c t \mp \hat{f}(t)\,\text{sen}\,\omega_c t\,. \tag{5.48}$$

Además de un nivel de cd introducido por el término portador, la señal $f(t)$ original siempre se puede recuperar de $\phi(t)$ por detección síncrona. No obstante, si la portadora es grande, también se puede usar la detección de envolvente. La envolvente de la ecuación (5.48) puede escribirse como

$$r(t) = \sqrt{[A + f(t)]^2 + [\hat{f}(t)]^2}\,. \tag{5.49}$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$r(t) = A\sqrt{1 + \frac{2f(t)}{A} + \frac{f^2(t)}{A^2} + \frac{\hat{f}^2(t)}{A^2}}\,. \tag{5.50}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Si la portadora es mucho mayor que la envolvente SSB-SC, los dos últimos términos de la ecuación (5.50) pueden cancelarse para obtener

$$r(t) \simeq A\sqrt{1 + \frac{2f(t)}{A}}. \tag{5.51}$$

Usando la expansión binomial† y descartando los términos de orden superior, la ecuación (5.51) se convierte en

$$r(t) \approx A\left[1 + \frac{f(t)}{A}\right] = A + f(t). \tag{5.52}$$

Descartando el término de cd introducido por la portadora, la señal SSB-LC se puede demodular en forma correcta con un detector de envolvente.

Se concluye que las señales SSB-LC se pueden demodular usando un detector de envolvente. Las señales se pueden recibir en un receptor de AM común y se requiere la mitad del ancho de banda de la transmisión presente en transmisiones de AM. Sin embargo, la cantidad proporcionada de portadora necesaria es mucho mayor que la utilizada para DSB-LC.

Ahora se plantea una pregunta interesante. ¿Existe un método de modulación que contribuya a la economía espectral de la SSB y proporcione además una señal que pueda detectarse por detección de envolvente sin un término portador grande? La sorprendente respuesta —dentro de ciertos límites— es sí, siempre que se utilice una combinación de modulación de amplitud y modulación de fase. Aunque la teoría no es sencilla, un método de modulación que alcanza aproximadamente los objetivos anteriores tiene la forma‡

$$\phi(t) = a(t)\cos\left[\omega_c t + k_p \widehat{\log\, a(t)}\right] \tag{5.53}$$

donde

$$a(t) = \sqrt{f(t)},$$

k_p = constante de modulación de fase (véase Sec. 6.1).

La densidad espectral de la señal descrita por la ecuación (5.53) no está limitada de manera estricta a una banda lateral, y hay cierta difusión espectral. No obstante, puede demodularse por medio de un detector de envolvente, de preferencia que dependa de una ley cuadrática y sin ningún término portador grande. Nótese que la generación de dicha señal requiere el procesamiento no lineal de la señal de entrada $f(t)$. Las señales que permiten el uso de la detección de envolvente sin utilizar un ancho de banda que exceda al de la señal moduladora se llaman a veces señales *compatibles de banda lateral única* (CSSB, *compatible single-sideband*).

---

† Véase el apéndice A.

‡ Véase, por ejemplo, K. J. Powers, "The Compatibility Problem in Single-Sideband Transmission", *Proceedings of the IRE*, vol. 48, agosto de 1960, pág. 1431; o B. F. Logan y M. R. Schroeder, "A Solution to the Problem of Compatible Single-Sideband Transmission", *IRE Transaction on Information Theory*, vol. IT-8, septiembre de 1962, pág. S252.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJERCICIO 5.4.3

Se genera una señal DSB-SC usando una portadora de 20.000 MHz y una señal de entrada de 0–3.0 kHz. Una banda lateral se atenúa usando un filtro SSB (supuesto ideal). La señal SSB-SC resultante debe demodularse en un receptor superheterodino cuyo oscilador local opera a una frecuencia f_o (que es mayor que la señal de entrada). El amplificador IF pasa todas las componentes de frecuencia en el intervalo 10.000–10.003 MHz (se supone ideal). Tras el amplificador hay un detector de producto operando a una frecuencia f_d seguido de un filtro pasabajas. Determine los valores numéricos f_o y f_d para que el receptor demodule correctamente la señal SSB si (a) es una transmisión de banda lateral superior; (b) es una transmisión de banda lateral inferior.

[Los pequeños desplazamientos de frecuencia requeridos se obtienen a menudo heterodinizando con un oscilador de frecuencia de audio, conocido como *oscilador de frecuencia pulsante* (BFO, *beat frequency oscillator*).]

RESPUESTA: (a) 30.003; 10.003; (b) 30.000; 10.000 MHz.

EJERCICIO 5.4.4

Determine, bosqueje y compare las envolventes de las siguientes señales de gran portadora: (a) DSB-LC; (b) SSB-LC. Suponga una entrada de la forma $f(t)$ cos $\omega_m t$ y normalice su respuesta de manera que la magnitud de la portadora no modulada sea la unidad y la magnitud pico de la envolvente en $t = 0$ sea 1.30.

RESPUESTA: (a) $1.00 + 0.30 \cos \omega_m t$; (b) $\sqrt{1.09 + 0.60 \cos \omega_m t}$; las gráficas difieren ligeramente.

5.5 MODULACIÓN DE BANDA LATERAL RESIDUAL (VSB)

La generación de señales SSB puede resultar difícil cuando el ancho de banda de la señal moduladora es amplio o cuando no pueden despreciarse las componentes de baja frecuencia. Para conservar el espacio espectral, puede hacerse un compromiso entre SSB y DSB en lo que conoce como modulación de *banda lateral residual* (VSB, *vestigial-sideband*). En ésta, sólo se transmite una porción de una banda lateral, de manera que el proceso de demodulación reproduce la señal original. La supresión parcial de una banda lateral reduce el ancho de banda con respecto al de DSB, pero no alcanza la eficiencia de espectro de SSB. Si se transmite además una gran portadora, la señal deseada puede recobrarse con un detector de envolvente. Si no se envía portadora, se puede recobrar usando un detector síncrono o el método de portadora inyectada examinado en la sección precedente.

La operación de filtración puede representarse con un filtro $H_V(\omega)$ que pasa algo de la banda lateral inferior (o superior) y la mayor parte de la superior (o inferior). En la

http://libreria-universitaria.blogspot.com

figura 5.36 se muestra la característica de magnitud de este filtro. La densidad espectral de la señal de banda lateral residual resultante es

$$\Phi_{VSB}(\omega) = [\tfrac{1}{2}F(\omega - \omega_c) + \tfrac{1}{2}F(\omega + \omega_c)]H_V(\omega)\,. \tag{5.54}$$

Deseamos determinar los requisitos del filtro para que el detector síncrono restituya $f(t)$ sin distorsión.

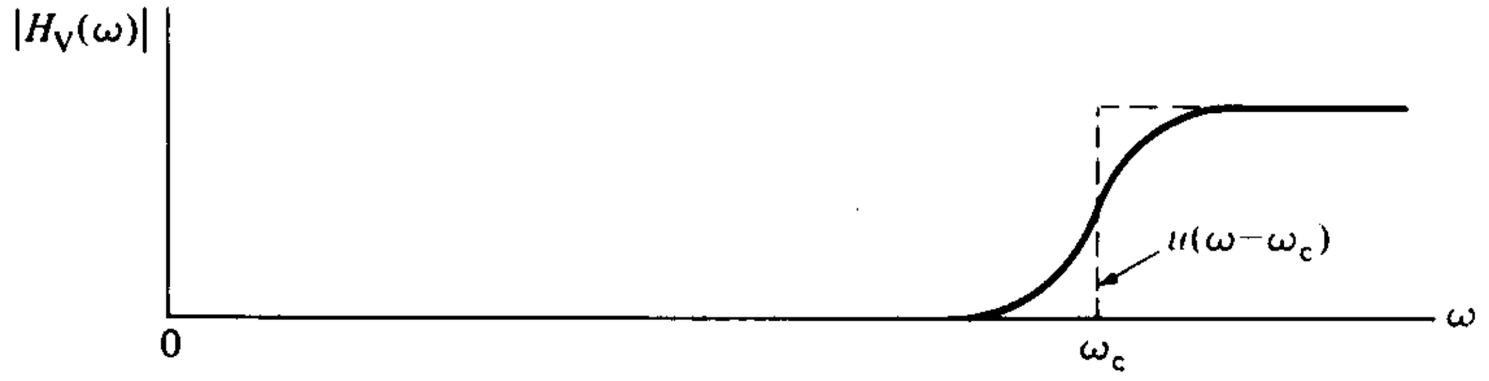


Figura 5.36 Filtración VSB.

La salida del detector síncrono es

$$e_o(t) = [\phi_{VSB}(t)\cos\omega_c t]_{LP}\,,$$

o

$$E_o(\omega) = \tfrac{1}{4}F(\omega)H_V(\omega + \omega_c) + \tfrac{1}{4}F(\omega)H_V(\omega - \omega_c)\,. \tag{5.55}$$

Para una reproducción confiable de $f(t)$, se requiere que

$$[H_V(\omega - \omega_c) + H_V(\omega + \omega_c)]_{LP} = \text{constante}, \qquad |\omega| < \omega_m\,. \tag{5.56}$$

Las traslaciones de frecuencia indicadas en la ecuación (5.56) se ilustran en la figura 5.37. Nótese que, al menos por lo que respecta a la magnitud, la ecuación (5.56) se satisface si $|H_V(\omega)|$ es asimétrica en relación con la frecuencia portadora ω_c. Por este motivo, se hace que la constante de la ecuación (5.56) sea $2H_V(\omega_c)$. En estas condiciones, la ecuación se convierte en

$$[H_V(\omega - \omega_c) - H_V(\omega_c)] = -[H_V(\omega + \omega_c) - H_V(\omega_c)]\,, \tag{5.57}$$

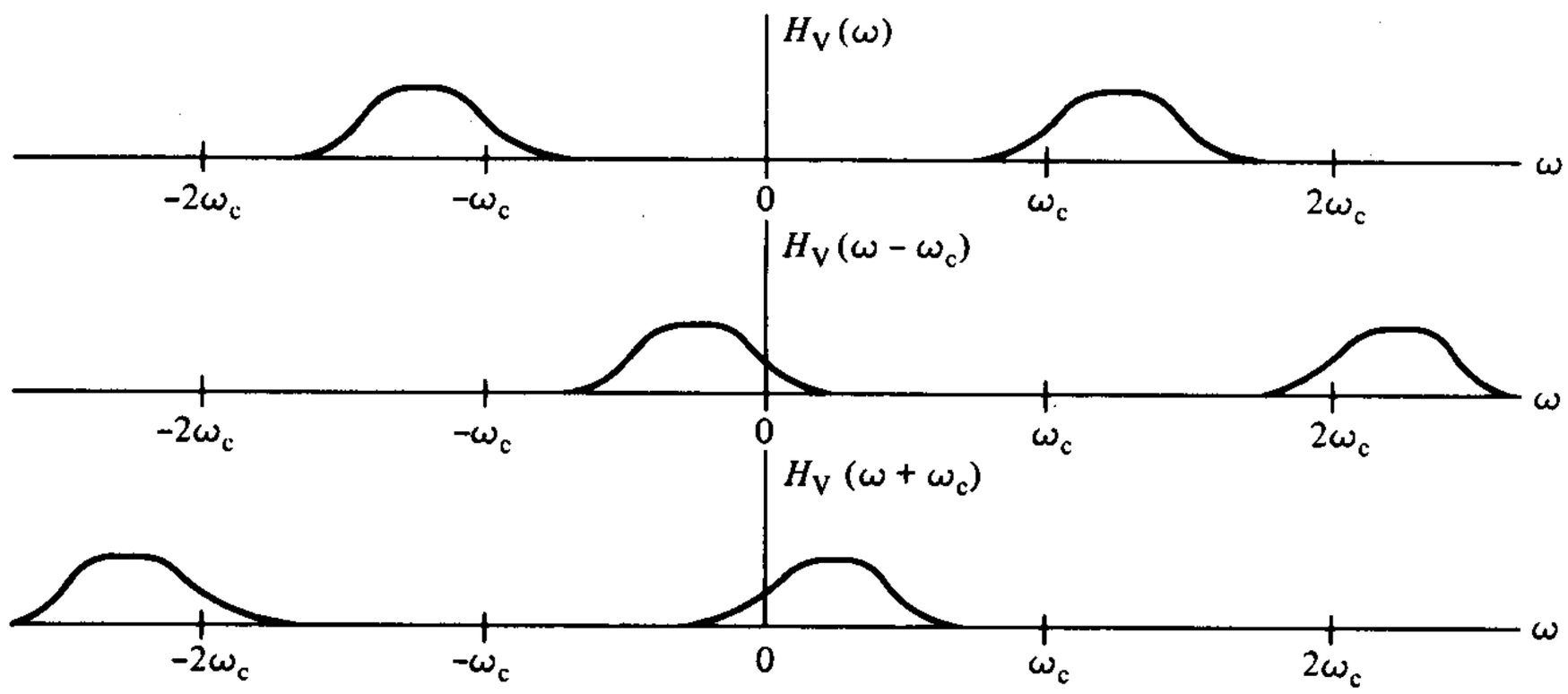


Figura 5.37 Características de la filtración VSB.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

con la asimetría requerida respecto a la frecuencia portadora. Por tanto, la filtración necesaria de una señal VSB es una simetría de filtración complementaria, con respecto a la frecuencia portadora, como se muestra en la figura 5.36. Las relaciones de fase necesarias no son tan fáciles de cumplir, y la VSB se utiliza generalmente en los casos en que la respuesta de fase correcta no es de importancia primordial. Aquí se supone detección síncrona, aunque los mismos principios son válidos también cuando existe una portadora grande y se utiliza un detector de envolvente.

La modulación de banda lateral residual se usa provechosamente en la porción de vídeo de los sistemas de televisión públicos. En una transmisión de televisión, se envían 525 líneas de información de vídeo (imagen) cada 1/30 de segundo (es decir, 15 750 líneas por segundo; la frecuencia de la traza horizontal).† Disponiendo de tiempo para retrazar y sincronizar, esto requiere un ancho de banda de vídeo mínimo de 4 MHz para transmitir un arreglo de elementos de imagen (no obstante, la densidad espectral del vídeo típico no es plana, sino muy cargada a las frecuencias más bajas). El uso de la modulación DSB para la transmisión de vídeo requiere una asignación por frecuencias de 8 MHz por canal. Esto se considera excesivo, por lo que se emplea una versión de modulación VSB para reducir el ancho de banda de vídeo a cerca de 5 MHz. En la figura 5.38 se ilustra el espectro de un canal público de televisión.‡ La característica del filtro no se sitúa sobre la portadora sino 1 MHz por debajo de ella. La filtración en el receptor se usa para completar la característica de la banda lateral residual, como se ve en la figura 5.38.

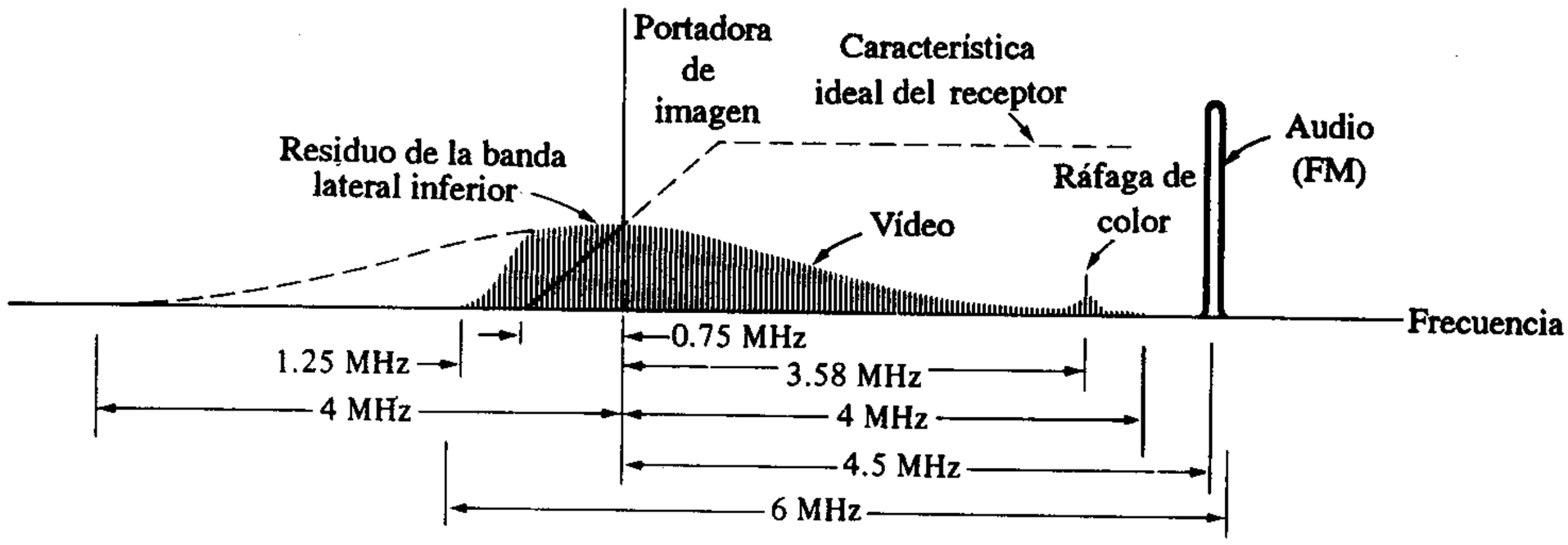


Figura 5.38 Espectro de una transmisión pública de televisión.

5.6 REPRESENTACIÓN EN EL TIEMPO DEL RUIDO PASABANDA

En este punto se vuelve a examinar el ruido pasabanda. No se pretende realizar una descripción del ruido en términos de funciones del tiempo, porque el ruido es aleatorio.

---

† Normas para Estados Unidos; donde se usan líneas de 50 Hz, la norma es enviar 625 líneas cada 1/25 de segundo. En el apéndice D se describen las transmisiones de señales de televisión comercial.

‡ Nótese que el espectro de vídeo aparece en las líneas de muestra de 15.75 kHz. Aquí la frecuencia de muestreo (horizontal) es mucho menor que el ancho de banda de la señal. El teorema del muestreo no establece que la señal no puede ser recobrada sino simplemente que no puede recuperarse sólo por filtrado. Así, el receptor de televisión debe utilizar técnicas de sincronización para recuperar la información de vídeo original.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Sin embargo, en los sistemas pasabanda, que limitan el ancho de banda del ruido, algunas de sus fluctuaciones están restringidas y es posible escribir algunas relaciones del tiempo un poco generales.

A medida que se reduce el ancho de banda del ruido, comparado con la frecuencia central, se hace posible aproximarlo con una representación fasorial. Esta representación se muestra en la figura 5.39, donde $n_c(t)$ es la porción del ruido que constituye la componente en fase y $n_s(t)$ es la componente en cuadratura. Tanto $n_c(t)$ como $n_s(t)$ son aleatorias, por lo que la suma de fasores tiene amplitud a_n y fase θ_n aleatorias.

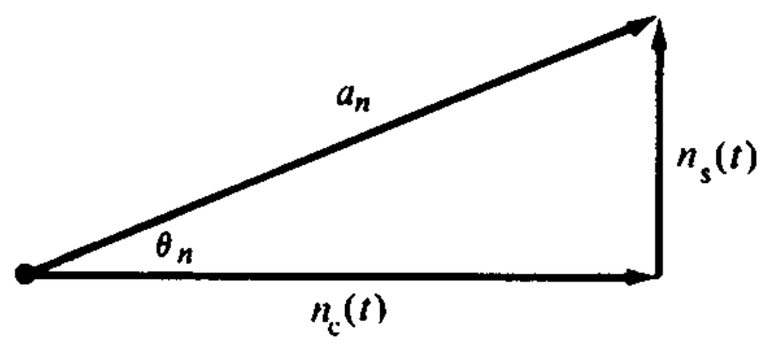


Figura 5.39 Representación fasorial del ruido aleatorio de banda angosta.

La representación fasorial completa del ruido aleatorio de banda angosta puede escribirse usando notación compleja,

$$[n_c(t) + jn_s(t)]e^{j\omega_0 t}, \tag{5.58}$$

donde ω_0 es la frecuencia central. Tanto $n_c(t)$ como $n_s(t)$ varían con lentitud en comparación con $e^{j\omega_0 t}$ como resultado de la restricción de la banda angosta. Tomando la parte real de la ecuación (5.58) para obtener una expresión de $n(t)$, se tiene

$$n(t) = \mathcal{R}e\{[n_c(t) + jn_s(t)]e^{j\omega_0 t}\}.$$

Usando una identidad del álgebra compleja (véase Ap. A), obtenemos†

$$n(t) = n_c(t)\cos\omega_0 t - n_s(t)\,\text{sen}\,\omega_0 t. \tag{5.59}$$

La ecuación (5.59) es la representación buscada de $n(t)$. Aunque derivada del caso de banda angosta, esta representación puede ampliarse al caso más general del pasabanda, definiendo adecuadamente $n_c(t)$ y $n_s(t)$. Por ello, la ecuación (5.59) se conoce como representación del ruido pasabanda. Los términos $n_c(t)$ y $n_s(t)$ son tensiones pasabajas cuyas fluctuaciones están limitadas por el ancho de banda del ruido pasabanda.

Aquí el interés se centra en el resultado del ruido pasabanda aplicado al detector síncrono, que se muestra en la figura 5.40. Multiplicando ambos lados de la ecuación (5.59) por cos $\omega_0 t$,

$$n(t)\cos\omega_0 t = n_c(t)\cos^2\omega_0 t - n_s(t)\,\text{sen}\,\omega_0 t\cos\omega_0 t. \tag{5.60}$$

Si se usan las identidades trigonométricas $2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$, $2\,\text{sen}\,A\cos A = \text{sen}\,2A$, y si se retienen sólo los términos pasabajas (LP, *low-pass*), la ecuación (5.60) se convierte en

$$e_o(t) = [n(t)\cos\omega_0 t]_{LP} = (\tfrac{1}{2})n_c(t). \tag{5.61}$$

---

† Dadas dos cantidades complejas z_1 y z_2; entonces

$$\mathcal{R}e\{z_1 z_2\} = \mathcal{R}e\{z_1\}\,\mathcal{R}e\{z_2\} - \mathcal{I}m\{z_1\}\,\mathcal{I}m\{z_2\}.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

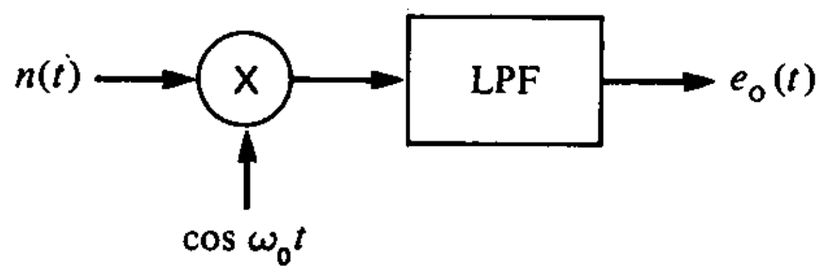


Figura 5.40 Detección síncrona de una señal $n(t)$.

La densidad espectral de potencia de la ecuación (5.61) es, utilizando las ecuaciones (3.45) y (4.17),

$$S_{n_c}(\omega) = \left\{ \lim_{T\to\infty} \left[\frac{|N_T(\omega - \omega_0) + N_T(\omega + \omega_0)|^2}{T} \right] \right\}_{\text{LP}} . \tag{5.62}$$

Para el ruido aleatorio, el promedio de los productos cruzados de la ecuación (5.62) tiende a cero, dando por resultado

$$S_{n_c}(\omega) = [S_n(\omega - \omega_0) + S_n(\omega + \omega_0)]_{\text{LP}} . \tag{5.63}$$

Por tanto, la densidad espectral de potencia del producto de dos señales independientes está dada por la convolución de sus densidades espectrales de potencia. Sin embargo, en casos más generales se debe considerar la presencia del término del producto cruzado (el tema de la independencia se considera en el capítulo 8).

El caso de $n_s(t)$ se sigue de la misma manera, multiplicando primero por sen $\omega_0 t$ ambos lados de la ecuación (5.59) para obtener

$$S_{n_s}(\omega) = [S_n(\omega - \omega_0) + S_n(\omega + \omega_0)]_{\text{LP}} . \tag{5.64}$$

Combinando las ecuaciones (5.63) y (5.64), se tiene

$$S_{n_c}(\omega) = S_{n_s}(\omega) = [S_n(\omega - \omega_0) + S_n(\omega + \omega_0)]_{\text{LP}} . \tag{5.65}$$

En la figura 5.41 se muestra un bosquejo de la densidad espectral del ruido pasabanda y los pasabajas resultantes $S_{n_c}(\omega)$ y $S_{n_s}(\omega)$.

En la figura 5.41 se puede ver que el área bajo $S_n(\omega)$ es igual al área bajo $S_{n_c}(\omega)$ o $S_{n_s}(\omega)$. De aquí se desprende que sus valores cuadráticos medios son iguales, es decir,

$$\overline{n^2(t)} = \overline{n_c^2(t)} = \overline{n_s^2(t)} . \tag{5.66}$$

Estos resultados se aplican al ruido pasabanda *aleatorio*. Es la naturaleza aleatoria del ruido lo que tiende a distribuir sus componentes en los términos coseno o seno, en contraste directo con una señal determinista en la cual se puede controlar la fase para tener sólo términos coseno o seno.

Utilizando la ecuación (5.59), el valor cuadrático medio del ruido pasabanda aleatorio es

$$\overline{n^2(t)} = \tfrac{1}{2}\overline{n_c^2(t)} + \tfrac{1}{2}\overline{n_s^2(t)} . \tag{5.67}$$

Con base en las ecuaciones (5.66) y (5.67) la conclusión es que la potencia media del ruido se divide por partes iguales entre los términos coseno y seno.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

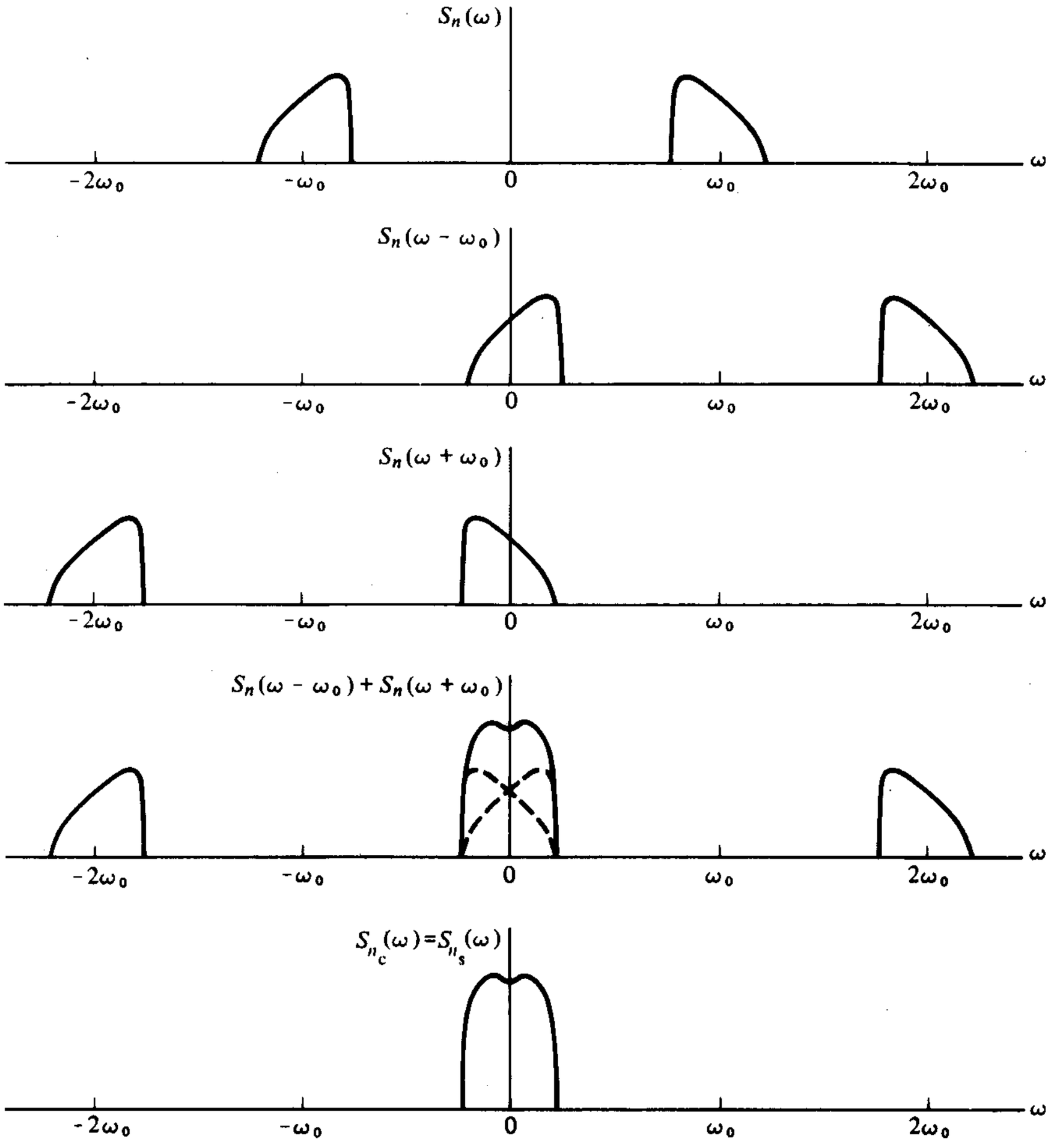


Figura 5.41 Densidades espectrales en fase y en cuadratura del ruido pasabanda.

5.7 RAZONES SEÑAL A RUIDO EN LA RECEPCIÓN AM

Para examinar y comparar varios sistemas de modulación, se necesita una norma básica para la medición del comportamiento. Una magnitud conveniente es la razón señal cuadrática media a ruido cuadrático medio, medidos ambos en el mismo punto del sistema. Esta razón señal a ruido (en potencia) es representada por *S/N*, con subíndices apropiados.

Se supone que las señales que se transmiten y reciben son señales de pasabanda centradas alrededor de la portadora de frecuencia f_c. Esto permite usar las representaciones en fase y en cuadratura de ruido pasabanda que se describieron en la sección anterior.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

5.7.1 DSB-SC

Para señales DSB-SC, el receptor consiste en un detector síncrono: un generador de señales senoidales en $f = f_c$, un multiplicador y un filtro pasabajas. La señal de entrada al detector es $f(t)$ cos $\omega_c t$, de manera que

$$S_i = \overline{[f(t) \cos \omega_c t]^2} = \tfrac{1}{2}\overline{f^2(t)}\,. \tag{5.68}$$

La señal de salida útil es $\frac{1}{2}f(t)$ [el $\frac{1}{2}$ proviene de $\overline{\cos^2 \omega_c t}$], por lo que

$$S_o = \overline{[\tfrac{1}{2}f(t)]^2} = \tfrac{1}{4}\overline{f^2(t)} = \tfrac{1}{2}S_i\,. \tag{5.69}$$

El ruido de salida del detector es $n_i(t)$ cos $\omega_c t$, filtrado por el filtro pasabajas. Haciendo que $n_d(t)$ sea la salida del detector, y $n_o(t)$ la salida del filtro pasabajas, y usando la representación de ruido pasabanda [véase Ec. (5.59)], tenemos

$$n_d(t) = \tfrac{1}{2}n_c(t) + \tfrac{1}{2}n_c(t) \cos 2\omega_c t - \tfrac{1}{2}n_s(t) \operatorname{sen} 2\omega_c t\,, \tag{5.70}$$

$$n_o(t) = \tfrac{1}{2}n_c(t)\,. \tag{5.71}$$

Si se define

$$\overline{n_i^2(t)} = N_i\,,$$

se tiene

$$N_o = \overline{n_o^2(t)} = \tfrac{1}{4}\overline{n_c^2(t)} = \tfrac{1}{4}\overline{n_i^2(t)} = \tfrac{1}{4}N_i\,, \tag{5.72}$$

donde se ha hecho uso de la ecuación (5.66). Combinando las ecuaciones (5.69) y (5.72), obtenemos

$$\frac{S_o}{N_o} = 2\frac{S_i}{N_i} \text{ para DSB-SC.} \tag{5.73}$$

Así, el detector mejora la razón señal a ruido en un sistema DSB-SC por un factor de dos. Esta mejora se debe al hecho de que el detector coherente (síncrono) rechaza las componentes de ruido fuera de fase (en cuadratura) de la entrada, reduciendo a la mitad la potencia cuadrática media de ruido.

El uso del detector síncrono para el caso de gran portadora, puede derivarse con facilidad del resultado anterior notando que $f(t)$ se reemplaza con $[A + f(t)]$, de modo que $S_i = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}\overline{f^2(t)}$ [suponiendo que $\overline{f(t)}$ es cero] y

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{2\overline{f^2(t)}}{A^2 + \overline{f^2(t)}}\frac{S_i}{N_i}\,. \tag{5.74}$$

Como $|f(t)| < A$ para sistemas de gran portadora, la razón señal a ruido es un poco más pobre que para el sistema de portadora suprimida.

5.7.2 SSB-SC

Usando la representación general de una señal SSB-SC (véase Ec. 5.33),

$$\phi(t) = f(t) \cos \omega_c t \pm \hat{f}(t) \operatorname{sen} \omega_c t\,,$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

se tiene

$$S_i = \overline{\phi^2(t)} = \tfrac{1}{2}\overline{f^2(t)} + \tfrac{1}{2}\overline{\hat{f}^2(t)}\,. \tag{5.75}$$

Sin embargo, también se tiene [puesto que $\hat{F}(\omega)$ sólo está desplazada de fase con respecto a $F(\omega)$]

$$|F(\omega)|^2 = |\hat{F}(\omega)|^2. \tag{5.76}$$

Si se integra y se usa el teorema de Parseval, la ecuación (5.76) da

$$\overline{f^2(t)} = \overline{\hat{f}^2(t)}\,. \tag{5.77}$$

Entonces, la ecuación (5.75) se convierte en

$$S_i = \overline{f^2(t)}\,. \tag{5.78}$$

La señal de salida útil es $\frac{1}{2}f(t)$ por lo que

$$S_o = \overline{[\tfrac{1}{2}f(t)]^2} = \tfrac{1}{4}\overline{f^2(t)} = \tfrac{1}{4}S_i\,. \tag{5.79}$$

Combinando las ecuaciones (5.72) y (5.79), se obtiene

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{S_i}{N_i} \text{ para SSB-SC.} \tag{5.80}$$

Como el proceso de detección de SSB es una traslación de frecuencias directa, todas las componentes de la señal y el ruido se transfieren, sin modificación, a frecuencias bajas. Por ello, la relación entre la señal y el ruido se mantiene inalterable en la detección SSB y las razones *S/N* son iguales antes y después de la detección.

¿Es entonces superior el sistema DSB-SC al SSB? No cuando la potencia de ruido es proporcional al ancho de banda, porque el sistema DSB-SC requiere el doble de ancho de banda que el SSB y, en consecuencia, tiene el doble de la potencia de ruido. Se concluye que *el comportamiento de SSB-SC es idéntico al de DSB-SC desde el punto de vista de la corrección del ruido, en presencia de ruido blanco.*

5.7.3 DSB-LC: el detector de envolvente

El detector síncrono usado en los sistemas SSB-SC y DSB-SC se podría utilizar también aquí, pero, para aprovechar todas las ventajas de la AM, es más común el empleo del detector de envolvente. Sin embargo, éste no es lineal y, cuando mucho, sólo se podrán establecer algunos límites a su comportamiento.

Usando la representación del ruido pasabanda, la señal de entrada y el ruido se pueden escribir como

$$s_i(t) + n_i(t) = [A + f(t)]\cos\omega_c t + n_c(t)\cos\omega_c t - n_s(t)\,\text{sen}\,\omega_c t\,. \tag{5.81}$$

La envolvente de esta señal es (véase Fig. 5.42)

$$r(t) = \sqrt{\{[A + f(t)] + n_c(t)\}^2 + \{n_s(t)\}^2}\,. \tag{5.82}$$

Para una razón señal a ruido alta, esto puede aproximarse por medio de una expansión binomial para obtener

$$r(t) \approx A + f(t) + n_c(t)\,. \tag{5.83}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

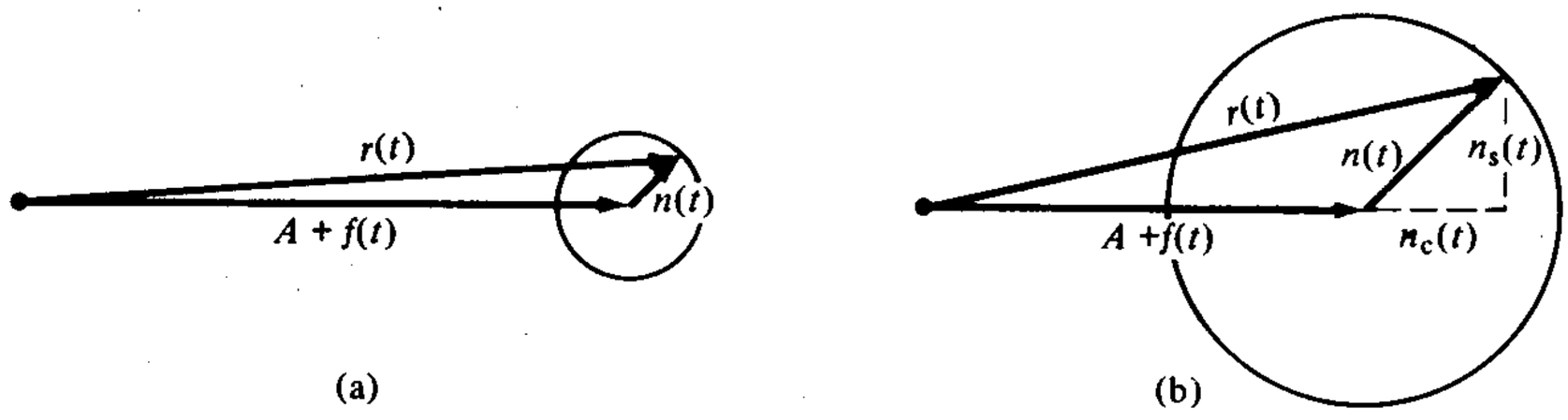


Figura 5.42 Diagrama fasorial de las señales DSB-LC para razones (a) *S/N* grande y (b) *S/N* pequeña.

La señal útil aquí es $f(t)$, mientras que el ruido es $n_c(t)$. La salida del detector da

$$S_o = \overline{f^2(t)}\,, \tag{5.84}$$

$$N_o = \overline{n_c^2(t)} = \overline{n_i^2(t)} = N_i\,; \tag{5.85}$$

además,

$$S_i = \overline{\{[A + f(t)]\cos \omega_c t\}^2} = \tfrac{1}{2}A^2 + \tfrac{1}{2}\overline{f^2(t)}\,. \tag{5.86}$$

Combinando las ecuaciones (5.84) y (5.86), tenemos

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{2\overline{f^2(t)}}{A^2 + \overline{f^2(t)}}\frac{S_i}{N_i}, \quad \text{para AM, señal a ruido alta.} \tag{5.87}$$

Nótese que la ecuación (5.87) es idéntica a la ecuación (5.74), que se obtuvo con detección síncrona. Es decir que para el caso de razón señal a ruido alta, la demodulación de envolvente en presencia de ruido se comporta con igual calidad que la síncrona.

En el caso particular de modulación senoidal, $f(t) = mA\cos \omega_m t$, y la ecuación (5.87) puede escribirse como

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{2m^2}{2 + m^2}\frac{S_i}{N_i}, \quad \text{para AM, señal a ruido alta, modulación senoidal.} \tag{5.88}$$

El máximo aumento en la razón señal a ruido es de $\frac{2}{3}$ a una modulación de 100%.

En ocasiones es conveniente referirse a la razón señal a ruido de salida como la razón *portadora a ruido* (CNR, *carrier to noise ratio*) en la salida de los amplificadores IF. Observando que el valor cuadrático medio de la portadora es $S_c = A^2/2$ y que el valor cuadrático medio del ruido en la salida de los amplificadores IF es $N_c = N_i$, encontramos que las ecuaciones (5.84) y (5.85) dan

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{2\overline{f^2(t)}}{A^2}\frac{S_c}{N_c}\,. \tag{5.89}$$

En el caso particular de la modulación senoidal, $f(t) = mA\cos \omega_{in} t$ y la ecuación (5.89) puede reescribirse como

$$\frac{S_o}{N_o} = m^2\frac{S_c}{N_c}\,. \tag{5.90}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En otras palabras, la máxima razón señal a ruido de un sistema AM es igual a la razón portadora a ruido (CNR) en la salida de los amplificadores IF. Esta forma resulta conveniente al comparar el desempeño de la AM con otros tipos de modulación.

En el caso de ruido alto, ya no puede hacerse la aproximación de la ecuación (5.83). Reescribiendo la expresión para la envolvente de la señal dada en la ecuación (5.82),

$$r(t) = \left\{A^2\left[1 + \frac{2f(t)}{A} + \frac{2n_c(t)}{A} + \frac{2n_c(t)f(t)}{A^2} + \frac{n_c^2(t)}{A^2} + \frac{f^2(t)}{A^2}\right] + n_s^2(t)\right\}^{1/2}. \tag{5.91}$$

Este resultado muestra que no sólo se agregan términos de ruido, sino que la señal deseada está multiplicada por ruido. Por tanto, para condiciones de ruido excesivo, la señal deseada es muy distorsionada por el detector de envolvente.

Este efecto puede visualizarse con la ayuda de la figura 5.42. El ruido aleatorio $n(t)$ se suma a la señal portadora modulada con fase y magnitud aleatorias. La envolvente $r(t)$ está controlada principalmente por la portadora modulada para altas condiciones *S/N*. Sin embargo, cuando la magnitud del ruido (en promedio) es del mismo orden que la de la señal portadora modulada, desaparece este predominio en el control de la envolvente. De hecho, para $S/N < 1$, el ruido asume el control de la envolvente.

Algunos de los resultados anteriores pueden combinarse para la densidad espectral de un ruido blanco de entrada de $\eta/2$ W/Hz y un ancho de banda modulador de f_m Hz. En este caso, se tiene $N_i = 2\eta f_m$ para sistemas DSB y $N_i = \eta f_m$ para sistemas SSB. Por tanto, las ecuaciones (5.73) y (5.80) pueden escribirse como

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{S_i}{\eta f_m} \tag{5.92}$$

utilizando detección síncrona en ambos sistemas. Nótese que en la detección síncrona, la mejor *S/N* es independiente de la razón *S/N* de entrada y que los efectos de la filtración antes y después de la detección son idénticos. En la figura 5.43 se muestra una gráfica de la ecuación (5.92).

En la figura 5.43 también se muestra la razón *S/N* de salida con detección de envolvente para DSB y SSB.[†] Con una razón *S/N* de entrada alta, la razón *S/N* de salida de la detección de envolvente se aproxima a la de la detección síncrona. Sin embargo, con razones *S/N* de entrada menores, la *S/N* de salida decrece más rápidamente que en la detección síncrona, con una razón *S/N* menor que alrededor de 10–15 dB. Sin embargo, este efecto de degradación no es muy abrupto en los sistemas de AM.

En comunicaciones orales, la inteligibilidad y la fidelidad exigen una razón señal a ruido alta (p. ej., 30 dB) y los diseños de los sistemas suelen colocarse por encima de las razones señal a ruido en las que los efectos de degradación *S/N* son importantes. En

[†] El análisis de *S/N* para detección de envolvente se puede ver, entre otras publicaciones, en W. D. Gregg, *Analog and Digital Communications*, Nueva York, Wiley, 1977, Cap. 7.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

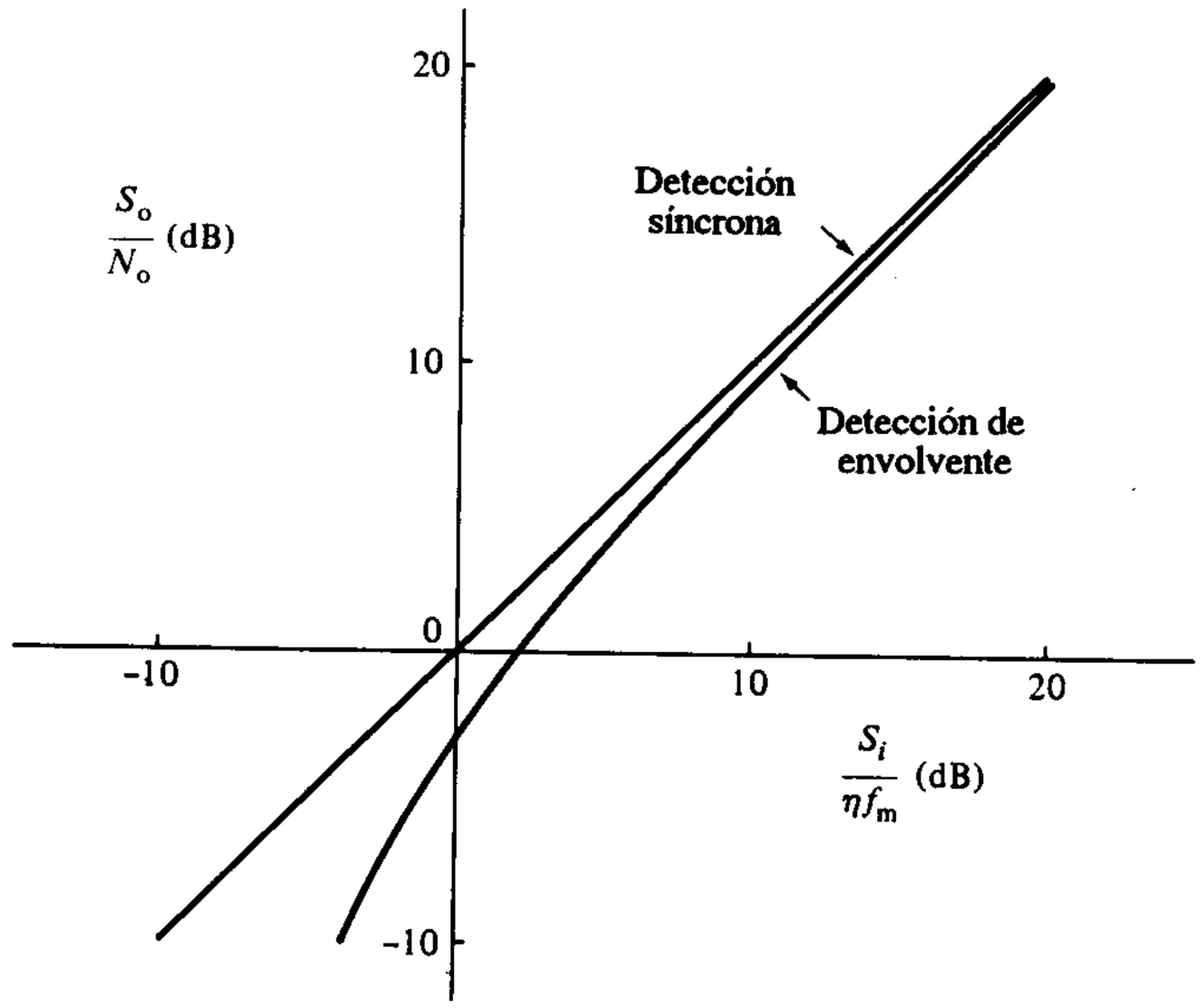


Figura 5.43 Desempeño de señal a ruido en sistemas AM.

sistemas de televisión se encontró que la recepción de la información de vídeo utilizando detección de envolvente requiere una $S/N > 33$ dB para una buena calidad de la imagen, con 28–33 dB en la categoría de "pasable", 23–28 dB en la categoría de "marginal" y 17–23 dB en la categoría de "inferior". La calidad de imagen para $S/N < 17$ en los sistemas de televisión comercial se considera inútil.†

La degradación del desempeño con una S/N baja es una propiedad de los detectores de envolvente; no se observa dicho efecto con los detectores síncronos. Con detección síncrona, la señal de salida y el ruido permanecen aditivos y las mejoras de la señal a ruido se mantienen bajo cualquier condición de ruido.

Por tanto, una comparación de los detectores de envolvente con detectores síncronos en varias condiciones de S/N muestra que el desempeño de ambos detectores es comparable cuando la razón S/N es alta. Sin embargo, el comportamiento no lineal del detector de envolvente lo hace inaceptable conforme aumenta la cantidad relativa de ruido en la entrada, y el desempeño de S/N disminuye.

Finalmente, si se normalizan todos los métodos anteriores de detección AM a igual potencia de entrada de banda lateral y no se incluye la potencia portadora después de la detección, las razones señal a ruido de salida son las mismas para valores altos de señal a ruido de entrada. Los métodos de detección síncrona siguen siendo válidos en condiciones de baja razón señal a ruido, mientras que la salida del detector de envolvente resulta inútil.

---

† Véase, por ejemplo, K. B. Benson (ed), *Television Engineering Handbook*, Nueva York, McGraw Hill, 1986, Cap. 13.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

5.8 EFECTOS DE PROPAGACIÓN

Los sistemas de comunicación con frecuencia usan la propagación electromagnética para conducir información de un punto a otro. Como la modulación elegida puede verse influida por la propagación, se investigarán de manera breve algunos de estos efectos.

La radiación electromagnética a través del espacio tiene su potencia promedio distribuida por igual entre un campo eléctrico y un campo magnético. En el espacio libre, las direcciones de estos campos y la dirección de la propagación forman ángulos rectos. La polarización de una onda electromagnética se toma en dirección del campo eléctrico. Por ello se dice que una onda se encuentra polarizada verticalmente si su campo eléctrico está en la dirección vertical. En presencia de un plano de tierra, cuando las antenas se encuentran a una longitud de onda de éste, se prefiere la polarización vertical, mientras que la horizontal se elige cuando las antenas se hallan a varias longitudes de onda por encima de la tierra.

Como resultado de la teoría electromagnética, la dimensión mínima de una antena para una radiación eficiente de energía de frecuencia de radio, es la mitad de la longitud de onda de dicha frecuencia. A bajas frecuencias, esta longitud resulta excesiva y, para polarización vertical, la tierra se usa como la mitad de la antena, como se muestra en la figura 5.44. Este tipo de antena se usa, por ejemplo, en la banda comercial de radio AM. A frecuencias mayores (es decir, menores longitudes de onda), es común utilizar antenas de media onda polarizadas horizontalmente, a menudo en configuraciones que mejoran su comportamiento. A muy altas frecuencias, las dimensiones físicas de la antena resultan grandes comparadas con la longitud de onda, por lo que pueden usarse aproximaciones ópticas.

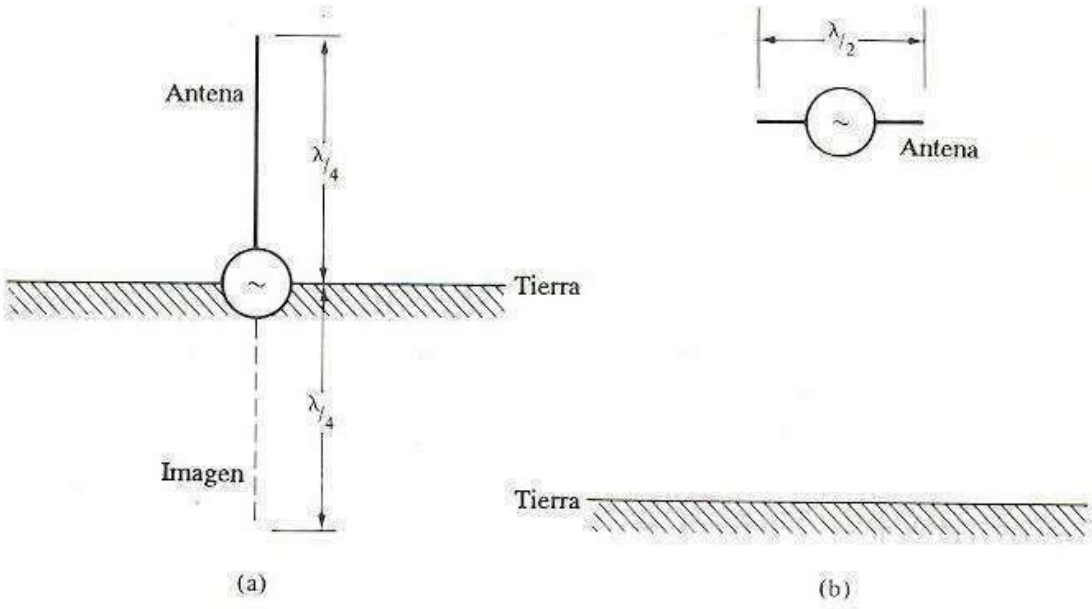


Figura 5.44 Antena básica de media onda: (a) polarización vertical, baja frecuencia; (b) polarizacion horizontal, alta frecuencia.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En general, una onda electromagnética radiada por una antena se compone de una onda terrestre que proviene de corrientes inducidas en la tierra y que viaja por su superficie, y de una onda celeste que se propaga por el espacio. A frecuencias muy bajas, la onda terrestre puede usarse para una comunicación segura entre largas distancias, mientras que la propagación de la onda celeste se usa generalmente a altas frecuencias.

La onda terrestre pierde energía como resultado de la dispersión sobre la superficie terrestre y la energía disipada en la tierra. Estas pérdidas varían directamente con la frecuencia y la resistencia de la tierra. Arriba de 10 MHz, la atenuación es tan alta que la propagación de la onda terrestre tiene muy poco valor práctico. Como la componente tangencial del campo eléctrico no puede existir en la superficie de la tierra, se usa polarización vertical cuando se desea propagación por medio de la onda terrestre.

La onda celeste abandona la antena y viaja esencialmente en línea recta. Algo de la energía de la onda celeste sale de la antena formando un ángulo con la horizontal y viaja hacia arriba hasta que entra en una capa ionizada, conocida como ionosfera, entre 30 y 70 millas sobre la superficie de la tierra. En esta región, la trayectoria de la onda es alterada por efectos refractantes que dependen de la intensidad de la ionización y de la frecuencia de la onda. Según las condiciones, la trayectoria puede ser doblada hacia abajo lo suficiente para que la energía radiada regrese a la tierra, como se ilustra en la figura 5.45. En este proceso, las pérdidas son pequeñas y la fuerza de la señal de la onda celeste puede ser muy grande. Como resultado de esto, las comunicaciones a larga distancia pueden realizarse por medio de la onda celeste.

La ionización en la ionosfera varía con la actividad solar, por lo que esos efectos divergen según la hora del día y la estación. Esto es más pronunciado en la noche, y no es raro recibir señales fuertes en la banda de AM desde una distancia de mil millas en la noche, mientras que la fuerza de la onda terrestre se debilita después de unos cuantos cientos de millas. Para evitar interferencias, a algunas estaciones de AM sólo se les permite operar durante el día.

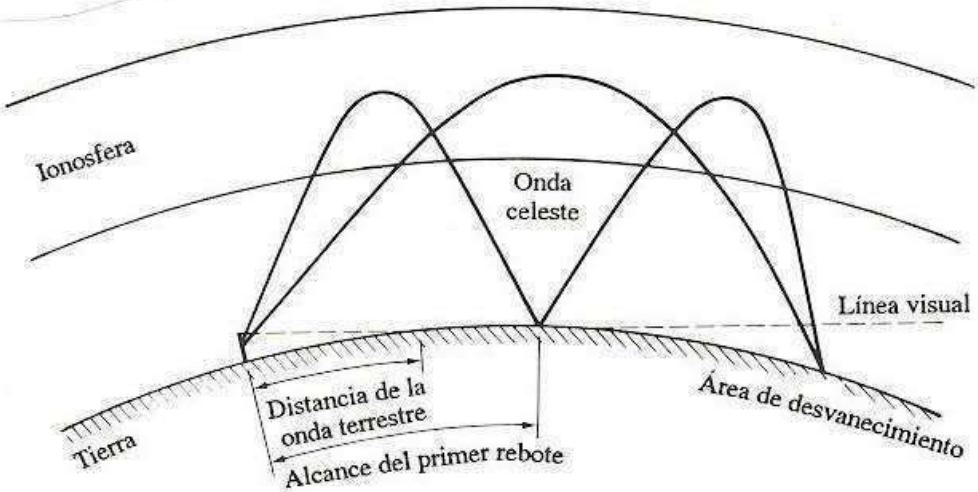


Figura 5.45 Propagación de la onda terrestre y la onda celeste desde una antena (el dibujo no está a escala).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Cuando dos o más ondas de radio llegan a un punto de recepción por diferentes caminos, sus relaciones de fase quizá no sean las mismas. Los resultados de esta propagación por vía múltiple pueden causar grandes variaciones en la intensidad de la señal en el punto de recepción. La cancelación de una onda por otra produce una pérdida de fuerza de la señal y se llama *desvanecimiento*. Si éste es muy sensible a la frecuencia de propagación, diferentes partes del espectro de una señal pueden sufrir distintos desvanecimientos. Este efecto se llama *desvanecimiento selectivo*. El desvanecimiento puede minimizarse eligiendo adecuadamente la frecuencia portadora y la modulación, usando diferentes frecuencias portadoras (diversidad de frecuencias) y utilizando varias antenas diferentes (diversidad espacial) o configuraciones de antena sumamente selectivas.

La dirección de la onda celeste por arriba de una frecuencia cercana a 30 MHz no se altera lo suficiente para regresar a tierra, por lo que la propagación es predominantemente en línea recta del transmisor al receptor. La propagación por vía múltiple se encuentra aún presente debido a ondas reflejadas por la tierra y por estructuras artificiales, aunque ya no depende tanto de la frecuencia (p. ej., los "fantasmas" en el vídeo de televisión). La distancia de la comunicación está regida principalmente por la altura de las antenas transmisora y receptora. Para ángulos de elevación pequeños ocurre cierta refracción o desviación de la trayectoria, por lo que, a muy altas frecuencias, es posible la comunicación por debajo de la línea de visión, aunque no con tanta eficiencia como a frecuencias menores. La propagación por trayectoria múltiple y el desvanecimiento pueden variar en función de las condiciones meteorológicas.

Para propagación en línea recta entre estaciones terrestres el trayecto de la señal debe estar por encima del horizonte para una trayectoria clara. En realidad, las ondas electromagnéticas no se propagan en líneas rectas incluso por encima de 30 MHz porque el índice de refracción de la atmósfera disminuye con la altura, provocando deflexiones en los frentes de onda. Este efecto se puede compensar en los cálculos de trayectorias en línea recta usando como radio efectivo de la Tierra cuatro tercios del radio real. El punto de tangencia a este modelo de cuatro tercios para la Tierra, que se ilustra en la figura 5.46, se llama radio del horizonte. Usando esta geometría, se puede escribir

$$d^2 + r^2 = (r + h)^2,$$

$$d = \sqrt{2rh + h^2}.$$

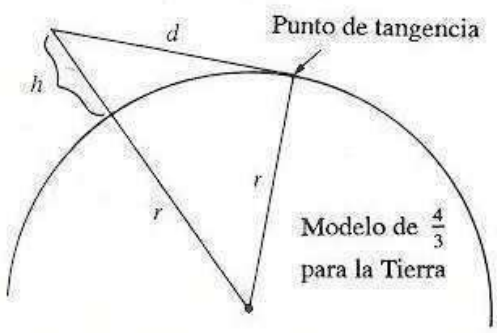


Figura 5.46 Distancia en línea recta al radio del horizonte.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Suponiendo que $h^2 \ll 2rh$ y utilizando 3960 millas para el radio de la tierra, $r = (4/3)(3960) = 5280$, y una aproximación conveniente para la distancia d en millas al radio del horizonte es

$$d \approx \sqrt{2h}, \tag{5.93}$$

donde h es la altura de la antena en pies. Por tanto, una estación de televisión que transmite desde una torre de 1000 pies tiene un área de cobertura efectiva de alrededor de $\sqrt{2000} = 44.7$ millas, y esta distancia se puede aumentar elevando la torre. Es por esta razón que las estaciones de televisión (y de FM) prefieren colocar sus antenas en edificios altos para aumentar su área efectiva de cobertura.

A VHF y mayores frecuencias, la propagación por trayectoria múltiple sigue causando problemas. Como la mayor parte de las comunicaciones terrestres de larga distancia opera a estas frecuencias, la propagación por trayectoria múltiple a estas frecuencias ha sido muy estudiada. Además de la reflexión y la refracción de las señales en la tierra y de los objetos hechos por el hombre, así como la disminución gradual del índice de refracción con la altura, existe también un efecto de capas en la atmósfera baja que provoca gradientes agudos del índice de refracción. El resultado es que la señal transmitida se recibe por varias trayectorias con diferentes características, y éstas pueden cambiar con el tiempo.

Trabajos recientes sobre propagación por trayectoria múltiple a frecuencias de microondas se han enfocado a la adecuación de datos estadísticos con modelos matemáticos. Un método es adecuar los datos a una función de transferencia de dos trayectorias de la forma:

$$H(\omega) = a[1 - be^{-j(\omega-\omega_0)\tau}], \tag{5.94}$$

donde a, b son factores de escala y forma, respectivamente, ω_0 es la frecuencia de un mínimo en $|H(\omega)|$, y τ es la diferencia de canal entre las dos trayectorias (de manera similar, se puede postular un modelo de tres trayectorias, etc.). Se encontró que este modelo de dos trayectorias, cuando se compara con datos de propagación estadística, proporciona una función de transferencia de canal útil para un valor relativamente constante de τ. Por tanto, existe alguna ventaja al construir un filtro que compense esta trayectoria múltiple. Dicha compensación, introducida a propósito en el sistema, se llama *igualación*.

Desde una perspectiva global, la función de transferencia en la ecuación (5.94) se puede considerar como el producto de un término selectivo de frecuencia (el término entre paréntesis en la ecuación) y un término de "desvanecimiento plano" especificado por el parámetro a. El desempeño de sistemas de modulación de ángulo a VHF y frecuencias mayores se puede caracterizar bastante bien por un margen de desvanecimiento plano. Por ejemplo, el diseñador de un sistema FM aire-aire o aire-tierra debería especificar un margen extra (p. ej., 20 dB) en el diseño para tomar en cuenta la propagación de trayectoria múltiple.

Las transmisiones digitales (así como de AM) son más sensibles al desvanecimiento selectivo de frecuencia.[†] El desvanecimiento selectivo de frecuencia provoca severas

[†] Los métodos de modulación digital se cubren en los capítulos 7 a 10. Para información acerca de los efectos de trayectorias múltiples en comunicaciones digitales, véase, por ejemplo, C. A. Siller, Jr., "Multipath Propagation", *IEEE* Communications Magazine, vol. 22, febrero de 1984, págs. 6–15.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

distorsiones de amplitud y retardo que degradan la confiabilidad de dichos sistemas más allá del esperado para un margen de desvanecimiento plano.

Mientras que la diversidad en frecuencia y la diversidad en el espacio se utilizan en sistemas de transmisión tanto digital como analógica, los efectos de la propagación de trayectoria múltiple son lo bastante severos en sistemas digitales para garantizar medidas adicionales de control. Éstas incluyen igualación de amplitud e igualación de canal. Los métodos de igualación de amplitud tratan de restablecer la magnitud correcta de la función de transferencia ajustando los parámetros del modelo (p. ej., el modelo de dos trayectorias). Se ha encontrado que la igualación de amplitud por sí sola es de valor limitado para sistemas digitales, pero en conjunto con alguna diversidad espacial puede ser muy efectiva. Sin embargo, la propagación de trayectoria múltiple distorsiona tanto la amplitud como la fase de la señal transmitida y, en consecuencia, una mejor solución es igualar un canal para la amplitud y la distorsión de fase. Esto conduce al diseño de igualadores transversales adaptables, un tema reservado para su consideración en el capítulo 9.

5.9 COMPARACIÓN DE VARIOS SISTEMAS AM

Se han examinado varios sistemas de amplitud modulada y resulta interesante comparar sus características de comportamiento. En primer lugar, se compararán los sistemas de gran portadora y de portadora suprimida.

Los primeros tienen la ventaja de incluir detectores más simples en el receptor y, por tanto, constituyen la elección natural cuando lo importante son los receptores baratos. Además, los moduladores de alta potencia son más fáciles de construir para sistemas de gran portadora porque los términos portadores que aparecen en la generación no tienen que ser balanceados o bloqueados.

Por otra parte, los sistemas de portadora suprimida requieren mucha menos potencia para transmitir la misma información. Los receptores de transmisiones de portadora suprimida son más complicados porque deben generar una portadora de fase y frecuencia apropiadas. Sin embargo, cuando la eficiencia de la comunicación es prioritaria, se justifica la mayor complejidad del receptor. Los sistemas de portadora suprimida son menos susceptibles a los efectos de desvanecimiento selectivo, dado que el desvanecimiento de la portadora puede provocar severa distorsión en el detector de envolvente.

Al comparar los sistemas de doble banda lateral y de banda lateral única, se ve que las operaciones de recepción son idénticas. Los sistemas de doble banda lateral tienen ventaja en la facilidad de generación, ya que no requieren supresiones de banda lateral. Estos sistemas pueden usarse para transmitir información hasta frecuencia cero con buena fidelidad.

Por su parte, los sistemas de banda lateral única requieren la mitad del ancho de banda de los anteriores, proveyendo buena eficiencia del espectro. Como el desvanecimiento selectivo puede trastornar las relaciones de fase entre las bandas laterales, estos sistemas se afectan menos con él. Algunas de las ventajas tanto de la única como de la doble banda lateral pueden aprovecharse usando sistemas de banda lateral residual.

En las señales SSB-SC y DSB-SC, toda la potencia transmitida está en las bandas laterales. Para una potencia de banda lateral de entrada igual, la razón S/N de salida es

http://libreria-universitaria.blogspot.com

la misma para ambas con base en la potencia media. Además, por supuesto, la señal SSB ocupa sólo la mitad del ancho de banda. Para modulación senoidal, la DSB-LC produce, cuando mucho, sólo 1/3 de la razón *S/N* de salida de la señal DSB-SC correspondiente [p. ej., compárense las ecuaciones (5.73) y (5.88)]. Para modulación de voz típica, la diferencia es mayor porque la razón pico a raíz cuadrática media es de cerca de 1/8. Si el pico es igual a uno (para modulación de 100%), la razón *S/N* de la DSB-LC para la voz es de alrededor de 1/65 de una señal DSB-SC comparable con base en la potencia media.

Puede hacerse otra comparación con base en la potencia pico en lugar de la potencia promedio. La relación entre la amplitud pico en una señal DSB-LC y la correspondiente señal DSB-SC, para modulación de 100% en los picos, es de 2 [p. ej., véase Ec. (5.18)]. O sea que para la misma modulación de potencia pico, la señal DSB-SC tiene cuatro veces más potencia promedio de banda lateral que la señal DSB-LC y, por tanto, una ventaja de 6 dB de *S/N*. Las comparaciones entre SSB-SC y DSB-SC para señales en general, con base en la potencia pico, son difíciles. En modulación senoidal, la señal SSB-SC tiene una potencia promedio del doble que la señal DSB-SC para iguales amplitudes pico. Entonces, para la modulación senoidal, la señal SSB-SC tiene una ventaja de 3 dB de *S/N* sobre la DSB-SC para la misma potencia pico. Sin embargo, la posible ventaja varía con el tipo de señal moduladora.

En conclusión, se ve que cada tipo de modulación de amplitud tiene sus ventajas y sus desventajas. Cada caso debe evaluarse según sus condiciones y la elección de la modulación ajustarse a él. Este análisis se continuará en el capítulo 6, cuando se estudien razones *S/N* de los sistemas de modulacion de ángulo.

5.10 RESUMEN

La multiplicación de una señal por una senoidal traslada en frecuencia su densidad espectral. Este efecto, conocido como propiedad de modulación, puede usarse para generar señales de amplitud modulada y para demodularlas. Como tales señales no tienen frecuencia portadora separada y son simétricas con respecto a la frecuencia central, se llaman de doble banda lateral con portadora suprimida (DSB-SC). La demodulación adecuada de señales DSB-SC requiere el exacto conocimiento de la frecuencia y la fase usadas en la modulación.

La adición de una frecuencia portadora se usa para ayudar en la demodulación. Si la amplitud de la portadora agregada es grande, un detector de envolvente puede demodular correctamente la señal. Este principio se usa en la radiodifusión comercial de AM.

La elección de diferentes frecuencias portadoras permite situar diversos espectros de mensaje en frecuencias adyacentes y transmitirlos de manera simultánea. Esto se llama multiplexión por división de frecuencia (FDM).

Para conservar el ancho de banda, puede suprimirse una banda lateral de la señal DSB; este tipo de modulación se llama de banda lateral única (SSB). Esto requiere un diseño preciso del filtro o el balance de fase. Una forma económica de aprovechar las ventajas de la SSB es suprimir parcialmente una banda lateral. Esto se conoce como modulación de banda lateral residual.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

El ruido pasabanda aleatorio puede describirse en términos de amplitudes y fases aleatorias de senos y cosenos a la frecuencia central. En el ruido aleatorio, la potencia promedio de ruido se divide en partes iguales entre los dos componentes.

Para una potencia de banda lateral de entrada y una densidad espectral de ruido dadas, las razones *S/N* de salida son todas iguales, siempre que tales razones sean grandes. Para razones *S/N* pequeñas, puede usarse detección síncrona; la detección de envolvente resulta inútil.

Aunque los sistemas de gran portadora permiten el uso de detectores de envolvente baratos, su comportamiento no es óptimo en términos de potencia total o de las razones señal a ruido requeridas para la buena comunicación. Es preferible el uso de la demodulación síncrona en condiciones de señal a ruido baja.

Las fases de las señales que llegan al receptor por diversos caminos causan variaciones en la fuerza de la señal. La cancelación de estas señales provoca la pérdida de fuerza de la señal o desvanecimiento. El desvanecimiento sensible a la frecuencia se llama selectivo. Los efectos de éste son poco perjudiciales para los sistemas de amplitud modulada cuando el ancho de banda de la señal es pequeño y no se requiere mantener una gran portadora, haciendo que la SSB-SC sea una elección obvia.

Referencias seleccionadas para lectura adicional

1. Shrader, R. L., *Electronic Communication*, 4a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1980.
   Análisis bastante detallado de los circuitos y las características de operación de sistemas de comunicación prácticos; es de fácil lectura. El capítulo 20 contiene un breve examen de las antenas y la propagación.
2. Lathi, B. P., *Communication Systems*, Nueva York, John Wiley & Sons, 1968.
   Los capítulos 3 y 7 constituyen un tratado en paralelo de la modulación de amplitud, acentuando el uso de la notación general de señales y la convolución.
3. Carlson, A. B., *Communication Systems*, 3a. ed.,. Nueva York, McGraw-Hill, 1986.
   En el capítulo 6 se usa la representación fasorial para analizar la modulación de amplitud, en particular la detección de envolvente.
4. Taub, H. y Schilling, D.L., *Principles of Communicaction Systems*, 2a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1986.
   En este libro se presenta un buen análisis de los cálculos de señal a ruido en los capítulos 7 y 8.
5. Clarke, K.K. y Hess, D. T., *Communication Circuits: Analysis and Design*, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1971.
   En los capítulos 7 a 10 se presenta un tratamiento avanzado de los circuitos y la teoría usados para la modulación y demodulación en amplitud.
6. Smith, D. R., *Digital Transmission Systems*, Nueva York, Van Nostrand Reinhold, 1985.
   La mayor parte del capítulo 9 trata sobre propagación y desvanecimiento por trayectoria múltiple.
7. Schwartz, M., Bennett, W. R. y Stein, S., *Communication Systems and Techniques*, Nueva York, McGraw-Hill, 1966.
   En el capítulo 9 se incluye un tratamiento extenso del desvanecimiento.
8. Gregg, W. D., *Analog and Digital Communication*, Nueva York, John Wiley & Sons, 1977.
   En los capítulos 2, 4 y 7 se presenta un análisis avanzado de la generación y la detección de AM con ejemplos comunes.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

PROBLEMAS

5.1.1 En algunos sistemas es posible multiplicar una señal por la función de valor complejo $e^{j\omega_1 t}$ después del modulador DSB-SC, como se muestra en la figura P-5.1.1. [P. ej., este efecto se puede lograr a frecuencias de microondas por medio de un cilindro dieléctrico con una espiral conductora rotando dentro de la guía de onda cilíndrica, y velocidad de rotación de ω_1 rad/s. Como segundo ejemplo, se podría provocar por medio de un desplazamiento Doppler introducido como resultado de movimiento relativo.]

a) Examine los resultados de esta segunda multiplicación en la densidad espectral de la salida del modulador, $g(t)$.

b) Suponga que $g(t)$ se demodula utilizando un detector síncrono con error de frecuencia $\Delta\omega$. Compare los efectos de ω_1 y $\Delta\omega$ en (1) la magnitud y (2) la fase en la salida del detector.

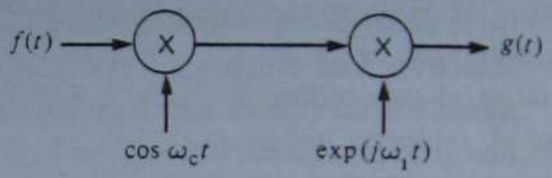


Figura P–5.1.1.

5.1.2 Una señal moduladora $f(t)$ [con transformada de Fourier $F(\omega)$] se aplica a un modulador de doble banda lateral sin portadora que opera a una frecuencia de portadora de 200 Hz. Dibuje la densidad espectral de la señal DSB-SC resultante, identificando las bandas laterales superior e inferior, para los siguientes casos.

a) $f(t) = \cos 100\pi t$;

b) $F(\omega) = \begin{cases} [1 + \cos(\omega/200)]/2 & |\omega| < 200\pi, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

5.1.3 Se desean examinar la frecuencia y la fase de un oscilador de baja frecuencia con respecto a un segundo. Se decide multiplicar las salidas de los osciladores para hacer la comparación. Sin embargo, como resultado de las dificultades al construir el multiplicador de baja frecuencia, se elige utilizar moduladores DSB-SC y un multiplicador pasabanda, como se muestra en la figura P-5.1.3.

a) Determine las expresiones para las señales DSB-SC.

b) Determine una expresión para $g(t)$.

c) Dibuje la magnitud del espectro de $g(t)$.

d) ¿En qué condiciones $g(t)$ representa el producto deseado de las dos señales de entrada?

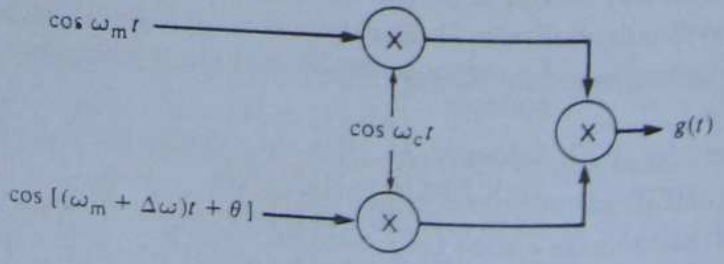


Figura P–5.1.3.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

5.1.4 Una señal senoidal $f(t) = \cos 2000\pi t$ se multiplica por una señal triangular simétrica (periódica) (véase Tabla 2.2) con amplitud pico unitaria y $T = 100\ \mu s$. La salida del multiplicador se aplica a un LPF con ganancia unitaria en la banda de paso.

a) Determine el ancho de banda mínimo y máximo del LPF si la salida debe ser una señal DSB-SC correspondiente a $f(t)$.

b) Determine una expresión para la salida del LPF en las condiciones anteriores.

c) ¿Puede este sistema representarse con el modulador DSB-SC mostrado en la figura 5.1(a) en las condiciones anteriores? Si la respuesta es sí, determine las dos entradas al modulador.

5.1.5 a) Las señales de entrada $x(t) = A \cos \omega_1 t + B \cos \omega_2 t$ y $y(t) = C \cos \omega_3 t$, $\omega_3 \gg \omega_1, \omega_2$ se aplican a las dos entradas de un multiplicador de señales. Dibuje la densidad espectral de la salida y demuestre que se mantiene la linealidad en $x(t)$.

b) La señal de entrada $x(t)$ anterior se aplica a ambas entradas del multiplicador. Dibuje la densidad espectral de la salida y demuestre que la linealidad de $x(t)$ no se mantiene en estas condiciones.

5.1.6 Cuando la entrada a un amplificador de audio es $(4 \cos 800\pi t + \cos 2000\pi t)$ mV, la componente de frecuencia a 1 kHz en la salida es 1 V y la relación de la componente a 600 Hz y la de 1 kHz es 0.002. Represente la característica de entrada y salida del amplificador como

$$e_o(t) = a_1 e_i(t) + a_2[e_i(t)]^2.$$

a) Evalúe los valores numéricos de a_1, a_2, de los datos de prueba dados (este tipo de prueba se llama prueba de distorsión por intermodulación.)

b) ¿Qué magnitudes esperaría para las componentes de frecuencia a 800 Hz y 1400 Hz?

5.1.7 Defina el error en el ejercicio 5.1.1 como la diferencia entre $e_1(t)$ con y sin error de fase.

a) Derive una expresión para la función de autocorrelación del error en términos de θ_0 y las funciones de autocorrelación de $f_1(t)$ y $f_2(t)$.

b) Encuentre una expresión para el error rms si los valores cuadráticos medios de $f_1(t), f_2(t)$ son iguales y $f_1(t), f_2(t)$ no están correlacionados. Grafique su resultado sobre $0 \le \theta_0 < \pi/6$.

5.1.8 Considere el sistema mostrado en la figura P-5.1.8. Suponga que las salidas del comparador son ±1, dependiendo de la polaridad de cada entrada, y que la compuerta NOR exclusiva es una operación de equivalencia que da +1 si las entradas son de la misma polaridad y −1 si son de diferente polaridad.

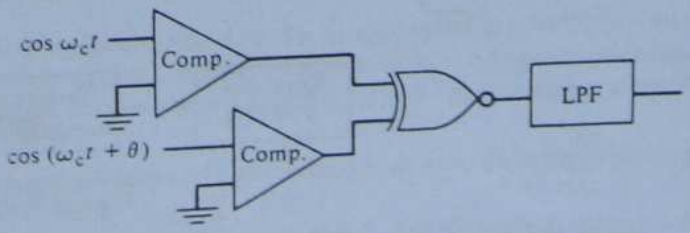


Figura P–5.1.8.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

a) Demuestre que la tensión de salida contiene un término proporcional a cos θ (y, por tanto, que este sistema se puede utilizar como detector de fase).

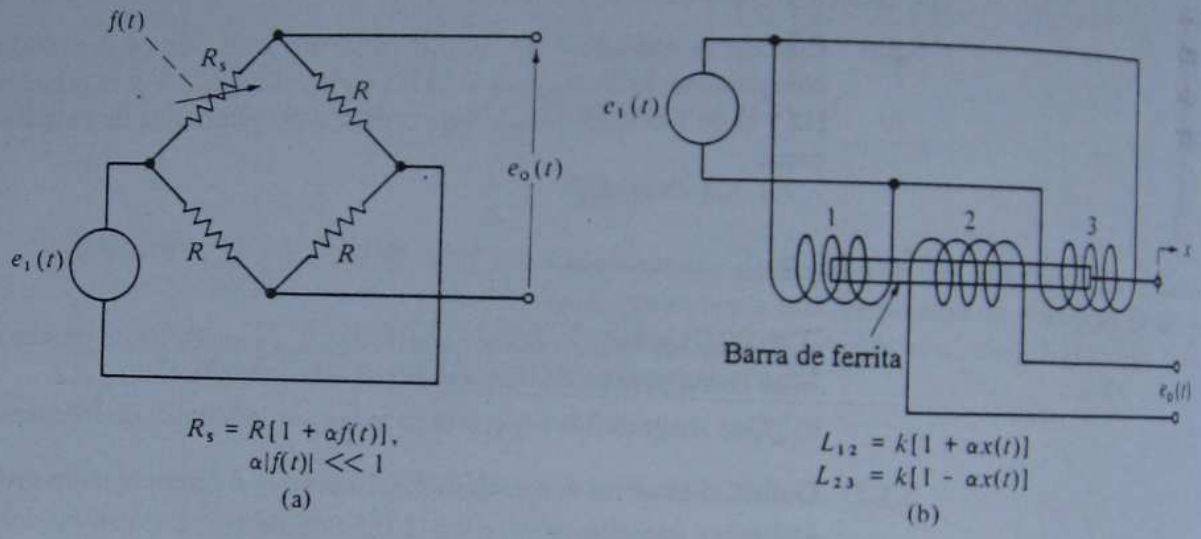
b) ¿Cuál es el máximo ancho de banda del LPF (suponiéndolo ideal)?

c) Repita la parte (b) si una de las salidas del comparador no es tan simétrica.

d) Repita la parte (b) si ambas salidas del comparador no son tan simétricas.

5.1.9 Tres posibles fuentes de error en el sistema mostrado en la figura 5.8 son (1) que el transformador no tenga la derivación exactamente al centro; (2) que los coeficientes de ganancia lineal (a_1) no sean iguales en ambos dispositivos; que (3) los coeficientes cuadráticos (a_2) no sean iguales. Investigue cuál es el error más crítico al obtener una buena señal DSB-SC en la salida del BPF. Escriba cualquier suposición que haga en su análisis.

5.1.10 En la figura P-5.1.10 se muestran dos sistemas de medición. Encuentre la salida de cada sistema si $e_1(t) = \cos \omega_1 t$. ¿Qué tipo de modulación se presenta en cada uno y cómo se podría detectar?



$R_s = R[1 + \alpha f(t)]$, $\alpha|f(t)| << 1$ (a)

$L_{12} = k[1 + \alpha x(t)]$
$L_{23} = k[1 - \alpha x(t)]$ (b)

Figura P–5.1.10 (a) Circuito puente; (b) Transductor de movimiento lineal.

5.1.11 Demuestre que el sistema de conmutación ilustrado en la figura P-5.1.11 produce en esencia las señales correctas para una transmisión FM estéreo.

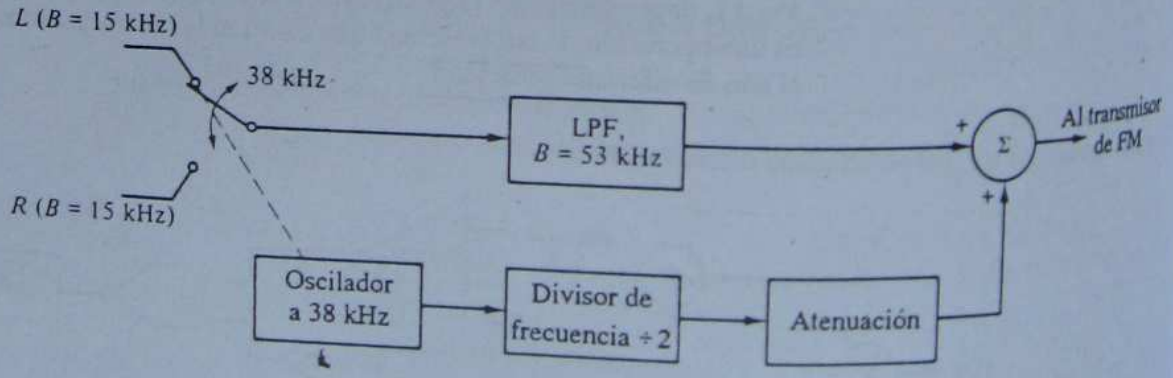


Figura P–5.1.11.

5.1.12 En la figura P-5.1.12 se muestra un sintetizador de frecuencia para controlar la frecuencia de salida de un oscilador digital estable. El oscilador estable opera a $f_c = 100$ kHz y los valores enteros de N_1, N_2 se seleccionan entre 1 y 10.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

a) ¿Cuál es la frecuencia de salida cuando $N_1 = 4$, $N_2 = 2$?
b) Determine el intervalo de frecuencia y el mínimo incremento en frecuencia del sintetizador.

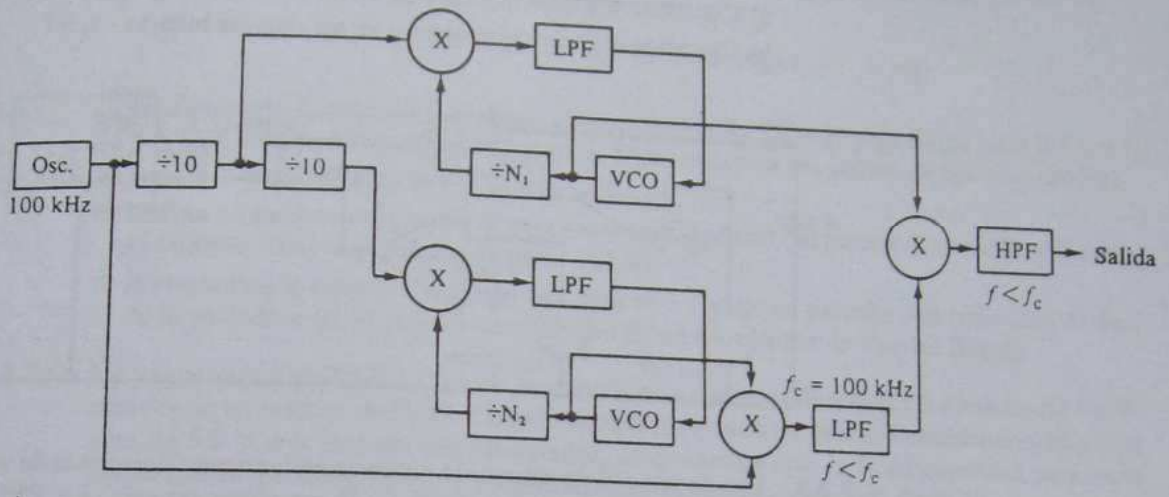


Figura P–5.1.12.

5.1.13 Repita el problema 5.1.12, con la excepción de que la salida en la figura P-5.1.12 se aplica a la entrada del mezclador de la figura P-5.1.13.

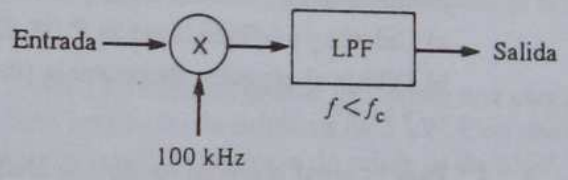


Figura P–5.1.13.

✓ **5.1.14** Ejecute una FFT de 128 puntos para los datos discretos

$$f(k) = \begin{cases} 10 & k = 62, 66 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Grafique y explique su respuesta.

5.2.1 Se comparan dos sistemas de AM. En el sistema 1 la señal $f_1(t) = \cos \omega_m t$ se aplica a la entrada de un modulador DSB-SC y luego se añade un término portador, $A \cos \omega_c t$, después de la modulación. En el sistema 2, la señal $f_2(t) = a + f_1(t)$ se aplica a la entrada del modulador DSB-SC.

a) Compare los resultados. ¿Un nivel de cd en la entrada se puede distinguir de la portadora en la señal de AM?
b) Un problema en el sistema 1 es que debe haber algún desfasamiento θ entre la portadora añadida $A \cos \omega_c t$ y la frecuencia portadora del modulador DSB-SC. Este desfasamiento limita el índice de modulación que se puede lograr con este método. Determine el mayor índice de modulación que se puede obtener para un valor dado de θ.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

5.2.2 Identifique el tipo de modulación presente en la salida del modulador mostrado en la figura P-5.2.2 (véase también Problema 5.1.8) para las condiciones indicadas adelante; si es DSB-LC, calcule el índice de modulación. Establezca también el efecto (si hay alguno) que tiene la polaridad de E en la señal de salida.

a) Circuitos digitales que operan en un sistema binario 0, 1.

b) Circuitos digitales que operan en un sistema binario −1, +1.

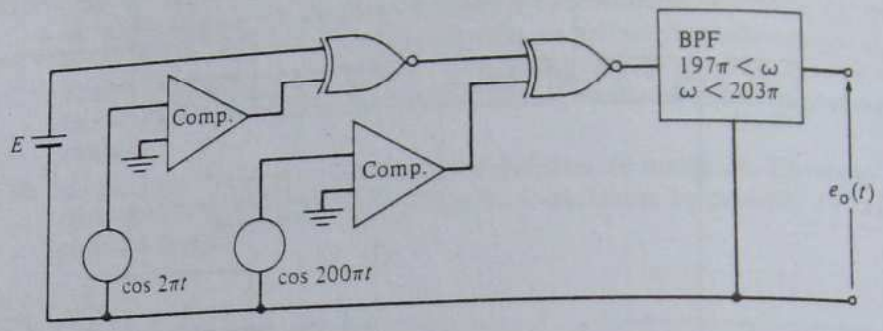


Figura P-5.2.2.

5.2.3 Una forma útil de estimar la potencia en las especificaciones de un transmisor es la potencia pico de la envolvente (PEP, *peak envelope power*). La PEP de una señal $\phi(t)$ es la potencia promedio de una senoidal con la misma amplitud pico que $\phi(t)$. Considere las señales moduladas en amplitud $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$,

$$\phi_1(t) = A(1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega_c t$$

$$\phi_2(t) = B \cos \omega_m t \cos \omega_c t$$

donde $\omega_c \gg \omega_m$. Sea P_1, P_2 la potencia promedio en $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, respectivamente.

a) Calcule y grafique la razón P_1/P_2 como función de m si la PEP es igual en las dos señales.

b) Dibuje el espectro de potencia (de línea) de cada señal para las condiciones anteriores y $m = \frac{1}{2}$.

5.2.4 Para la señal senoidal modulada DSB-LC que se muestra en la figura P-5.2.4:

a) Encuentre el índice de modulación.

b) Escriba una expresión para la señal en la forma de la ecuación (5.18).

c) Dibuje el espectro de línea de la señal.

d) Demuestre que la suma de las dos líneas de las bandas laterales de la parte (c), divididas por la línea de la portadora, proporciona el índice de modulación.

e) Determine la amplitud y la fase de la portadora adicional que se deben añadir a la señal mostrada para obtener un índice de modulación de 20%.

f) Repita la parte (c) para obtener un índice de modulación del 80%.

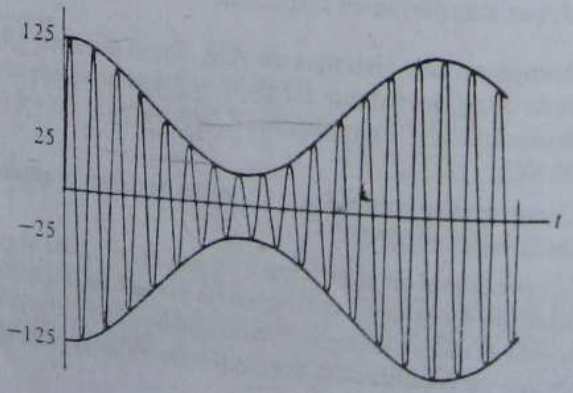


Figura P-5.2.4.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

✓ **5.2.5** Un método para medir el índice de modulación de una señal DSB-LC es aplicar la señal modulada al sistema de deflexión vertical de un osciloscopio y la señal modulante al sistema horizontal.

a) Simule esto usando un computador digital y un monitor gráfico. Sean $x(t) = \cos \pi t$,

$$y(t) = (1 + m \cos \pi t)(\cos 100\pi t)/(1 + m)$$

las funciones horizontal y vertical, respectivamente. Calcule y grafique para $0 \leq t < 1$, $m = 0.5$, usando 500 puntos de muestra. Debe observar un patrón de tipo trapezoidal.

b) Repita la parte (a) para $m = 1.0, 1.5$.

c) Defina un parámetro A como el máximo ancho vertical del patrón observado, y B como el mínimo. Derive una fórmula para $m(A,B)$.

d) Investigue qué sucede a los patrones para $m > 1$ si no se permite una inversión de fase de la portadora (p. ej., como en el diseño de un transmisor de tipo no lineal).

5.2.6 Un transmisor AM (DSB-LC) dado desarrolla una potencia de salida sin modular de 1 kW† a través de un resistor de 50 Ω. Cuando se aplica un tono de prueba senoidal con amplitud pico de 5.0 V a la entrada del modulador, se encuentra que la línea espectral para cada banda lateral en el espectro de magnitud para la salida es el 40% de la línea portadora. Determine las siguientes cantidades en la señal de salida:

a) El índice de modulación.

b) La amplitud pico de la banda lateral inferior.

c) La razón de la potencia total en las bandas laterales a la potencia de la portadora.

d) La potencia total de salida.

e) La potencia promedio total en la salida si la amplitud pico de la senoidal de modulación se reduce a 4.0 V.

5.2.7 Un transmisor AM (DSB-LC) dado se prueba utilizando una carga resistiva ("falsa"). Sin modulación, la potencia promedio de salida es de 5 kW. Con una entrada $f(t)$ senoidal de 1 kHz con amplitud pico de 1 V, la potencia de salida es de 7 kW.

a) Suponga que el material de programación típico tiene una relación pico a rms de 1/8. Si los picos se fijan a 100% de modulación, ¿cuál es la potencia promedio resultante del transmisor para la programación?

b) Calcule el índice de modulación senoidal equivalente para la parte (a).

c) A fin de aumentar la potencia de salida efectiva para los 5 kW asignados (véase pie de página para el problema 5.2.6), se decide que el material de transmisión se "coloree". Ello da como resultado una pérdida de fidelidad para el material de programación, pero esto se puede tolerar en algunos casos para ganar más potencia radiada efectiva. Se pueden elegir métodos más elaborados, pero aquí se supone que la $f(t)$ se aplica a un amplificador no lineal con 120% de ganancia en excursiones positivas relativas a las excursiones negativas para lograr el "color". Usando el índice de modulación senoidal equivalente en la parte (b), estime cuánta potencia efectiva de salida adicional se puede ganar usando este método.

✓ **5.2.8** Use un computador digital y un monitor gráfico para calcular y exhibir la magnitud de la FFT usando $N = 128$ en un intervalo $T = 1$ para simular un analizador de espectro. Exhiba las magnitudes en $(0, N/2)$. Esto da como resultado un despliegue con enteros como frecuencia (en Hz) para el eje horizontal, con una resolución de 1 Hz. Como

† Las tasas de potencia de la FCC para transmisores de radiodifusión en AM son para una potencia de portadora promedio (es decir, sin modular).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

aquí sólo son importantes las magnitudes, normalice el despliegue vertical al valor (la magnitud) máximo.

a) Calcule y exhiba la magnitud del espectro de

$$x(t) = [1 + m \cos 8\pi t] \cos 64\pi t$$

para varios valores de m, $0 \le m \le 1$. Registre la magnitud de las bandas laterales (líneas 28 y 36 en su despliegue) y las magnitudes de las portadoras (línea 32) para cada valor de m.

b) Calcule y exhiba la magnitud del espectro de

$$y(t) = [1 + m \cos 8\pi t][\cos 64\pi t + \beta \operatorname{sen} 8\pi t]$$

para $\beta = 0.2$ y varios valores de m. (β representa la frecuencia de modulación incidental presente). Observe que ahora las magnitudes de las bandas laterales son diferentes. Demuestre que se puede obtener el índice m de modulación de AM correcto sumando las magnitudes de las dos bandas laterales y dividiendo por la magnitud de la portadora, siempre que $\beta \le m$. [*Nota*: La modulación de frecuencia incidental también genera algún contenido armónico más alto en el espectro.]

5.2.9 Una señal portadora senoidal con amplitud pico de 80 V se suma a una senoidal de baja frecuencia. Esta suma se aplica a la entrada de un amplificador (clase C) cuya característica de ganancia es

$$e_o(t) = \begin{cases} 50[e_i(t) - 10] & \text{para } e_i(t) > 10 \text{ V}, \\ 0 & \text{para } e_i(t) < 10 \text{ V}. \end{cases}$$

La salida del amplificador se aplica a un filtro de banda angosta entonado a la frecuencia de la portadora (véase Fig. 5.21).

a) Determine el máximo índice de modulación que puede manejar este modulador sin distorsión significativa de la envolvente.

b) Dibuje la señal modulada resultante si la amplitud pico de la senoidal de baja frecuencia es 80 V.

c) La situación de la parte (b) provoca una seria interferencia con otros usuarios que operan en posiciones adyacentes en frecuencia. Explique por qué éste es un problema más serio que la utilización de no linealidades en los mezcladores usados para desplazar frecuencias antes de la transmisión.

5.2.10 Sea $f(t) = \cos \omega_m t$ en la ecuación (5.28) y añada el término $a_3 e_3(t)$ a la ecuación (5.27); luego revise la ecuación (5.29) y derive una expresión para el índice de modulación m.

5.2.11 Una señal senoidalmente modulada DSB-LC $\phi(t)$ [véase Ec. (5.18)] se aplica a un dispositivo de ley cuadrática de modo tal que la tensión de salida $e_o(t)$ es $e_o(t) = [f(t)]^2$. Demuestre que la razón del segundo al primer armónico en $e_o(t)$ es igual a $m/4$.

5.2.12 Para cada una de las siguientes condiciones, encuentre el valor más grande de RC tal que permita a un detector de envolvente seguir la envolvente de la señal senoidalmente modulada de la ecuación (5.18).

a) Suponga que (ω_m/ω_c) es muy pequeña, y por tanto los efectos de ω_c se pueden despreciar.

b) Suponga que (ω_m/ω_c) es pequeña.

[*Sugerencia*: Aproxime cada punto al cual se carga el capacitor por una función impulso.]

✓ **5.2.13** Utilice un computador digital y un monitor gráfico para calcular y exhibir la magnitud de la FFT usando $N = 128$ sobre un intervalo $T = 1$ para simular un analizador de espectro

http://libreria-universitaria.blogspot.com

(véase Problema 5.2.8). (Para una mayor resolución, se pueden duplicar el número de puntos N y el intervalo T, etc., y poner a escala los resultados, aunque a expensas de un mayor tiempo de cálculo.) Como aquí sólo importan las magnitudes relativas, normalice el despliegue vertical al valor máximo de las componentes de frecuencia.

a) Utilice este analizador de espectro para exhibir la magnitud del espectro de la entrada al BPF de la figura 5.21(b); sea la entrada a la no linealidad (diodo)

$$x(t) = 2 \cos 32\pi t + a \cos 2\pi t$$

y sea la característica de salida y entrada de la combinación diodo-resistor

$$y(t) = x(t)u[x(t)].$$

Empiece con $a = 1$.

b) Identifique los términos de DSB-LC en el despliegue, y calcule el índice de modulación m tomando la relación entre la suma de las dos bandas laterales y la portadora.

c) Varíe el valor de $a \leq 1$ para determinar la ecuación de una recta para $m(a)$.

d) Observe las componentes de tercer armónico fuera de la portadora en el espectro DSB-LC y aumente $a > 1$. Observe también el punto más allá del cual el contenido de tercer armónico empieza a aumentar con rapidez para mayores aumentos en a (existirá algún nivel residual como resultado de los métodos de cálculo). Determine el mayor índice de modulación m para el cual las componentes de tercer armónico son $\leq 1\%$ de la componente portadora.

✓ **5.2.14** Suponga que un diodo dado se puede aproximar por medio de un comportamiento cuadrático de un solo lado para pequeñas tensiones y un comportamiento lineal para tensiones mayores. Sea la tensión

$$e(t) = A(1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega_c t$$

que se aplica al diodo, y sea $m = 0.40$. La característica corriente-tensión del diodo es (en mA)

$$i(t) = \begin{cases} 0 & e(t) < 0 \\ 5e^2(t) & 0 < e(t) \leq 1 \text{ V} \\ 10[e(t) - 0.5] & 1 < e(t) \end{cases}$$

a) Utilizando un computador digital, calcule y grafique la relación entre las magnitudes del segundo armónico y las del primer armónico de la señal moduladora presente en $i(t)$ para $0 < A \leq 2$, en incrementos de 0.1 (puede ser útil referirse al resultado del problema 5.2.11).

b) Determine el valor más grande de A para el cual la razón anterior es igual a $m/4$. Explique su respuesta.

c) Determine el valor más pequeño de A para el cual la razón anterior es $\leq 1\%$. Explique su respuesta.

5.3.1 Dibuje un espectro típico de un sistema de multiplexión por división de frecuencia para cada una de las siguientes combinaciones, y mencione algunas ventajas y desventajas de cada sistema.

a) DSB-LC para la modulación tanto de la subportadora como de la portadora principal.

b) DSB-SC para la modulación de la subportadora, DSB-LC para la portadora principal.

c) DSB-SC para la modulación tanto de la subportadora como de la portadora principal.

5.3.2 Un receptor de televisión que utiliza el principio superheterodino tiene una frecuencia de portadora de video IF de 45.75 MHz (y una portadora de sonido a 41.25 MHz). Con la ayuda de la lista de frecuencias del apéndice C, elabore, por números de canal, una tabla de aquellos canales de televisión que podrían ser frecuencias imagen para los canales

http://libreria-universitaria.blogspot.com

deseados 2 a 15. Enumere también las diferencias en frecuencia entre las frecuencias de portadora de vídeo para sus datos.

5.3.3 Las transmisiones de televisión comercial usan dos frecuencias portadoras, una para vídeo y otra para audio. En el apéndice C se presenta una lista de las asignaciones de canal en Estados Unidos. Haga una gráfica de las densidades espectrales que corresponden a las ilustradas en la figura 5.26 para un receptor de televisión superheterodino sintonizado en el canal 6, y su imagen. El recptor LO opera por arriba de la portadora de la estación y la IF de vídeo es de 45.75 MHz. Muestre tanto la portadora de vídeo como la de audio; dibuje las flechas de la portadora de vídeo más altas que las de audio para distinguirlas (las estaciones transmiten más potencia para la portadora de vídeo que para la de audio). Etiquete todos los puntos importantes en el eje de frecuencias.

5.4.1 La señal $f(t) = \cos 2000\pi t$ se utiliza para modular una portadora de 5 kHz. Dibuje las señales en el tiempo y los espectros de línea para los métodos de modulación listados adelante. En cada caso, normalice la señal de manera que la potencia pico de la envolvente (PEP) sea de 1 W a través de un ohm. La PEP de una señal modulada es la potencia promedio que se desarrollaría si se reemplazara por una senoidal con una amplitud pico semejante.

a) DSB-SC

b) DSB-LC, $m = 1$

c) SSB-SC$_-$

d) SSB-SC$_+$

5.4.2 Un transmisor SSB-LC$_+$ se modula con la entrada $f(t) = \cos 2000\pi t$. En notación de valor complejo, la señal de salida se puede escribir como

$$\phi_{\text{SSB-LC}_+}(t) = \mathcal{R}e\{A[1 + mf(t) + jm\hat{f}(t)]e^{j\omega_c t}\}.$$

a) Evalúe $\hat{f}(t)$.

b) ¿Cuál es el máximo valor de m si se utiliza detector de envolvente?

c) Determine el valor numérico de A y m si la potencia sin modular a través de 50 Ω es 500 W, y se encuentra que la potencia promedio aumenta 50% cuando se aplica la modulación.

d) Encuentre la potencia pico de la envolvente (PEP; véase Problema 5.4.1) tanto sin modulación como con modulación de la parte (c).

5.4.3 Un problema potencial en el diseño de receptores de televisión de tipo superheterodino es la posibilidad de que si LO genera segundos armónicos entonces esos armónicos pueden producir una frecuencia diferente que proporcione el contenido de imagen de un canal no deseado en el ancho de banda IF. Para una frecuencia de portadora de vídeo IF de 45.75 MHz en el receptor, determine el canal que interfiere (use las listas de frecuencia del apéndice C) para este tipo de interferencia cuando el receptor se sintoniza en:

a) el canal 5.

b) el canal 6.

5.4.4 Suponga que el primer amplificador IF en el receptor de conversión dual mostrado en la figura 5.27 pasa todas las frecuencias entre $(\omega_1 - W)$ y ω_1. Determine las frecuencias de los osciladores en el receptor, ω_0 y ω_d, necesarias para demodular de manera apropiada las siguientes transmisiones.

a) Una transmisión SSB$_+$ que ocupa el intervalo de frecuencia de ω_c a $(\omega_c + W)$.

b) Una transmisión SSB$_-$ que ocupa el intervalo de frecuencia de $(\omega_c - W)$ a ω_c.

c) ¿Qué sucede si el receptor se fija para recibir la banda lateral superior y la señal recibida es la banda lateral inferior?

http://libreria-universitaria.blogspot.com

5.4.5 En la figura P-5.4.5 se muestra un mezclador de voz (simplificado) para ayudar a la privacía en la comunicación. El ancho de banda de la voz se divide en tres bandas, $(0\text{-}f_1)$, $(f_1\text{-}f_2)$, $(f_2\text{-}f_3)$, por medio de tres filtros pasabanda BPF_1, BPF_2, BPF_3, respectivamente. Se pueden seleccionar las polaridades de los amplificadores de ganancia unitaria inversores/no inversores.

a) Analice la operación del sistema dibujando el espectro de (1) las salidas del primer banco de filtros pasabanda, (2) las entradas al segundo banco de filtros pasabanda y (3) la salida. Suponga una densidad espectral de entrada triangular (pasabajas) que disminuye en forma lineal hacia cero en $f = f_3$. Coloque todos los amplificadores en la posición inversora.

b) Investigue el efecto que puede tener la polaridad del amplificador en la operación del sistema.

c) ¿Se puede utilizar el mismo sistema para reconstruir la señal? Explique.

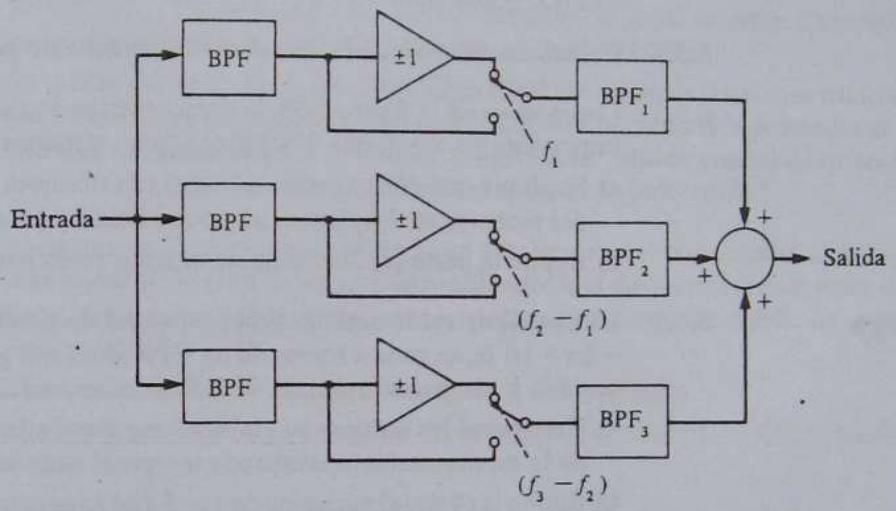


Figura P–5.4.5.

★ **5.4.6** En el sistema de modulación SSB-SC mostrado en la figura 5.31, la señal $f(t)$ se desplaza en fase de manera ideal 90° en todas las frecuencias. Esto es difícil de lograr en la práctica. Demuestre que si se desplaza por $(90 + \alpha)°$, entonces la razón de la magnitud de la banda lateral no deseada a la deseada está dada por $\tan(\alpha/2)$.

★ **5.4.7** a) Encuentre la transformada de Hilbert de $f(t) = a/(a^2 + t^2)$.

b) Determine la magnitud de $z(t) = f(t) + j\hat{f}(t)$.

★ **5.4.8** a) Encuentre la transformada de Hilbert de $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$.

b) Determine la magnitud de $z(t) = f(t) + j\hat{f}(t)$.

c) ¿Qué sucede en la parte (b) si las F_n son pares y de valor real?

d) Verifique sus resultados anteriores usando $f(t) = \cos \omega_0 t$.

✓★ **5.4.9** Utilice una FFT de 32 puntos para calcular y exhibir la transformada de Hilbert, $\hat{f}(t)$, para cada $f(t)$ dada más adelante sobre (0, 1). Normalice sus resultados de tal forma que las magnitudes de $f(t)$ y $\hat{f}(t)$ sean iguales en la parte (a). Así mismo, calcule y exhiba la magnitud de $z(t) = f(t) + j\hat{f}(t)$.

a) $f(t) = \cos 4\pi t$. [*Nota:* Los signos correctos en la exponencial son esenciales para una fase correcta en los resultados.]

b) $f(t)$ es un ciclo de una señal periódica triangular simétrica con amplitud pico unitaria.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

5.5.1 Una señal de banda lateral residual se produce a partir de una entrada $f(t)$ mediante la generación, en primer lugar, de una señal DSB-LC ($m = 0.8$) con una frecuencia portadora $f_c = 10$ kHz y pasando luego esta señal a través de un filtro cuya magnitud de la función de transferencia es

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1 + \cos\left[(\omega - \omega_0)/8000\right] & |\omega - \omega_0| < 8000\pi \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases},$$

donde $\omega_0 = 24\,000\pi$. Encuentre una expresión para la señal VSB resultante, dibuje la densidad espectral y calcule la razón de la potencia pico de la envolvente (véase Problema 5.2.3) para promediar la potencia si

a) $f(t) = \cos 1000\pi t$.
b) $f(t) = \cos 2000\pi t$.
c) $f(t) = \cos 4000\pi t$.

5.5.2 Calcule la envolvente de la señal VSB resultante para cada caso del problema 5.5.1.

5.5.3 Como se ve en la figura 5.38, la característica de sintonía del receptor desempeña un papel importante en el sistema VSB global para sistemas de televisión comercial.

a) Explique qué efecto o efectos esperaría observar en el despliegue de vídeo si la sintonía del receptor se desplazara un poco hacia arriba en frecuencia.
b) Repita la parte (a) si el desplazamiento fuera hacia abajo.

5.6.1 Una señal de ruido con densidad espectral de potencia $S_n(\omega) = 10^{-7}e^{-|\omega|/\alpha}$ W/Hz, donde $\alpha = 2\pi \times 10^7$/s, se pasa a través de un BPF ideal con ganancia unitaria, niveles de resistencia unitaria y un ancho de banda de 200 kHz centrados en 10 MHz.

a) Determine los valores cuadráticos medios de las componentes en fase y en cuadratura de la representación pasabanda temporal dada en la ecuación (5.59).
b) Repita la parte (a) suponiendo que $S_n(\omega)$ es constante (en el valor de la frecuencia central) a lo largo del ancho de banda del filtro.
c) Repita las partes (a) y (b) para un ancho de banda de 2 MHz.

5.6.2 Suponga que las gráficas del ruido galáctico se pueden aproximar, en un intervalo de 0.01 GHz $< f <$ 1 GHz, mediante una línea recta en la figura 4.16 a través de los puntos ($f = 0.01$ GHz, $T = 10^6$ K), ($f = 1$ GHz, $T = 20$ K). Determine una expresión para el ruido rms como función de la frecuencia sobre este intervalo para las condiciones del problema 5.6.1.

5.7.1 Una transmisión DSB-SC y otra SSB-SC se envían a 1 MHz en presencia de ruido aditivo. En cada caso, la señal moduladora está limitada en banda a 3 kHz. La potencia de la señal recibida en cada caso es 0.2 mW. Se supone que el ruido recibido es blanco con una densidad espectral de potencia (bilateral) de 10^{-3} μW/Hz. El receptor consiste en un filtro pasabanda cuyo ancho de banda se acopla al ancho de banda de cada transmisión, seguido por un detector síncrono.

a) Compare las razones señal a ruido en las entradas del detector.
b) Compare las razones señal a ruido en las salidas del detector.
c) Repita la parte (a) si la densidad espectral de potencia (bilateral) fuera $10^3/|f|$ μW/Hz. ¿Es válida aquí la suposición de "ruido blanco"?

5.7.2 Demuestre que, sobre la base estricta de la potencia promedio, la utilización de un detector de envolvente en un sistema DSB-LC da lugar a una relación lineal de $(S/N)_o$ contra $(S/N)_i$. ¿Qué hace a esta relación no lineal en los sistemas de AM comercial?

http://libreria-universitaria.blogspot.com

5.7.3 Compare la relación *S/N*, en una escala relativa a la de DSB-SC, para señales recibidas usando DSB-SC, SSB-SC, DSB-LC con $m = 0.1$, DSB-LC con $m = 0.5$, para cada una de las condiciones indicadas. Suponga modulación senoidal de un solo tono y detección síncrona en todos los casos.

a) Igual potencia promedio.

b) Igual potencia del pico de señal.

5.7.4 La señal DSB-LC

$$\phi(t) = 3 \cos (10{,}000\pi t) + \cos (1000\pi t) \cos (10{,}000\pi t) \text{ V}$$

se presenta con ruido blanco aditivo cuya densidad espectral de potencia (bilateral) es 1 μW/Hz. Esta señal más ruido se pasa a través de un filtro pasabajas ideal con un ancho de banda de 10 kHz. Suponga que todos los niveles de resistencia son de un ohm.

a) Calcule la razón *S/N* en la salida del filtro pasabajas.

b) Se utiliza un detector síncrono para demodular la señal anterior. Calcule la razón *S/N* promedio si la salida del detector se filtra a $0 < f < 1$ kHz.

c) Se utiliza un detector de ley cuadrática ideal (es decir, la señal más ruido se multiplica por sí misma) para demodular la señal. Calcule la razón *S/N* promedio si la salida del detector se filtra a $0 < f < 1$ kHz. [*Sugerencia:* utilice convolución en frecuencia y considere los productos señal-señal, señal-ruido y ruido-ruido.]

5.8.1 Cuando una onda electromagnética llega a través de dos trayectorias distintas, su combinación puede ser la suma o la resta, dependiendo de la diferencia de fase entre ellas. Designe la atenuación relativa de una onda con respecto a la segunda por medio de α, y la diferencia en fase por medio de θ.

a) Desarrolle una expresión para la magnitud del resultado.

b) Grafique el máximo y el mínimo de la expresión anterior, en dB, como función de α, $0 \leq \alpha < 1$.

5.8.2 Suponga que la distancia de un transmisor al receptor es de 200 km y que existe un poderoso reflector a medio camino y a una altura de 2 km (p. ej., un aeroplano). Calcule la distancia que se debe mover la antena (a lo largo de una línea que une el transmisor y el receptor) para cambiar la fase de la señal recibida por 180°. Exprese su respuesta en términos de longitud de onda de la portadora λ.

a) Suponga una tierra plana y una propagación en línea recta a lo largo de la línea visual.

b) Repita la parte (a) usando el modelo esférico de 4/3 para la Tierra.

★ **5.8.3** Cierto transmisor SSB-SC opera a 10 MHz con una potencia efectiva de salida de 100 W. El ancho de banda de la transmisión es de 3 kHz. Suponga que la transmisión se lleva a cabo principalmente por ondas espaciales y que la fórmula de pérdida de trayectoria dada en la sección 4.7.7 es correcta para operaciones nocturnas (es decir, reflexiones fuertes en la ionosfera). (Ignore los posibles factores de ganancia de antena en transmisión y recepción.)

a) Estime el máximo intervalo, en millas, para recepción nocturna en las siguientes condiciones:

(i) La temperatura de ruido del receptor es de 1000 K.

(ii) La temperatura de ruido en la antena está dada por la figura 4.16.

(iii) Se requiere una razón *S/N* mínima de 10 dB (en la salida).

b) ¿Cuál es la mínima diferencia en la longitud de la trayectoria para provocar un desvanecimiento selectivo nulo en la banda de paso?

http://libreria-universitaria.blogspot.com

5.9.1 Se considera la amplitud modulada para cada uno de los siguientes objetivos. Establezca qué tipo de modulación en amplitud recomendaría y las razones para su elección. También proporcione una recomendación para el tipo de detector por utilizar.

a) Un sistema de intercomunicación de voz que use las líneas de alimentación de 60 Hz para conducir la señal modulada.

b) Control remoto (desde la cabina) de los alerones de aterrizaje utilizando la línea de alimentación de 400 Hz ca en un avión.

c) Radiodifusión del clima a usuarios de la marina.

d) Contacto oral bisemanal entre dos hospitales de Estados Unidos y Perú.

e) Transmisión de información del clima por fax (ancho de banda de 3200 Hz, centrados en 2400 Hz) a través de un circuito telefónico estándar de voz (ancho de banda útil de 300 - 3000 Hz).

f) Inyección de una señal de prueba en un plasma caliente y medición de la amplitud y fase de la respuesta.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

PROBLEMAS DE DISEÑO

Problema de diseño

5.1 Diseño de un sistema de intercomunicación de voz

Diseñe un sistema de comunciación que utilice amplitud modulada para intercomunicación de voz en un gran complejo de edificios. Este intercomunicador hará uso de las líneas de alimentación de 60 Hz como medio de transmisión. Suponga que no existen transformadores de potencia dentro del complejo mismo, pero que la potencia para todo el complejo es suministrada por un solo transformador externo. Este transformador no se comparte con otros usuarios en el área. La frecuencia de transmisión elegida para el intercomunicador debe ser lo bastante alta para que el transformador de potencia aterrice la transmisión para todo propósito práctico, evitando así la recepción por parte de otros residentes en el área. Sin embargo, la frecuencia no debe ser tan alta como para que la transmisión se vuelva muy pobre en algunas partes del complejo. Los niveles de potencia transmitida están restringidos también por estas consideraciones, así como por el hecho de que la impedancia de la línea de distribución de potencia es muy baja. Suponga que la densidad espectral de potencia del ruido del ambiente se comporta como $1/|f|$ con la frecuencia (f), y suponga además una temperatura de ruido del receptor de 1000 K. Diseñe un sistema prototipo estableciendo el tipo de modulación y detección elegido, así como su elección para la frecuencia de portadora y ancho de banda. Estime también cuánta potencia cree que necesitará para transmitir. Especifique sus suposiciones.

Problema de diseño

5.2 Diseño de un enlace de datos por satélite

Diseñe un sistema de comunciación utilizando modulación de amplitud para un canal de datos de 1 kHz a un satélite geoestacionario. Suponga que el satélite se encuentra en el plano ecuatorial a una altura de 22 300 millas, y a la longitud de la estación terrena (usted suministrará la latitud). Las especificaciones del diseño son: la frecuencia de portadora debe ubicarse en el intervalo de 1 a 6 GHz (en realidad, existen frecuencias permitidas específicas, pero ignore ese hecho en su estudio preliminar del diseño), la máxima temperatura de ruido del receptor es de 150 K y las áreas efectivas máximas de las antenas son de 1 m^2 para el satélite y de 100 m^2 para la estación terrena. Determine la mejor modulación y el tipo de detector, el ancho de banda y la frecuencia de portadora, así como la mínima estimación de potencia del transmisor necesaria para tener una razón S/N de salida de 6 dB. Especifique sus suposiciones.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

CAPÍTULO

6 MODULACIÓN DE ÁNGULO

Una señal senoidal continua (CW, *continuous wave*) se puede alterar cambiando su amplitud y su ángulo de fase. De la ecuación (5.2),

$$\phi(t) = a(t) \cos [\omega_c t + \gamma(t)] .$$

En el capítulo 5 se mantuvo $\gamma(t)$ constante y se hizo variar $a(t)$ de manera proporcional a $f(t)$. Esto introdujo el concepto de modulación en amplitud. Ahora se investigará el caso en que $a(t) = A$ (constante) y el ángulo de fase $\gamma(t)$ varía en proporción a $f(t)$. Esto introduce el concepto de modulación de ángulo.

6.1 FM Y PM

El ángulo de una señal senoidal se describe en términos de una frecuencia y un ángulo de fase. Sin embargo, antes de proseguir se debe decidir qué significa exactamente frecuencia de una senoidal. Si ésta tiene una velocidad angular constante ω_0, se dice que la frecuencia de la senoidal es de ω_0 radianes por segundo. Sin embargo, ¿qué pasa si la velocidad angular no es constante? Aqui resultará útil volver a la representación fasorial.

La representación fasorial de una senoidal de amplitud constante se muestra en la figura 6.1. El fasor tiene magnitud A y ángulo de fase $\theta(t)$. Si $\theta(t)$ aumenta en forma lineal con el tiempo [es decir, $\theta(t) = \omega_0 t$], se dice que el fasor tiene una velocidad angular constante, o "frecuencia", de ω_0 radianes por segundo. Si la velocidad angular no es constante, aún puede escribirse una relación entre la velocidad angular instantánea $\omega_i(t)$ y $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \int_0^t \omega_i(\tau)\, d\tau + \theta_0 . \tag{6.1}$$

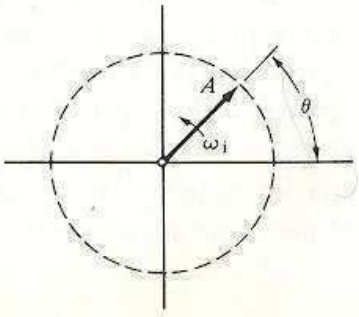


Figura 6.1 Representación fasorial general.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Derivando ambos lados de la ecuación (6.1), se tiene

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta}{dt}. \tag{6.2}$$

Se concluye, por tanto, que la frecuencia instantánea de una señal senoidal es la derivada con respecto al tiempo de su fase. Nótese que esta definición concuerda con nuestro concepto usual de frecuencia cuando la fase es lineal con el tiempo.

EJEMPLO 6.1.1

Determine la frecuencia instantánea de la señal $\phi(t) = A \cos(10\pi t + \pi t^2)$.

Solución

$$\theta(t) = 10\pi t + \pi t^2$$

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta}{dt} = 10\pi + 2\pi t = 2\pi(5 + t)$$

La frecuencia de $\phi(t)$ es de 5 Hz en $t = 0$ y aumenta de modo lineal a razón de 1 Hz por segundo. Por tanto, un defasamiento cuadrático proporciona una dependencia lineal de la frecuencia.

EJERCICIO 6.1.1

Determine la frecuencia instantánea de la siguiente señal en $t = 0$; $\phi(t) = 5 \cos(10t + \text{sen } 5t)$.

RESPUESTA: 15 rad/s.

Ahora, el concepto de frecuencia instantánea permite describir dos posibilidades obvias para la modulación de ángulo (hay muchas más). Si el ángulo de fase $\theta(t)$ varía de forma lineal con la señal de entrada $f(t)$, se puede escribir

$$\theta(t) = \omega_c t + k_p f(t) + \theta_0 \tag{6.3}$$

donde w_c, kp, θ_0 son constantes. Como la fase está relacionada en forma lineal con $f(t)$, este tipo de modulación de ángulo se llama *modulación de fase* (PM, *phase modulation*). La frecuencia instantánea de esta señal de fase modulada es

$$\omega_i = \frac{d\theta}{dt} = \omega_c + k_p \frac{df(t)}{dt}. \tag{6.4}$$

Otra posibilidad es hacer que la *frecuencia* instantánea sea proporcional a la señal de entrada,

$$\omega_i = \omega_c + k_f f(t), \tag{6.5}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

donde ω_c, k_f son constantes. Como la frecuencia está relacionada en forma lineal con $f(t)$, este tipo de modulación de ángulo se llama *modulación de frecuencia* (FM, *frecuency modulation*). El ángulo de fase de esta señal de frecuencia modulada es

$$\theta(t) = \int_0^t \omega_i(\tau)\, d\tau = \omega_c t + \int_0^t k_f f(\tau)\, d\tau + \theta_0 . \tag{6.6}$$

Una comparación de las ecuaciones (6.3) y (6.6) muestra que la PM y la FM están estrechamente relacionadas. En la PM, el ángulo de fase de la señal portadora varía en forma lineal con la señal moduladora. En la FM, el ángulo de fase de la señal portadora varía de manera lineal con la integral de la señal moduladora. Por tanto, si la señal moduladora $f(t)$ primero se integra y luego se usa para modular la fase de una portadora, se obtendrá una señal de frecuencia modulada. La figura 6.2 es una ilustración de las señales FM y PM para una $f(t)$ dada.

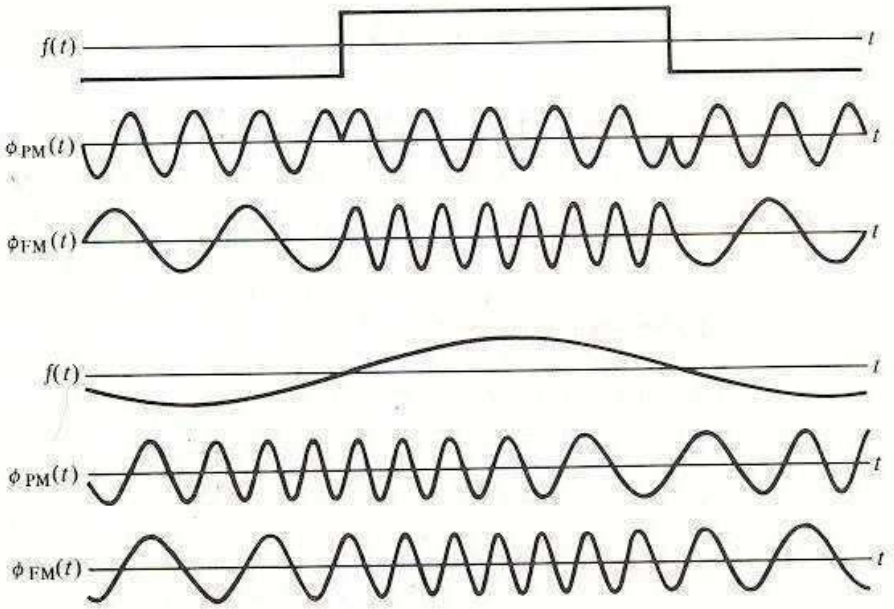


Figura 6.2 Ejemplos de modulación de frecuencia y de fase.

Como las modulaciones de frecuencia y de fase están muy relacionadas, cualquier variación de fase producirá necesariamente una variación de la frecuencia y viceversa. La diferencia esencial entre FM y PM es la naturaleza de la dependencia en la señal moduladora. Aunque la FM se examinará con más detalle, el análisis es válido también para PM, con sólo algunas pequeñas diferencias que se apuntan en una sección posterior.

En el caso de las señales AM, siempre hubo una correspondencia uno a uno entre la señal modulada y la moduladora. Cuando rige esta condición, se dice que la modulación es *lineal*.† Sin embargo, para PM y FM esto no es siempre cierto, como puede verse en el razonamiento siguiente.

† De manera más formal, si $f(t)$ es la señal moduladora y $\phi(t)$ la modulada, la modulación es lineal si $d\phi/df$ no depende de $f(t)$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En general, una señal PM (o FM con las modificaciones adecuadas) se puede representar por (nótese la vuelta a la notación compleja)†

$$\phi_{\text{PM}}(t) = Ae^{j\theta(t)} = Ae^{j(\omega_c t+\theta_0)}e^{jk_p f(t)}. \tag{6.7}$$

Usando una expansión en serie del factor de modulación exponencial de la ecuación (6.7), se tiene

$$\phi_{\text{PM}}(t) = Ae^{j(\omega_c t+\theta_0)}\left[1 + jk_p f(t) - \frac{1}{2!}k_p^2 f^2(t) - j\frac{1}{3!}k_p^3 f^3(t) + \cdots\right]. \tag{6.8}$$

De este resultado se concluye que, a menos que $|k_p f(t)| \ll 1$, la modulación de ángulo —en este caso PM— no es lineal. Por tanto, puede esperarse que, en general, las bandas laterales que aparecen en la modulación de ángulo no obedezcan el principio de superposición. Debera hacerse un análisis de los espectros, etc., eligiendo una señal en particular. A menos que se especifique otra cosa, la señal elegida se confrontará con una señal senoidal.

6.2 FM DE BANDA ANGOSTA

La condición lineal de la ecuación (6.8) sustenta una modulación lineal de la FM, lo que parece ser un buen punto para empezar. Con el fin de fundamentar el caso de la modulación no lineal, se usará una señal moduladora senoidal. Para ser específicos, sea

$$f(t) = a\cos\omega_m t. \tag{6.9}$$

Como se trata de FM [véase Ec. (6.5)]

$$\begin{aligned}\omega_i &= \omega_c + k_f f(t)\\ &= \omega_c + ak_f\cos\omega_m t,\end{aligned} \tag{6.10}$$

donde k_f es la constante de modulación de frecuencia; las unidades típicas están en radianes por segundo por volt. Definiendo una nueva constante llamada *desviación de frecuencia pico*,

$$\Delta\omega = ak_f, \tag{6.11}$$

se puede reescribir la ecuación (6.10) como

$$\omega_i = \omega_c + \Delta\omega\cos\omega_m t. \tag{6.12}$$

La fase de esta señal FM es [véase Ec. (6.6)] (haciendo $\theta_0 = 0$ por conveniencia)

$$\theta(t) = \omega_c t + \frac{\Delta\omega}{\omega_m}\operatorname{sen}\omega_m t = \omega_c t + \beta\operatorname{sen}\omega_m t, \tag{6.13}$$

† Aunque éstas se expresan en términos de señales PM, las conclusiones son aplicables también a FM sustituyendo

$$k_f\int_0^t f(\tau)\,d\tau \quad \text{para} \quad k_p f(t).$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

donde

$$\beta = \Delta\omega/\omega_m \tag{6.14}$$

es una relación adimensional entre la desviación de frecuencia pico y la frecuencia moduladora.

La señal FM resultante es

$$\begin{aligned}\phi_{FM}(t) &= \mathcal{R}e\{Ae^{j\theta(t)}\} \\ &= \mathcal{R}e\{Ae^{j\omega_c t}e^{j\beta \operatorname{sen}\omega_m t}\}.\end{aligned} \tag{6.15}$$

Nótese que la ecuación (6.15) se puede reescribir como

$$\phi_{FM}(t) = A\cos(\omega_c t + \beta \operatorname{sen}\omega_m t). \tag{6.16}$$

De manera alterna, se puede usar una identidad para la parte real del producto (véase Ap. A) para reescribir la ecuación (6.16) como

$$\phi_{FM}(t) = A\cos\omega_c t\cos(\beta \operatorname{sen}\omega_m t) - A\operatorname{sen}\omega_c t\operatorname{sen}(\beta \operatorname{sen}\omega_m t). \tag{6.17}$$

Es obvio que habrá que aproximar este resultado o buscar algún método alterno. Para valores pequeños de β, se puede escribir

$$\cos(\beta \operatorname{sen}\omega_m t) \approx 1, \tag{6.18}$$

$$\operatorname{sen}(\beta \operatorname{sen}\omega_m t) \approx \beta \operatorname{sen}\omega_m t. \tag{6.19}$$

La condición en que β es lo bastante pequeño para estas aproximaciones es la condición para *FM de banda angosta* (NBFM, *narrowband FM*). Es usual que se tome un valor de $\beta < 0.2$ para satisfacer esta condición. Usando las ecuaciones (6.18) y (6.19) en la ecuación (6.17), se obtiene una solución aproximada para β pequeña:

$$\phi_{NBFM}(t) = A\cos\omega_c t - \beta A\operatorname{sen}\omega_m t\operatorname{sen}\omega_c t. \tag{6.20}$$

Resulta instructivo comparar esta ecuación con una expresión equivalente para una señal AM:

$$\phi_{AM}(t) = A\cos\omega_c t + mA\cos\omega_m t\cos\omega_c t. \tag{6.21}$$

Como lo sugiere esta comparación, β se llama *índice de modulación* de la señal FM.

Aunque las señales FM de banda angosta y AM tienen similitudes, constituyen métodos de modulación claramente diferentes. Las similitudes y diferencias pueden evidenciarse tomando sus representaciones fasoriales. Expandiendo la ecuación (6.20) [o la Ec. (6.15)] en forma fasorial, se tiene

$$\begin{aligned}\phi_{NBFM}(t) &= \mathcal{R}e\{Ae^{j\omega_c t}(1 + j\beta \operatorname{sen}\omega_m t)\} \\ &= \mathcal{R}e\{Ae^{j\omega_c t}(1 + \tfrac{1}{2}\beta e^{j\omega_m t} - \tfrac{1}{2}\beta e^{-j\omega_m t})\}.\end{aligned} \tag{6.22}$$

Así mismo, la ecuación (6.21) se puede escribir en forma fasorial como

$$\begin{aligned}\phi_{AM}(t) &= \mathcal{R}e\{Ae^{j\omega_c t}(1 + m\cos\omega_m t)\} \\ &= \mathcal{R}e\{Ae^{j\omega_c t}(1 + \tfrac{1}{2}me^{j\omega_m t} + \tfrac{1}{2}me^{-j\omega_m t})\}.\end{aligned} \tag{6.23}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Tomando como referencia el término $Ae^{j\omega_c t}$ (es decir, suprimiendo la rotación continua ω_c), la representación fasorial de cada una de estas señales se muestra en la figura 6.3. La señal resultante puede hallarse rotando el diagrama fasorial completo a razón de ω_c rad/s y tomando después la proyección de la resultante sobre el eje real.

En la figura 6.3 se hacen evidentes las diferencias entre las ecuaciones (6.22) y (6.23). En la señal AM, la modulación se agrega en fase con la portadora, mientras que en la NBFM se agrega en cuadratura. La NBFM da origen a una variación de fase con muy pequeño cambio de amplitud, mientras que la AM proporciona variación de amplitud sin desviación de fase.

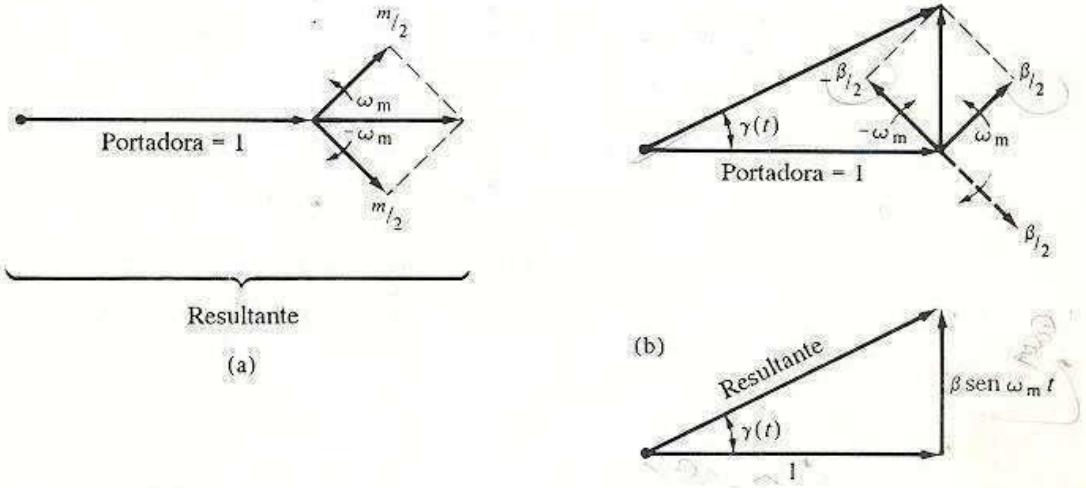


Figura 6.3 Representación fasorial de (a) AM y (b) NBFM.

Es instructivo determinar los límites de β a partir de los resultados de los diagramas fasoriales de la figura 6.3(b); el ángulo de fase con la portadora es

$$\gamma(t) = \tan^{-1}(\beta \operatorname{sen} \omega_m t) . \tag{6.24}$$

La desviación instantánea en frecuencia respecto a la frecuencia de la portadora debe ser igual a $\Delta\omega \cos \omega_m t = \beta\omega_m \cos \omega_m t$ y se halla derivando el ángulo de fase, o

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\beta\omega_m \cos \omega_m t}{1 + \beta^2 \operatorname{sen}^2 \omega_m t} \approx \beta\omega_m \cos \omega_m t, \quad \text{si} \quad \beta^2 \operatorname{sen}^2 \omega_m t \ll 1 . \tag{6.25}$$

La amplitud del fasor resultante debe ser una constante (A); verificando en el diagrama fasorial, se halla

$$A\sqrt{1 + \beta^2 \operatorname{sen}^2 \omega_m t} \approx A \quad \text{si} \quad \beta^2 \operatorname{sen}^2 \omega_m t \ll 1 . \tag{6.26}$$

Como $\operatorname{sen}^2 \omega_m t \leq 1$, estas aproximaciones son válidas si $\beta^2 < 1$. Eligiendo $\beta^2 < 0.1$, se halla que $\beta < 1/\sqrt{10} = 0.316$ es una cota razonable para la aproximación de banda angosta. En la práctica pueden usarse valores hasta de 0.50 si la amplitud modulada resultante se elimina limitando la amplitud de la señal de ángulo modulado.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La suma de la modulación en cuadratura con la portadora en la NBFM, a diferencia de la suma en fase en AM, sugieren un método de generación de NBFM o NBPM usando desfasadores y moduladores balanceados, como se muestra en la figura 6.4. Éste método se usa comúnmente en la generación de señales NBFM y NBPM. Aunque se ha examinado el caso de FM, el de PM se sigue de la misma forma.

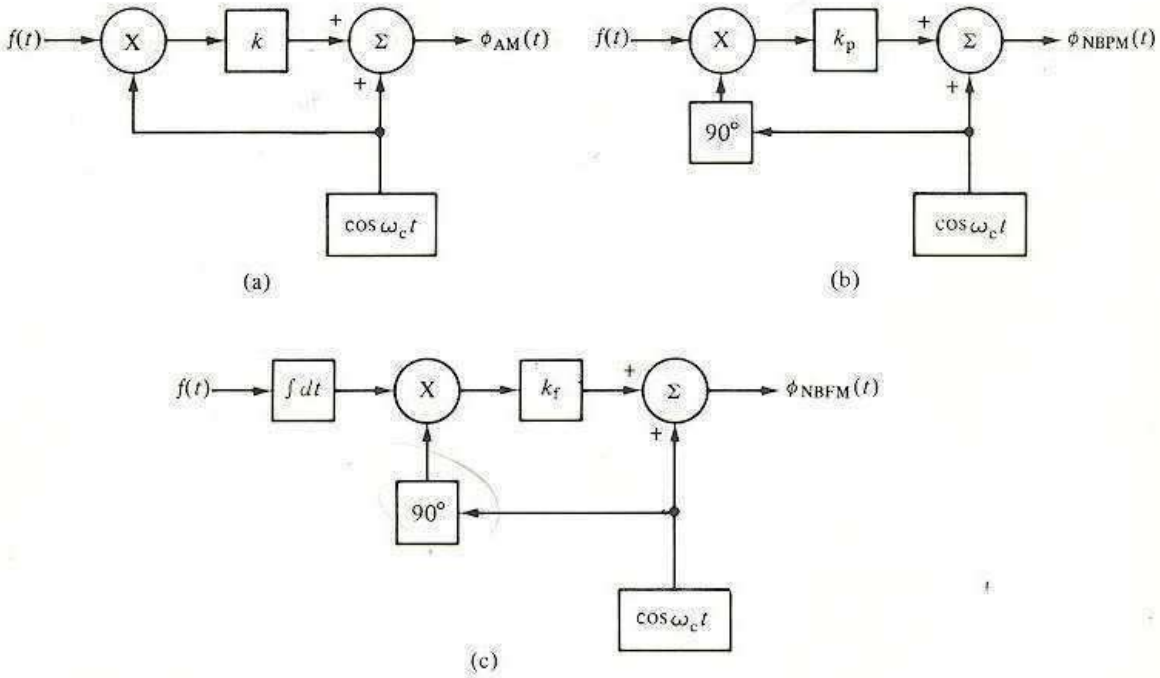


Figura 6.4 Generación de señales con moduladores balanceados: (a) AM; (b) NBPM; (c) NBFM.

En resumen, la FM (y la PM) de banda angosta, igual que la AM, es un ejemplo de modulación lineal. Una diferencia importante es que, mientras que en AM la modulación se agrega en fase con la portadora, en NBFM se agrega en cuadratura. Ambos sistemas requieren un ancho de banda de $W = 2\omega_m$ para transmitir una señal de ω_m rad/s de ancho espectral. El índice de modulación en FM es $\beta = \Delta\omega/\omega_m$ y, para NBFM, un criterio útil es $\beta < 0.2$.

EJERCICIO 6.2.1

Calcule la máxima amplitud porcentual (pico), la fase y el error de frecuencia en que se incurre al usar la aproximación fasorial a la FM de banda angosta para el caso senoidal en que (a) $\beta = 0.20$; (b) $\beta = 0.50$.

RESPUESTA: (a) 2.0%, ~~1.3%~~ 11.3%, 3.8%; (b) 11.8%, 7.3%, 20.0%.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJEMPLO 6.2.1

Una comparación entre las representaciones fasoriales de la figura 6.3 da pie a investigar el uso simultáneo de la modulación de amplitud y la de frecuencia de banda angosta, para la posible eliminación de una banda lateral. Analice el posible uso de esta técnica, para modulación senoidal, en la generación de señales SSB-LC.

Solución Para la modulación simultánea de amplitud y frecuencia se tiene

$$\phi(t) = \mathcal{R}e\{A(1 + m \cos \omega_m t) \exp [j(\omega_c t + \beta \operatorname{sen} \omega_m t)]\},$$

donde m y β son los índices de modulación de amplitud y frecuencia, respectivamente. Para la condición NBFM, $\beta \ll 1$ tal que

$$\exp (j\beta \operatorname{sen} \omega_m t) \approx 1 + j\beta \operatorname{sen} \omega_m t .$$

En estas condiciones, se tiene

$$\phi(t) \approx \mathcal{R}e\{A(1 + m \cos \omega_m t)(1 + j\beta \operatorname{sen} \omega_m t) \exp (j\omega_c t)\},$$

que se puede reescribir como

$$\phi(t) \approx \mathcal{R}e\left\{A\left(1 + \frac{m}{2}e^{j\omega_m t} + \frac{m}{2}e^{-j\omega_m t}\right)\left(1 + \frac{\beta}{2}e^{j\omega_m t} - \frac{\beta}{2}e^{-j\omega_m t}\right)e^{j\omega_c t}\right\}.$$

Si $\beta \ll 1$ y $m \ll 1$, el término de segundo orden $(m\beta)$ en la aproximación es muy pequeño. Si se ignoran estos efectos de segundo orden, se tiene

$$\phi(t) \approx \mathcal{R}e\left\{A\left[1 + \left(\frac{m + \beta}{2}\right)e^{j\omega_m t} + \left(\frac{m - \beta}{2}\right)e^{-j\omega_m t}\right]e^{j\omega_c t}\right\}.$$

Nótese que, a diferencia de AM, las dos bandas laterales pueden tener magnitudes diferentes si además está presente un poco de FM. Si ahora se hace $\beta = m$, se obtiene la señal (aproximada) SSB-LC

$$\phi(t) \approx \mathcal{R}e\{A[1 + me^{j\omega_m t}]e^{j\omega_c t}\},$$

o

$$\phi(t) \approx A \cos \omega_c t + mA \cos (\omega_c + \omega_m)t .$$

EJERCICIO 6.2.2

En ocasiones, cuando se desea AM, puede aparecer una combinación de AM y FM debido a un modulador imperfecto. En la pantalla de un analizador de espectro, la combinación de AM y NBFM aparece como dos bandas laterales de amplitud desigual. Esto se produce porque las bandas laterales AM tienen la misma fase pero las de NBFM

http://libreria-universitaria.blogspot.com

tienen fase opuesta. Comó lo que se busca es modulación AM, se supone que la FM incidental introducida es el menor de los dos efectos.

Como ejemplo, suponga que la medición de un analizador de espectro de la salida de un modulador que usa modulación senoidal indica una línea portadora de magnitud unitaria, una banda lateral superior de magnitud 0.45 y una inferior de magnitud 0.35. Calcule los porcentajes de AM y FM presentes usando el resultado del ejemplo 6.2.1.

RESPUESTA: 80%; 10%.

6.3 FM DE BANDA ANCHA

Hasta aquí, la obtención de la densidad espectral $F(\omega)$ se había basado, en esencia, en el uso de la transformada de Fourier de una señal general $f(t)$. No obstante, si el valor de β no es pequeño, la transformada de Fourier de una señal general de ángulo modulado no puede evaluarse. En casos específicos, la integración puede efectuarse en forma numérica o en términos de valores tabulados. Por tanto, antes de restringir el análisis a unas cuantas señales de señal moduladora, se intentará establecer algunas cotas a la densidad espectral.

Una medida de la conversión de amplitud pico a frecuencia es la desviación de frecuencia pico, $\Delta\omega$. Ésta representa la cantidad máxima en que ω_i se desvía del valor "promedio" de ω_c. En la figura 6.5 se muestra lo anterior para dos casos diferentes.

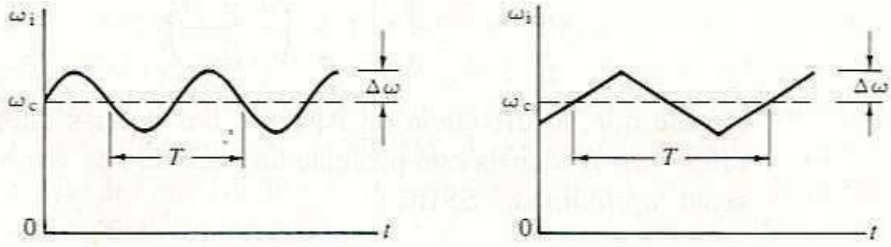


Figura 6.5 Definición de desviación de frecuencia máxima (pico).

Hay dos mecanismos identificables en la descripción del espectro de una señal FM. El primero se debe a la tasa de cambio de la señal moduladora, es decir, a su contenido de frecuencia. El segundo, peculiar de la FM, es la proporcionalidad entre la amplitud de la señal moduladora y la frecuencia instantánea de la señal FM. La frecuencia instantánea sigue a la amplitud de la señal moduladora, pero esto no implica por fuerza que la densidad espectral siga el mismo esquema, Los conceptos de frecuencia instantánea y de frecuencia como se usa en la transformada de Fourier no son idénticos.

En la aproximación de NBFM, se ve que el segundo efecto se despreció en favor del primero, dado que $\Delta\omega \ll \omega_m$. De hecho, ahora se ve que en el caso senoidal el índice de

http://libreria-universitaria.blogspot.com

modulación $\beta = \Delta\omega/\omega_m$ da una medida relativa de la importancia de estos dos efectos en FM.

La idea de un índice de modulación puede extenderse a señales más generales. Para una señal pulsante en general, puede definirse una desviación de frecuencia pico $\Delta\omega$ y una duración T; si la señal es periódica, entonces T es el periodo. El producto $\beta_1 = (\Delta\omega/2\pi)T$ es un número adimensional, llamado *índice de dispersión*, que toma el lugar del índice de modulación para señales de modulación más generales. Es fácil ver que $\beta_1 \to \beta$ para modulación senoidal. Para índices de dispersión muy bajos, el contenido espectral de una señal moduladora controla de manera principal la densidad espectral FM. Para índices de dispersión muy altos, la magnitud de la densidad espectral está controlada principalmente por la conversión de amplitud a frecuencia. Los efectos de la fase no son tan predecibles porque dependen de la fase relativa entre señales. Lo que ocurre para valores intermedios se examinará con base en cada tipo de señal.

Volviendo al caso senoidal de FM, sea $f(t) = a \cos \omega_m t$ y $\omega_i = \omega_c + \Delta\omega \cos \omega_m t$. El contenido espectral de la señal moduladora se halla en ω_m rad/s. La conversión de amplitud pico a frecuencia es de $\Delta\omega$ rad/s. Entonces, para valores muy bajos de $\beta = \Delta\omega/\omega_m$ (esto es, $\Delta\omega \ll \omega_m$), el espectro será de banda limitada a $2\omega_m$. Por otra parte, para valores muy altos de $\beta = \Delta\omega/\omega_m$ (esto es, $\Delta\omega \gg \omega_m$) predominará la conversión amplitud a frecuencia y puede esperarse que el ancho de banda sea del orden de $2\Delta\omega$. Por tanto, existen ciertas cotas un tanto intuitivas para el ancho de banda en los dos extremos.

6.3.1 ★ Aproximaciones generales

Podemos hacer otro comentario intuitivo general antes de restringirnos a señales específicas. Si se hace $\beta_1 \to \infty$ ($\beta \to \infty$ para el caso senoidal), podría esperarse el completo predominio de la conversión amplitud a frecuencia. Del concepto de densidad espectral, podría esperarse que las magnitudes espectrales sean proporcionales a la fracción del tiempo usado en cada frecuencia.† Por ejemplo, sea $f(t) = a \cos \omega_m t$ de manera que la desviación de frecuencia alrededor de la portadora, $\omega_i' = \omega_i - \omega_c$, es

$$\omega_i' = \Delta\omega \cos \omega_m t, \tag{6.27}$$

o

$$t = \frac{1}{\omega_m} \cos^{-1}\left(\frac{\omega_i'}{\Delta\omega}\right) \quad \text{para } |\omega_i'| \leq \Delta\omega. \tag{6.28}$$

La cantidad fraccional de tiempo por unidad de frecuencia es ‡

$$\frac{1}{T}\left|\frac{dt}{d\omega_i'}\right| = \frac{1/(2\pi)}{\Delta\omega\sqrt{1 - (\omega_i'/\Delta\omega)^2}} \quad \text{para } |\omega_i'| \leq \Delta\omega. \tag{6.29}$$

† Esto se denomina a veces teorema de Woodward.

‡ El lector familiarizado con probabilidad reconocerá en esto la función densidad de probabilidad de la señal moduladora para fase uniforme.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Por tanto, cuando $\beta_1 \to \infty$ (en este caso $\beta \to \infty$) el peso de la magnitud de la densidad espectral de la señal FM se aproximará a la forma mostrada en la figura 6.6 entre los límites de banda de $2\Delta\omega$. Nótese que esto se basa en una señal de T unidades de longitud; para el caso periódico, la densidad espectral estará compuesta de impulsos cuyo peso se determina a partir de esta curva. Los efectos de la fase pueden hacer que los componentes individuales varíen un poco de esta aproximación. Tal resultado proporciona la distribución relativa de frecuencia; los factores de escala correctos se pueden hallar haciendo que la integral de este resultado sea igual a la potencia promedio en la señal modulada.

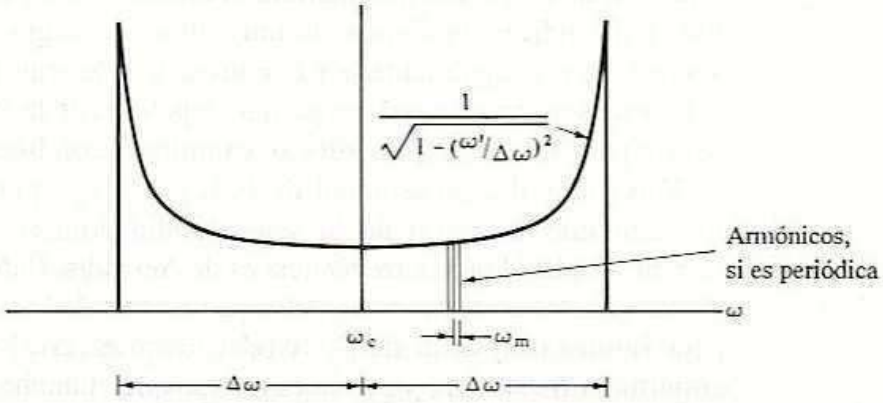


Figura 6.6 Aproximación a la magnitud de la densidad espectral de FM si $\beta \to \infty$, caso senoidal.

EJEMPLO 6.3.1

Una señal senoidal con frecuencia de ω_c rad/s se modula en frecuencia por la señal en diente de sierra de la figura 6.7(a). La desviación de frecuencia pico a cada lado de la portadora es de $\Delta\omega$ rad/s, como se muestra en la figura 6.7(b). Describa la magnitud de la densidad espectral aproximada cuando el índice de dispersión del sistema se hace muy grande.†

Solución Cuando $\beta_1 \to \infty$, el ancho de banda tiende a $2\Delta\omega$ y el espectro de magnitud se aproxima por medio de

$$\omega_i' = \frac{\Delta\omega}{T/2} t, \qquad -T/2 < t < T/2,$$

$$t = \frac{T}{2\Delta\omega}\omega_i',$$

$$\frac{1}{T}\left|\frac{dt}{d\omega_i'}\right| = \frac{1}{2\Delta\omega}, \qquad -\Delta\omega < \omega_i' < \Delta\omega.$$

† Ésta es una versión simplificada del tipo de modulación que usan los murciélagos (a frecuencias ultrasónicas) para volar y localizar los blancos. También se usa para el radar.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

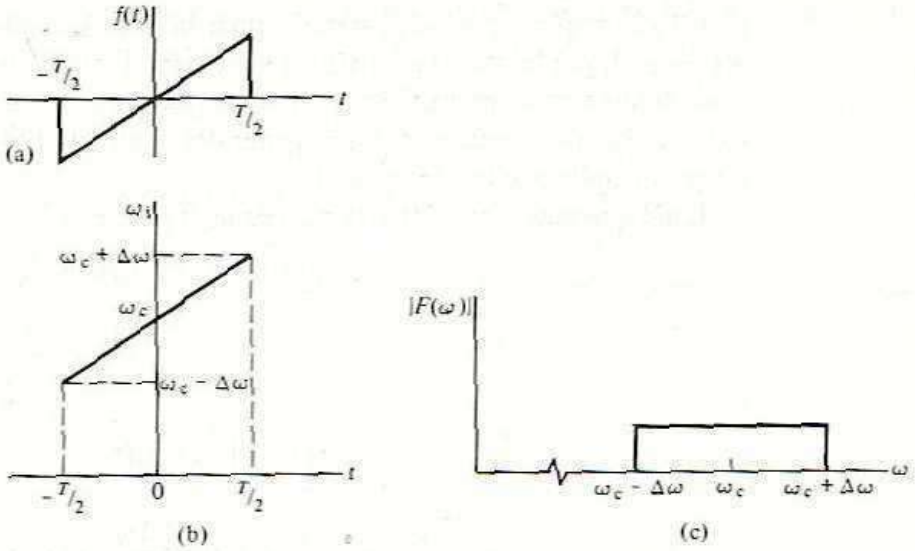


Figura 6.7 Ejemplo de densidad espectral de FM cuando $\beta_1 \to \infty$.

Esto se muestra en la figura 6.7(c). Si la señal moduladora se repitiera en forma periódica, aparecería una serie de impulsos espaciados ω_0 unidades. En la figura 6.8 se muestra un ejemplo numérico del cálculo del espectro de magnitud para $\beta_1 = 50$.

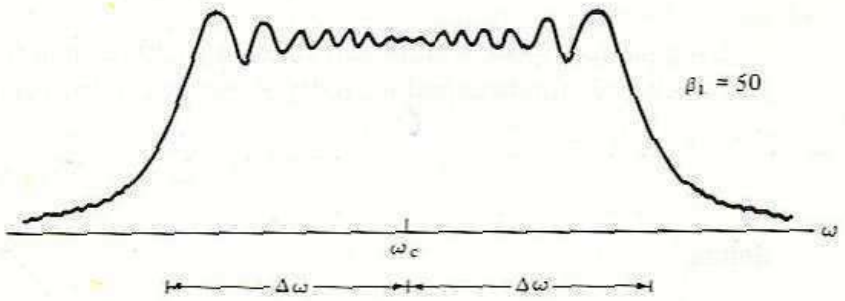


Figura 6.8 Espectro de magnitud calculado para la FM analizada en el ejemplo 6.3.1.

EJERCICIO 6.3.1

Una señal senoidal con una frecuencia de ω_c rad/s es modulada en frecuencia por una señal cuadrada simétrica. La desviación de frecuencia pico es $\Delta\omega$. Describa la magnitud de la densidad espectral aproximada si el índice de dispersión se hace muy grande.

RESPUESTA: $\frac{1}{2}\delta(\omega - \omega_c + \Delta\omega) + \frac{1}{2}\delta(\omega - \omega_c - \Delta\omega)$.

6.3.2 El caso senoidal

Habiendo obtenido algunos enfoques intuitivos sobre los mecanismos de la FM, ahora se intentará conocerlos mejor por medio de la transformada de Fourier. Sin embargo,

http://libreria-universitaria.blogspot.com

como ya se apuntó, no es posible evaluar la transformada de Fourier de una señal FM en general, por lo que el análisis se restringirá a senoidales puras. Aunque éstas son de poco interés en comunicaciones, esperamos que los resultados del análisis permitan extraer algunas conclusiones más generales. Como la FM es una modulación no lineal, no puede aplicarse la superposición.

Igual que antes, se elige $f(t) = a \cos \omega_m t$; para FM,†

$$\begin{aligned} \omega_i(t) &= \omega_c + ak_f \cos \omega_m t \\ &= \omega_c + \Delta\omega \cos \omega_m t , \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \int_0^t \omega_i(\tau)\, d\tau \\ &= \omega_c t + \frac{\Delta\omega}{\omega_m} \operatorname{sen} \omega_m t \\ &= \omega_c t + \beta \operatorname{sen} \omega_m t . \end{aligned}$$

Usando la notación compleja,

$$\begin{aligned} \phi_{FM}(t) &= \mathcal{R}e\{Ae^{j\theta(t)}\} \\ &= \mathcal{R}e\{Ae^{j\omega_c t} e^{j\beta \operatorname{sen}\omega_m t}\} . \end{aligned} \tag{6.30}$$

El segundo exponencial de la ecuación (6.30) es una función periódica del tiempo con frecuencia fundamental ω_m rad/s. Puede expandirse en una serie de Fourier,

$$e^{j\beta \operatorname{sen}\omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_m t} , \tag{6.31}$$

donde

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j\beta \operatorname{sen}\omega_m t} e^{-jn\omega_m t}\, dt . \tag{6.32}$$

Haciendo un cambio de variable $\xi = \omega_m t = (2\pi/T)t$, se obtiene

$$F_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \operatorname{sen}\xi - n\xi)}\, d\xi . \tag{6.33}$$

Esta integral puede evaluarse numéricamente en términos de los parámetros n y β, y como aparece en muchos problemas físicos, se ha tabulado en forma extensa. Es una función de n y β, denotada por $J_n(\beta)$, y se llama función de Bessel de primera clase (indicada por "J"), de orden n y argumento β.‡ En este caso, n es un entero (negativo o positivo) y β es una variable continua (sólo valores positivos). Algunas de estas funciones se encuentran graficadas en la figura 6.9. Aunque sin entrar en el análisis

† Si el límite inferior de la integral no es cero, se introduce un término constante; esto no altera el análisis y se omitirá por conveniencia.

‡ En el apéndice G aparece una tabla de funciones de Bessel.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

detallado de las características de las funciones de Bessel, habrá que hacer uso de las siguientes propiedades:

1. $J_n(\beta)$ son de valor real,
2. $J_n(\beta) = J_{-n}(\beta)$, para n par,
3. $J_n(\beta) = -J_{-n}(\beta)$, para n impar, (6.34)
4. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$.

Con estos resultados, la ecuación (6.31) puede reescribirse como

$$e^{j\beta \operatorname{sen}\omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{jn\omega_m t}, \tag{6.35}$$

y la ecuación (6.30) se convierte en

$$\phi_{FM}(t) = \mathcal{R}e\left\{Ae^{j\omega_c t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{jn\omega_m t}\right\}, \tag{6.36}$$

$$\phi_{FM}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_c + n\omega_m)t. \tag{6.37}$$

Si se desea, esto puede expandirse a partir de las propiedades (2) y (3) de la ecuación (6.34).

De estos resultados, se hace evidente que una señal FM con modulación senoidal, a diferencia de la AM, tiene un número infinito de bandas laterales. Sin embargo, las magnitudes de las componentes espectrales de las bandas laterales de orden superior se hacen despreciables y, para todo propósito práctico, la potencia está contenida en un ancho de banda finito. En la figura 6.10 aparecen gráficas de las magnitudes de las bandas laterales para diferentes valores de β. Nótese que β puede modificarse al variar $\Delta\omega$ o bien ω_m, como se demuestra en la figura 6.10.

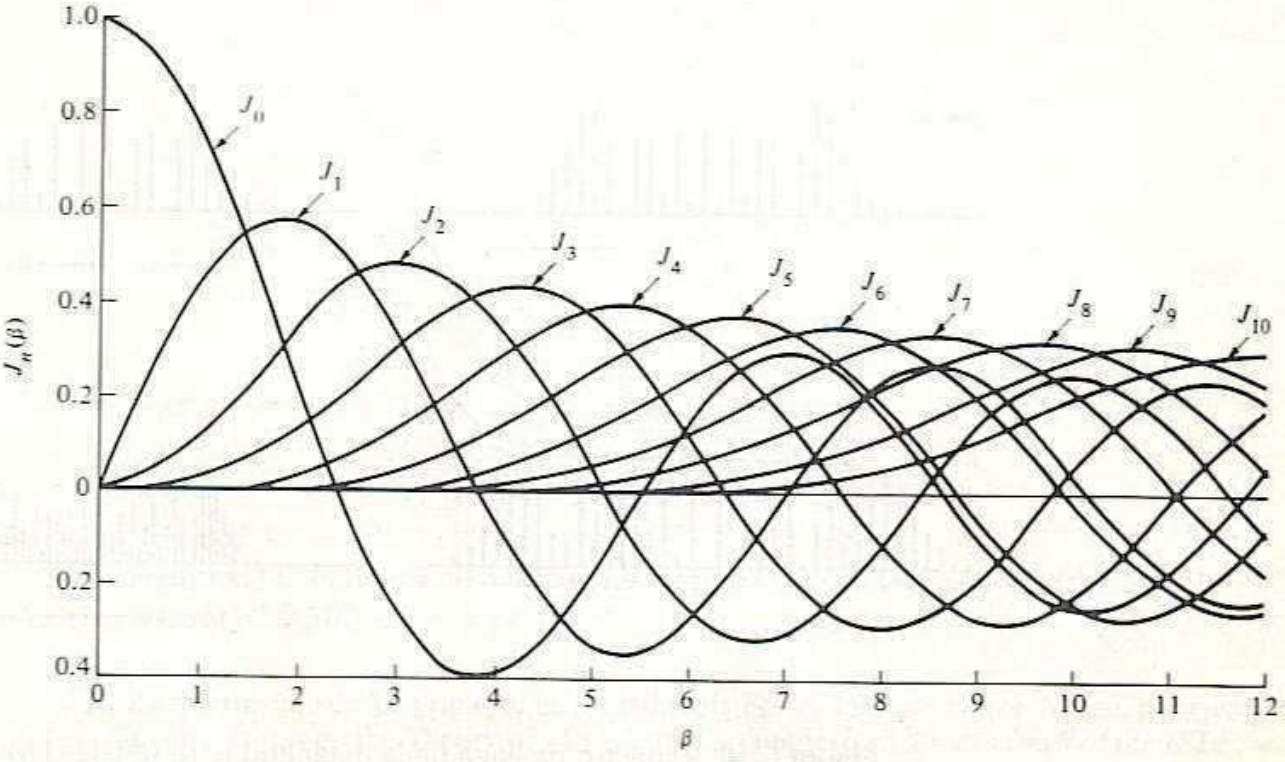


Figura 6.9 Gráfica de la función de Bessel de primera clase, $J_n(\beta)$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

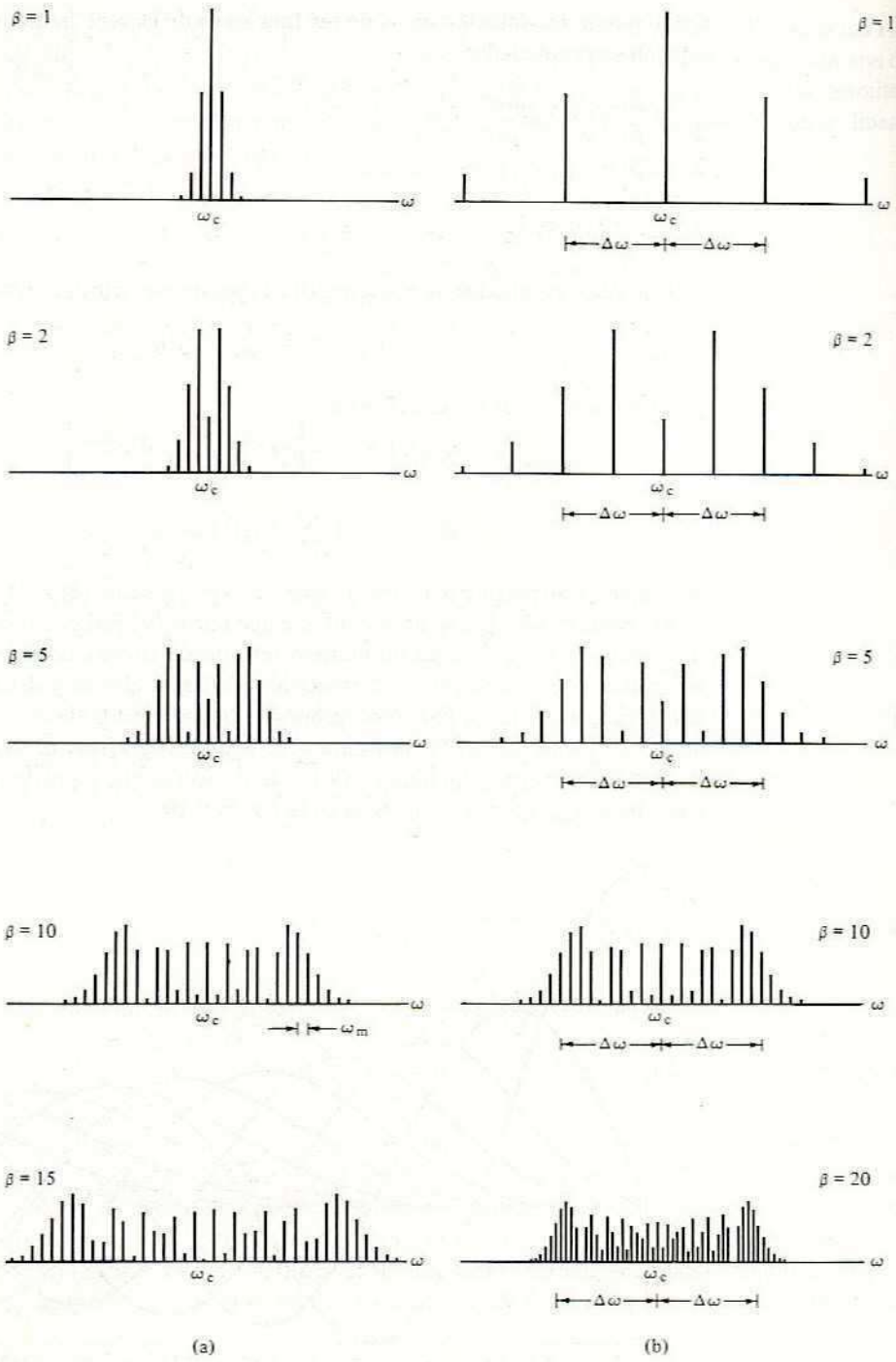


Figura 6.10 Espectro de línea de la magnitud para señales FM con modulación senoidal: (a) para ω_m constante; (b) para $\Delta\omega$ constante.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

¿Cuántas bandas laterales son importantes para la transmisión FM de una señal? Esto dependerá del propósito y de los requisitos de fidelidad. Una regla común es que si una banda lateral tiene magnitud igual o mayor que el 1% de la de la portadora no modulada, entonces es *significativa*, es decir, si

$$|J_n(\beta)| \geq 0.01\,. \tag{6.38}$$

El número real de bandas laterales significativas para diferentes valores de β pueden hallarse en gráficas o en tablas de funciones de Bessel. En las gráficas de la figura 6.10 puede verse que los $J_n(\beta)$ disminuyen con rapidez para $n > \beta$, en particular al crecer β. En la figura 6.11 se muestra una gráfica de la razón n/β para $|J_n(\beta)| \geq 0.01$, razón que se aproxima a uno al hacerse β muy grande. Entonces, el ancho de banda para β muy grande puede aproximarse tomando la última banda lateral significativa en $n = \beta$, de manera que

$$W = 2n\omega_m \approx 2\beta\omega_m = 2\frac{\Delta\omega}{\omega_m}\omega_m\,,$$

o

$$W \approx 2\Delta\omega \quad \text{para } \beta \text{ grande.} \tag{6.39}$$

Para valores muy pequeños de β, las únicas funciones de Bessel de magnitud significativa (véase Fig. 6.9) son $J_0(\beta)$ y $J_1(\beta)$. Por tanto, el ancho de banda para el caso de banda angosta (verificando el resultado anterior) es

$$W \approx 2\omega_m \quad \text{para } \beta \text{ pequeña.} \tag{6.40}$$

Teniendo ya cotas para los casos límite, sería conveniente obtener una regla más general que tuviera en cuenta casos intermedios y, de ser posible, alcanzar los casos límite en una forma continua. Tal regla fue propuesta por J.R. Carson:†

$$W \approx 2(\Delta\omega + \omega_m)\,, \tag{6.41a}$$

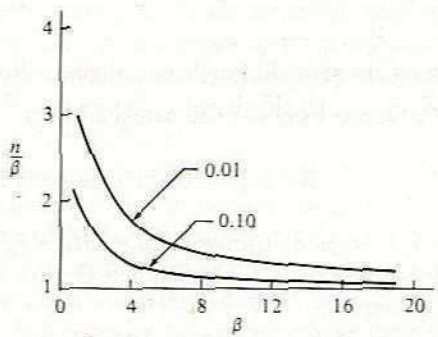


Figura 6.11 Número de bandas laterales de FM para las cuales $|J_n(\beta)| \geq 0.01$ y $|J_n(\beta)| \geq 0.10$.

† J.R. Carson fue uno de los primeros en investigar la FM en los años veinte. Véase, por ejemplo, J.R. Carson, "Notes on the Theory of Modulation", reimpreso en *Proceedings of the IEEE*, vol. 51, 1951, págs., 893-896.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

que también puede escribirse como

$$W \approx 2\omega_m(1 + \beta). \tag{6.41b}$$

La regla de Carson se aproxima a los límites correctos para β muy grande y muy pequeña; en la práctica se emplea mucho porque da una aproximación muy conveniente y razonablemente exacta. Proporciona un ancho de banda menor que la definición de bandas laterales significativas, con un error máximo de $\beta = 1$ en el entorno. Sin embargo, la potencia promedio despreciada en las bandas laterales es pequeña e inferior al 1% de la potencia promedio total de la señal FM. De hecho, la aproximación es bastante buena como para descartar la restricción de que la señal moduladora sea una senoidal pura y generalizar la regla de Carson a señales moduladoras de banda limitada y potencia finita. Una justificación intuitiva de esto es que los dos términos de la regla de Carson corresponden a los efectos de los dos mecanismos de generación de FM, y que estos efectos se suman en el ancho de banda. Quizá la mejor justificación es que sí funciona.

El método analítico utilizado aquí al expandir en una serie de Fourier es muy poderoso y se puede utilizar para señales moduladoras periódicas más generales. Esto se explora en los problemas incluidos al final del capítulo. Como se debe integrar la señal moduladora en FM para obtener la fase, se requiere que la señal moduladora para FM tenga valor medio cero.

EJEMPLO 6.3.2

Una portadora de 10 MHz es modulada en frecuencia por una señal senoidal tal que la desviación de frecuencia pico es de 50 kHz. Determine el ancho de banda aproximado de la señal FM si la frecuencia de la senoidal moduladora es de (a) 500 kHz; (b) 500 Hz; (c) 10 kHz.

Solución a) $\beta = \dfrac{\Delta f}{f_m} = \dfrac{50}{500} = 0.10$

Ésta es una señal FM de banda angosta; $B \approx 2f_m = 1$ MHz.

b) $\beta = 100$; éste es el caso de banda ancha y

$$B \approx 2\Delta f = 100 \text{ kHz (la regla de Carson da 101 kHz).}$$

c) $\beta = 5$; la regla de Carson da $B \approx 2(\Delta f + f_m) = 120$ kHz. Un método más preciso es usar la figura 6.9 o el apéndice G para hallar el número n de bandas laterales significativas:

$$B = 2nf_m = 2(8)(10 \text{ kHz}) = 160 \text{ kHz}.$$

En la figura 6.10 aparece un espectro de línea de la magnitud para $\beta = 5$; en este caso, el espacio entre líneas sería de 10 kHz.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJERCICIO 6.3.2

Repita el ejemplo 6.3.2 si la desviación de frecuencia pico se reduce a 20 kHz.

RESPUESTA: (a) 1 MHz; (b) 41 kHz; (c) 80 kHz (60 kHz si se usa la regla de Carson).

EJERCICIO 6.3.3

Una señal FM dada es

$$\phi_{FM}(t) = 10 \cos [10^6 \pi t + 8 \operatorname{sen} (10^3 \pi t)].$$

Determine lo siguiente: (a) la frecuencia portadora, f_c; (b) el índice de modulación, β; (c) la desviación de frecuencia pico, Δf.

RESPUESTA: (a) 500 kHz; (b) 8; (c) 4 kHz.

6.3.3 Transmisiones comerciales en FM

Como ya se apuntó, la FM de banda angosta es lineal, por lo que puede aplicarse gran parte del análisis de AM. Las ventajas de la FM de banda angosta sobre la AM incluyen la posibilidad de una respuesta a cero Hz (importante en la telemetría y la grabación) y el rechazo de grandes pulsos de ruido (como resultado de cortar o limitar la amplitud de la señal) que puede tender a saturar el receptor. La FM de banda angosta se usa sobre todo en telemetría y comunicaciones móviles.

Si sólo nos interesa el ancho de banda, nuestro conocimiento sobre la FM puramente senoidal puede aplicarse a señales más generales también en el caso de banda ancha. En éste, se vio que el ancho de banda dependía más que nada de la desviación de frecuencia pico, Δf. Esto, para una constante moduladora dada, depende a su vez de la amplitud de la señal moduladora. En consecuencia, debe establecerse algún límite a la señal moduladora para evitar anchos de banda excesivos, aunque el ancho de banda de la señal pueda estar bien definido.

Para la radiodifusión comercial FM, la Federal Communications Commission (FCC) de Estados Unidos asigna frecuencias portadoras espaciadas por intervalos de 200 kHz, en el intervalo de 88-108 MHz, y fija la desviación de frecuencia pico en 75 kHz.[†] Los 200 kHz disponibles para cada estación, en comparación con los 10 kHz de la radiodifusión AM, permiten transmitir material de alta fidelidad, con espacio de sobra, llenando la banda con FM de banda ancha. Supóngase que se toma una frecuencia moduladora f_m de 15 kHz (valor máximo típico para la frecuencia de audio en transmisiones FM). Así, el uso de la regla de Carson da un ancho de banda de $B \approx 2(\Delta f + f_m) = 180$ kHz, que

[†] Véase el apéndice C.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

se halla dentro del ancho de banda requerido. El análisis senoidal indica que $\beta = 5$ y el ancho de banda ocupado por las bandas laterales significativas es

$$2(8)(15 \text{ kHz}) = 240 \text{ kHz}$$

(véase Fig. 6.9, 6.10 o 6.11). Por supuesto, la discrepancia cae dentro de la definición de ancho de banda. Sin embargo, en lo que se refiere a la transmisión de audio típica se eligió un caso extremo porque se supuso que el tono de 15 kHz se ajustaba a la máxima amplitud para producir una desviación de frecuencia pico de 75 kHz. El material usual de los programas no tiene tanto contenido de altas frecuencias. Para frecuencias de audio más bajas, el valor de β aumenta y el ancho de banda ocupado por las bandas laterales significativas se aproxima al límite de banda ancha, $2\Delta f = 150$ kHz (para señales de audio de amplitud máxima total y frecuencias menores de unos 5 kHz, todas las bandas laterales significativas se hallan dentro del ancho de banda de 200 kHz). Nótese que si la importancia de la amplitud es uniforme, es la mayor frecuencia moduladora la que gobierna el ancho de banda final.

La transmisión de un canal de audio deja espacio para material adicional dentro del ancho de banda asignado. A menudo, las porciones del espectro modulador de mayor frecuencia se ocupan con multiplexión estéreo y otras transmisiones auxiliares. Éstas se examinaron en el capítulo 5. Para mantener restringido el ancho de banda, se reduce la amplitud máxima de estas transmisiones. En la figura 5.12 se muestra el espectro de una transmisión comercial típica, antes del transmisor FM.

En la estación de FM, las señales de audio izquierda (L) y derecha (R) se derivan de micrófonos, discos, cintas, etc., aplicándose preénfasis a cada canal (esto se analiza más adelante en este capítulo). Para transmisiones estéreo, se admite una subportadora piloto a 19 kHz de hasta el 10% de la desviación de frecuencia pico (de 75 kHz). Cuando hay alguna pausa en un programa (y no hay transmisiones auxiliares), el índice de modulación es $\beta = (10\%)(75 \text{ kHz})/(19 \text{ kHz}) = 0.395$. Esto se aproxima a la condición de banda angosta. Por ello, durante la pausa, una transmisión FM estéreo puede identificarse en un analizador de espectro por una gran línea portadora más dos bandas laterales de primer orden separadas 19 kHz de la portadora.

El sistema Subsidiary Communications Authorization (SCA) permite a una estación comercial FM añadir otro canal de radio además del monofónico y el estéreo. Las transmisiones SCA no incluyen anuncios comerciales y se dedican a suscriptores que pagan una cuota, para música indirecta en tiendas, consultorios médicos, oficinas, etc.; por el contrario, las demás transmisiones FM son para uso público y se mantienen gracias a los anuncios comerciales. El canal SCA usa FM de banda angosta. La frecuencia central de la subportadora suele ajustarse en 67 kHz, aunque esto no lo fija la FCC. Aún se requiere una desviación de frecuencia pico total que no exceda los 75 kHz. Para transmisión monofónica solamente, se dispone de todos los 75 kHz. Si además se usa SCA, la FCC limita la porción de SCA al 30% de la desviación de frecuencia pico máxima, dejando el 70% para el canal monofónico.

En la radiodifusión estéreo sin SCA, 10% de la desviación pico máxima se usa para la subportadora piloto de 19 kHz, dejando el 90% para dividir entre los canales estéreo (L + R) y (L - R). Las amplitudes promedio de los canales L y R normalmente se mantienen iguales. La máxima amplitud (L + R) se ajusta para proporcionar el 90% de

http://libreria-universitaria.blogspot.com

la modulación cuando la amplitud (L - R) es cero. Entonces, si (L – R) es máximo, (L + R) se hará cero, y si L o R se hace cero, (L + R) y (L - R) tomarán cada uno un máximo del 45% de la desviación de frecuencia pico total. Es decir, hay un balance entre los canales (L + R) y (L – R) tal que no se exceda el 90% de la capacidad permitida de desviación de frecuencia pico.

Cuando se usa con multiplexión estéreo, el canal SCA está limitado al 10% de la máxima desviación de frecuencia pico, lo que deja un 80% para los canales estéreo (es decir, 10% para el SCA más 10% para la subportadora piloto de 19 kHz). El funcionamiento del sistema es igual que en el párrafo anterior, excepto que ahora los canales estéreo disponen del 80% en lugar del 90%. Además, debido a la relativamente baja desviación pico asignada, la transmisión SCA tiene una muy buena razón señal a ruido y se usa sólo para cobertura local. Para eliminar el ruido entre discos o cintas, se usa a menudo el enmudecimiento de la estación (p. ej., haciendo que la subportadora active un circuito silenciador de audio en el receptor).

La radiodifusión pública FM es un ejemplo del uso de los métodos DSB-SC y NBFM para multiplexión en frecuencia de varios canales antes de la FM de banda ancha para la transmisión final. La frecuencia modulada se usa también para el audio en transmisiones de televisión comercial. La desviación de frecuencia pico para este uso se fija en 25 kHz por parte de la FCC. Suponiendo una frecuencia de audio máxima de 15 kHz, la regla de Carson da un ancho de banda de 80 kHz para el canal de sonido de un receptor de televisión.

Comparado con el de AM, el ancho de banda relativamente grande necesario para la FM comercial es el precio que se debe pagar por la mejora sustancial en la eliminación de ruido e interferencias. Esta eliminación aumenta al crecer Δf y, por tanto, el ancho de banda. Estos temas se examinarán en una sección posterior.

6.4 POTENCIA PROMEDIO EN SEÑALES DE ÁNGULO MODULADO

Para modulación senoidal, se puede escribir [véase Ec. (6.16)]

$$\phi_{FM}(t) = A \cos(\omega_c t + \beta \operatorname{sen} \omega_m t).$$

El valor cuadrático medio de esta expresión es

$$\overline{\phi_{FM}^2(t)} = A^2/2, \tag{6.42}$$

lo cual muestra que la potencia promedio total de una señal FM es constante, cualquiera que sea el índice de modulación, a diferencia de la AM, donde la potencia promedio total es proporcional a dicho índice. Esta conclusión puede ampliarse a cualquier señal moduladora de banda limitada arbitraria.

La ecuación (6.42) puede verificarse escribiendo $\phi_{FM}(t)$ en expansión en serie [véase Ec. (6.37)],

$$\phi_{FM}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_c + n\omega_m)t.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Debido a la ortogonalidad de los términos coseno, el valor cuadrático medio de la suma es igual a la suma de los valores cuadráticos medios y se obtiene

$$\overline{\phi_{\text{FM}}^2(t)} = \tfrac{1}{2}A^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta)\,. \tag{6.43}$$

Sin embargo, de la propiedad (4) en la ecuación (6.33),

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1\,,$$

de manera que

$$\overline{\phi_{\text{FM}}^2(t)} = A^2/2\,.$$

El valor cuadrático medio de la portadora no modulada es $A^2/2$. Si el índice de modulación β aumenta desde cero y las bandas laterales son distintas de cero, la componente portadora disminuye. Según las ecuaciones (6.42) y (6.43), esto ocurre en forma tal que el valor cuadrático medio total es siempre constante. El valor cuadrático medio de cada banda lateral es $\frac{1}{2}A^2J_n^2(\beta)$ (las bandas laterales aparecen en pares). Por supuesto, el valor cuadrático medio es idéntico a la potencia promedio si la resistencia es de un ohm y se relaciona con la potencia promedio por una constante (es decir, la resistencia) en los demás casos, por lo que la conversión a unidades de potencia es directa.

Cualquier banda lateral, incluyendo la portadora, se puede hacer tan pequeña como se desee eligiendo el índice de modulación β apropiado. En una tabla o gráfica de funciones de Bessel (p. ej., la Fig. 6.9), se ve que el término portador $J_0(\beta)$ se puede hacer cero para $\beta = 2.405, 5.52, \ldots$, y que en estos casos toda la potencia promedio se encuentra en las bandas laterales. Estos puntos son fáciles de identificar en un analizador de espectro y sirven como puntos de calibración muy adecuados para β y Δf.

EJEMPLO 6.4.1

Un transmisor FM se modula con una senoidal simple. La salida sin modular es de 100 W en una carga resistiva de 50 ohms. La desviación de frecuencia pico se aumenta con cuidado desde cero hasta que la amplitud de la primera banda lateral en la salida sea cero. En estas condiciones, determine (a) la potencia promedio en la frecuencia portadora; (b) la potencia promedio en las restantes bandas laterales, y (c) la potencia promedio en las bandas laterales de segundo orden.

Solución a) Usando la figura 6.9 y el apéndice G, se ve que $J_1(\beta) = 0$ ocurre primero en $\beta \approx 3.8$ y que $J_0(3.8) \approx -0.40$. Entonces, la potencia promedio de la portadora es

$$P_c = \frac{J_0^2(3.8)}{J_0^2(0)}(100\text{ W}) = 16\text{ W}.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

b) La potencia promedio en la suma de las bandas laterales restantes es

$$P_s = P_t - P_c = 100 \text{ W} - 16 \text{ W} = 84 \text{ W}.$$

c) $J_2(3.8) \approx 0.41$. La potencia promedio en las bandas laterales de segundo orden es

$$P_c = 2\frac{J_2^2(3.8)}{J_0^2(0)}(100 \text{ W}) = 34 \text{ W}.$$

EJERCICIO 6.4.1

Determine la amplitud pico de (a) la señal total y (b) la banda lateral superior de segundo orden del ejemplo 6.4.1.

RESPUESTA: (a) 100 V; (b) 41 V.

EJERCICIO 6.4.2

Muestre que la raíz cuadrática media de la ecuación (6.16) puede expresarse como

$$\sqrt{\overline{\phi^2(t)}} = \frac{A}{\sqrt{2}}\sqrt{J_0^2(\beta) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(\beta)}\,.$$

6.5 MODULACIÓN DE FASE

No hay diferencias básicas entre los mecanismos de generación de la modulación de fase (PM, *phase modulation*) y la de frecuencia (FM, *frecuency modulation*). De hecho, la única diferencia es que en PM la fase de la señal modulada es proporcional a la amplitud de la señal de entrada, mientras que en FM es proporcional a la integral de la señal de entrada. Esta ligera modificación no amerita seguir adelante con el tema.

Para una señal FM con modulación senoidal $f(t) = a \cos \omega_m t$, la frecuencia instantánea es

$$\begin{aligned}\omega_i(t) &= \omega_c + ak_f \cos \omega_m t \\ &= \omega_c + \Delta\omega \cos \omega_m t\,,\end{aligned}$$

donde $\Delta\omega$ es la desviación de frecuencia pico (en radianes por segundo) y k_f es la constante moduladora de frecuencia (en radianes por segundo por volt). El índice de modulación, $\beta = \Delta\omega/\omega_m$, es un número adimensional y sirve como guía para el comportamiento de la portadora y las bandas laterales.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Para PM con la misma señal moduladora, se tiene

$$\theta(t) = \omega_c t + ak_p \cos \omega_m t + \theta_0$$
$$= \omega_c t + \Delta\theta \cos \omega_m t + \theta_0,$$

donde $\Delta\theta$ es la desviación de fase pico (en radianes) y k_p es la constante moduladora de fase (en radianes por volt). La frecuencia instantánea es

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta}{dt}$$
$$= \omega_c - ak_p\omega_m \operatorname{sen} \omega_m t$$
$$= \omega_c - \Delta\omega \operatorname{sen} \omega_m t$$

Por tanto, se ve que la desviación de frecuencia pico en la PM es proporcional no sólo a la amplitud de la señal moduladora sino también a su frecuencia; es decir,

$$\Delta\omega = \begin{cases} ak_f & \text{para FM} \\ ak_p\omega_m = (\Delta\theta)\omega_m & \text{para PM} \end{cases} \tag{6.44}$$

Esto hace que la PM sea menos apropiada para transmitir cuando $\Delta\omega$ es fija (como en la FM comercial). Sin embargo, hay algunas ventajas en la modulación de PM que aconsejan su uso (esto se hará más evidente en páginas posteriores de este capítulo). La función del índice de modulación β es la misma que en FM. Entonces, de manera formal se puede calcular $\Delta\omega = ak_p\omega_m = \Delta\theta\omega_m$ y proceder como si fuera modulación FM por lo que se refiere al ancho de banda, a las bandas laterales, etcétera. Nótese que el valor numérico de β es la desviación de fase pico, $\Delta\theta$, en el caso PM.

EJEMPLO 6.5.1

Una portadora es modulada en fase por una señal senoidal de 5 kHz y amplitud unitaria; la desviación de fase pico es de un radián. Calcule el ancho de banda de la señal PM usando (a) la regla de Carson, y (b) la definición de bandas laterales significativas.

Solución a) $\Delta f = (\Delta\theta)f_m = 5$ kHz y la regla de Carson da

$$B \approx 2(\Delta f + f_m) = 20 \text{ kHz}.$$

b) $\beta = \Delta\theta = 1$; usando una tabla de funciones de Bessel,

$$B = 2nf_m = 2(3)(5 \text{ kHz}) = 30 \text{ kHz}.$$

EJERCICIO 6.5.1

Hay un sistema PM en el que la fase toma sólo dos valores posibles. Este sistema se conoce como *conmutación de fase* (PSK, *phase-shift-keying*). Suponga que un modu-

http://libreria-universitaria.blogspot.com

lador de fase es modulado por una señal cuadrada simétrica periódica de amplitud unitaria. Determine el valor requerido de la desviación de fase pico, $\Delta\theta$ ($-\pi/2 \leq \Delta\theta < \pi/2$), para la cual la portadora promedio no aparezca en la salida.

RESPUESTA: ± 90°.

6.6 GENERACIÓN DE SEÑALES FM DE BANDA ANCHA

Una forma de generar señales FM de banda ancha es producir primero una señal FM de banda angosta y después usar la multiplicación de frecuencias para aumentar el índice de modulación hasta el intervalo de valores deseado. Éste es el método indirecto para generar señales FM de banda ancha. Un segundo método (conocido como método directo) es variar la frecuencia portadora directamente con la señal moduladora. Ahora se examinarán ambos métodos.

6.6.1 FM indirecta

En la sección 6.2 se vio que la generación de PM de banda angosta es relativamente fácil y que de ella puede obtenerse la FM de banda angosta integrando la señal moduladora. Sin embargo, el índice de modulación que se obtiene por este método está restringido a valores muy bajos ($\beta < 0.2$ en teoría; $\beta < 0.5$ en la práctica). Para generar FM de banda ancha debe usarse un método para aumentar el índice de modulación. Este método es el multiplicador de frecuencias.

El *multiplicador de frecuencias* es un dispositivo no lineal concebido para multiplicar las frecuencias de la señal de entrada por un factor dado. Por ejemplo, las características de entrada y salida de un dispositivo de ley cuadrática es

$$e_o(t) = ae_i^2(t). \tag{6.45}$$

Si la entrada es la señal FM,

$$e_i(t) = A \cos(\omega_c t + \beta \operatorname{sen} \omega_m t),$$

la salida es

$$\begin{aligned} e_o(t) &= aA^2 \cos^2(\omega_c t + \beta \operatorname{sen} \omega_m t) \\ &= (1/2)aA^2[1 + \cos(2\omega_c t + 2\beta \operatorname{sen} \omega_m t)]. \end{aligned} \tag{6.46}$$

El primer término de este resultado es simplemente un nivel constante que puede eliminarse con facilidad por medio de un filtro. En este proceso, tanto la frecuencia portadora como el índice de modulación se han duplicado. De igual manera, el uso de un dispositivo de ley n-ésima seguido de un filtro proporciona una portadora y un índice

http://libreria-universitaria.blogspot.com

de modulación incrementados en un factor n. De modo equivalente, la desviación de frecuencia pico $\Delta\omega$ es aumentada por n en la multiplicación (ω_m permanece inalterado).

En la práctica, pueden generarse no linealidades muy abruptas al usar diodos especiales (p. ej., el varactor y el diodo de recuperación escalón) que producen muchos términos armónicos. Con estas técnicas es posible multiplicar por un orden de magnitud o más en un solo paso, aunque hay limitaciones como el hecho de que las pérdidas debidas a la generación de armónicos hacen necesaria una amplificación adicional, mientras que las pequeñas inestabilidades de fase del proceso de multiplicación se acumulan y aparecen como ruido en la salida. Con buenas técnicas de diseño, pueden alcanzarse factores del orden de 10^3 con pocos grados de ruido de fase.

La multiplicación de frecuencias aumenta la portadora de la señal FM, así como el índice de modulación. Esto puede provocar frecuencias portadoras muy altas para alcanzar determinado índice de modulación. Para evitarlo, muchas veces se usan convertidores de frecuencia que controlan el valor de la frecuencia portadora. Este convertidor es, en esencia, el mismo que se vio en relación con la AM, y traslada el espectro de una señal cierta cantidad sin alterar su contenido espectral. En la figura 6.12 se muestran diagramas de bloques del multiplicador y del convertidor de frecuencias. La diferencia entre estas dos operaciones es que mientras en el multiplicador todas las componentes espectrales de la señal de entrada se multiplican por sí mismas (por lo que están presentes todos los productos cruzados), en el convertidor todas esas componentes se multiplican por una senoidal de frecuencia fija. La primera operación extiende el contenido espectral (lo que puede verificarse usando la propiedad de convolución de frecuencias que se vio en el capítulo 3) y la última traslada en frecuencia el contenido espectral.

El método para obtener una señal FM de banda ancha a partir de una de banda angosta por multiplicación de frecuencias se llama transmisor FM indirecto de Armstrong,[†] y su diagrama de bloques aparece en la figura 6.13. Como resultado de la multiplicación y las operaciones heterodinas, en este sistema es difícil mantener la magnitud correcta de la portadora a las bandas laterales, y por tanto no podría usarse para una señal de información con contenido de cd. Este problema se puede resolver utilizando el lazo de fase cerrada, un tema por ver en la próxima sección.

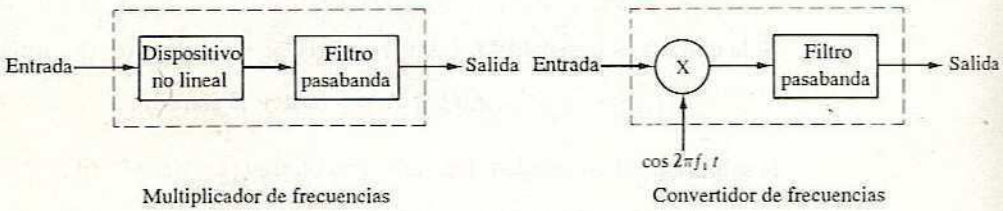


Figura 6.12 Diagramas de bloques de la multiplicación y la conversión de frecuencias.

[†] E.H. Armstrong fue uno de los primeros ingenieros en reconocer los posibles méritos de la radiodifusión FM en los años treinta. Véase, por ejemplo, E.H. Armstrong, "A Method of Reducing Disturbance in Radio Signaling by a System of Frequency Modulation", *Proceedings of the IRE*, vol. 24, 1936, págs. 689-740.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

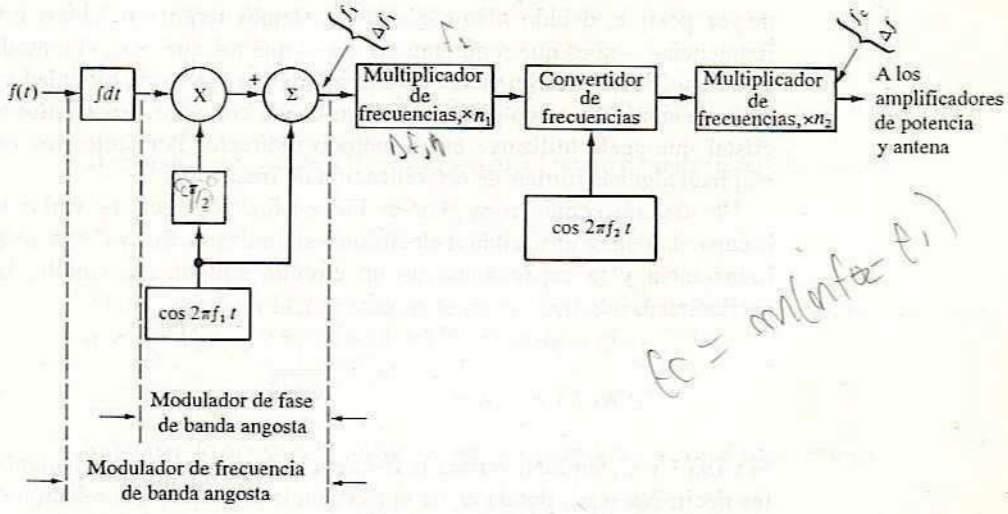


Figura 6.13 Diagrama de bloques de un transmisor de FM indirecto (de Armstrong).

EJEMPLO 6.6.1

Una señal de ángulo modulado tiene una desviación de frecuencia pico de 20 Hz para una entrada senoidal de amplitud unitaria y frecuencia de 50 Hz. Determine el factor n de multiplicación de frecuencias necesario para producir una desviación de frecuencia pico de 20 kHz cuando la senoidal de entrada tiene amplitud unitaria y frecuencia de 100 Hz, y la modulación de ángulo usada es (a) FM; (b) PM.

Solución

a) $\Delta f_2 = 20$ kHz; $\Delta f_1 = 20$ Hz; $n = \Delta f_2/\Delta f_1 = 1000$

b) $\Delta f_2 = 20$ kHz; $\Delta f_1 = (100/50)(20\text{ Hz}) = 40$ Hz; $n = \Delta f_2/\Delta f_1 = 500$

EJERCICIO 6.6.1

Calcule la frecuencia portadora f_c y la desviación de frecuencia pico Δf en la salida del transmisor FM de la figura 6.13 si $f_1 = 200$ kHz; $f_2 = 10.8$ MHz; $\Delta f_1 = 25$ Hz; $n_1 = 64$; $n_2 = 48$.

RESPUESTA: 96.0 MHz o 1132.8 MHz; 76.8 kHz.

6.6.2 FM directa

En este método de generación de FM, la señal moduladora controla de manera directa la frecuencia portadora. En general se intenta generar una desviación de frecuencia lo

http://libreria-universitaria.blogspot.com

mayor posible, debido a lo cual estos sistemas requieren menos multiplicación de frecuencias —si es que requieren alguna— que los que usan el método indirecto. Por otra parte, como la frecuencia está controlada por la tensión moduladora, la estabilidad de la frecuencia a largo plazo no es tan buena como en el oscilador estabilizado con cristal que suele utilizarse en el método indirecto. Por tanto, los métodos directos emplean algunas formas de estabilización de frecuencia.

Un método común para generar FM en forma directa es variar la inductancia o la capacitancia de un oscilador electrónico sintonizado. Si L y C son, respectivamente, la inductancia y la capacitancia de un circuito sintonizado simple, la frecuencia de oscilación es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Si varía L o C, también variará la frecuencia de salida. Para variaciones muy pequeñas (es decir, $\Delta\omega \ll \omega_c$, donde ω_c es la frecuencia portadora), la relación de raíz cuadrada puede aproximarse con un término lineal y la conversión puede hacerse casi lineal.

Hay varias formas de hacer que la capacitancia o la inductancia de un circuito sintonizado dependa de la señal de entrada. A frecuencias medias y altas, un método común es usar un diodo semiconductor polarizado en inverso como capacitancia de tensión variable. Cualquier diodo semiconductor muestra cierto cambio de capacitancia al cambiar la polarización en inverso, pero el tipo de diodo usado con frecuencia para esta aplicación es el diodo varactor. El porcentaje de desviación de frecuencia que se obtiene de esta manera es bastante pequeño. Para aumentarlo, la modulación se efectúa a alta frecuencia y luego se heterodina a una más baja.

Otros métodos que se emplean con éxito a frecuencias altas incluye el clistron reflejo y el modulador de bulbo de reactancia. Este último consiste en un pentodo que se opera de modo que produzca una capacitancia proporcional a la tensión de rejilla en un amplio intervalo. A frecuencias menores, se ha usado el control de los osciladores RC con FET y dispositivos similares. Cualquier oscilador cuya frecuencia esté controlada por la tensión de la señal moduladora se llama *oscilador controlado por tensión* o VCO (*voltage-controlled oscillator*).

EJEMPLO 6.6.2

Un diodo semiconductor polarizado en inverso se puede usar como capacitancia de tensión variable para la modulación de frecuencia. Suponga que la capacitancia de la union PN está dada en términos de su tensión de polarización inversa V por $C=C_0/\sqrt{1+2V}$. Dicho diodo debe usarse como capacitancia en paralelo en un circuito LC sintonizado a una frecuencia central de 10 MHz cuando la tensión de polarización inversa es de 4 volts.

a) Determine la constante de modulación k_f (es decir, la pendiente frecuencia-tensión cercana a la frecuencia central).
b) Determine la desviación de frecuencia pico permisible para un error máximo de 1% a partir de una característica lineal de frecuencia-tensión.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Solución a) La frecuencia f puede expresarse como

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{(1 + 2V)^{1/4}}{2\pi\sqrt{LC_0}}.$$

Haciendo $f = f_0$ cuando $V = V_0$ (o sea en el punto de operación), se obtiene

$$f = f_0 \frac{(1 + 2V)^{1/4}}{(1 + 2V_0)^{1/4}}.$$

Ahora, sea v un incremento de tensión alrededor del punto de operación de modo que $V = V_0 + v$; y sea $K = (1 + 2V_0)$ de manera que

$$f = f_0[1 + (2v/K)]^{1/4}.$$

Suponiendo que $v \ll K$, puede usarse la expansión binomial para obtener

$$f \approx f_0\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{2v}{K}\right) - \frac{3}{32}\left(\frac{2v}{K}\right)^2 + \cdots\right].$$

La constante de modulación k_f es la pendiente de la característica lineal de frecuencia-tensión y está dada por

$$k_f = \frac{1}{4}\left(\frac{2v}{K}\right)\frac{f_0}{v} = \frac{f_0}{2K} = \frac{f_0}{2(1 + 2V_0)}.$$

Para el punto de operación dado, $f_0 = 10$ MHz y $V_0 = 4$ volts, de modo que

$$k_f = 0.56 \text{ MHz/V}.$$

b) La mayor parte del error provendrá del término de segundo orden de la expansión en serie, por lo que se requiere

$$\frac{\frac{3}{32}\left(\frac{2v}{K}\right)^2}{\frac{1}{4}\left(\frac{2v}{K}\right)} \leq 0.01$$

lo que da

$$v \leq \frac{4K}{300}.$$

La desviación de frecuencia pico es, entonces,

$$\Delta f = k_f v_{máx} = \left(\frac{f_0}{2K}\right)\left(\frac{4K}{300}\right) = \frac{f_0}{150}$$
$$= 66.7 \text{ kHz}.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En algunos casos, no es necesario que la tensión de salida sea senoidal o que la salida pueda ser ondulada debido a circuitos no lineales o al filtrado. En estos casos es posible —y bastante atractivo— generar digitalmente FM de banda ancha. Quizá la forma más simple es controlar la frecuencia de oscilación de un oscilador de relajamiento o un multivibrador con la tensión de la señal moduladora. Un método más preciso y estable es generar las intersecciones con el eje de una señal PM usando técnicas digitales. Básicamente, esto implica muestrear la señal de entrada y luego, con un generador de rampa de precisión, aplicarlo en cada punto de muestra, seguido por un umbral de tensión variable. El instante en que se supera el umbral se usa para generar un corto pulso que significa un cruce en cero. Aplicando esta secuencia de pulsos a un filtro pasabanda, se obtiene una señal PM de banda ancha. Este método es estable y exacto, y puede generar señales de ancho de banda muy amplio. En la figura 6.14 se muestra un diagrama de bloques simplificado. Estas operaciones se analizan con mayor detalle en el capítulo 7.

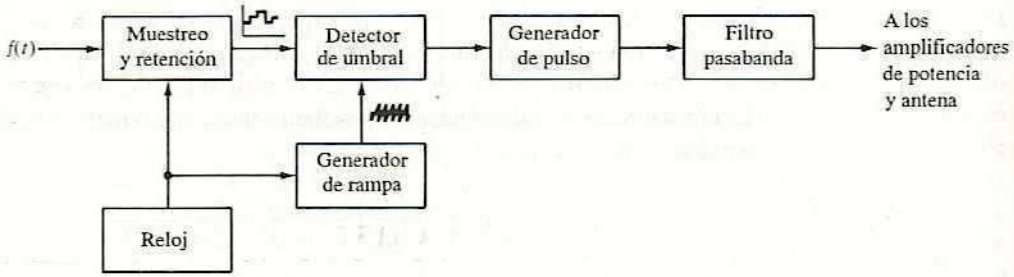


Figura 6.14 Generación digital de PM de banda ancha.

6.6.3 Multiplexión de FM

En la transmisión de datos, es práctica común combinar varios canales de señales moduladas usando métodos de multiplexión de frecuencias y después modular una portadora de alta frecuencia con la señal multiplexada compuesta. Para hacerlo, cada una de las señales de datos individuales modula una subportadora asignada. Estas subportadoras se arreglan para ocupar bandas de frecuencia adyacente con algún espacio entre ellas, conocidas como *bandas de guardia*. Las subportadoras moduladas se usan para modular en ángulo una portadora de alta frecuencia, como se muestra en la figura 6.15.

Si se usa FM para modular las subportadoras y la portadora principal, la modulación compuesta se denomina FM-FM; si se usa AM, entonces se denomina AM-FM. Los métodos de modulación de amplitud usados en la subportadora son DSB-SC o SSB-SC. Los métodos de gran portadora se evitan debido a que gran parte de la desviación de frecuencia pico se debe usar solamente para enviar la portadora AM. En general, se envía también una subportadora piloto para la demodulación. Nótese que la multiplexión estéreo usada en la FM comercial es un ejemplo de sistema AM-FM.†

† En el apéndice H se estudian las modulaciones de amplitud y angular aplicadas a transmisión de AM estéreo.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

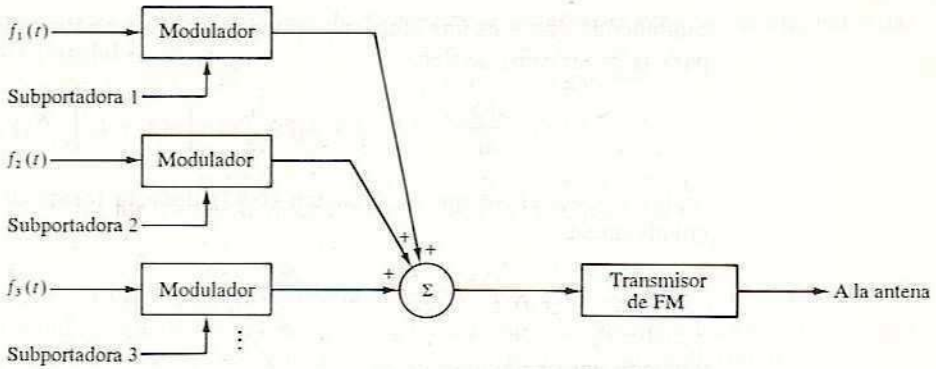


Figura 6.15 Sistema simplificado de modulación compuesta.

La modulación de ángulo (tanto FM como PM) se usan en forma amplia para transmitir datos multicanal y en sistemas de telemetría. Para los últimos, existen normas de asignación de subportadoras y bandas de guardia.† A fin de facilitar el diseño de filtros para separar canales adyacentes, es común dejar alguna separación de frecuencia entre ellos.

6.7 DEMODULACIÓN DE SEÑALES FM

Hay numerosas formas de recuperar la señal modulada de la señal FM. Aquí se verán sólo algunas. Sin embargo, la característica global debe ser la misma para proporcionar una señal de salida cuya amplitud sea linealmente proporcional a la frecuencia instantánea de la señal de entrada.

6.7.1 Método directo

Un método es usar algún sistema que tenga una característica lineal de transferencia de tensión a frecuencia. Tal sistema se llama *discriminador* de frecuencia. Para obtener un discriminador simple, se necesita algo cuya característica amplitud contra frecuencia sea lineal. Conceptualmente, el más simple es el derivador ideal, dado que su función de transferencia es $H(\omega) = j\omega$. (¡Que es por cierto una característica de magnitud muy lineal!)

Una expresión general para la señal FM es

$$\phi_{\text{FM}}(t) = A \cos\left[\omega_c t + k_f \int_0^t f(\tau)\, d\tau\right].$$

† Véase, por ejemplo, E.L. Gruenberg (ed.), *Handbook of Telemetry and Remote Control*, Nueva York, McGraw-Hill, 1967.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Suponiendo que A es una constante (puede insertarse un limitador antes del derivador para asegurar esto), se tiene

$$\frac{d\phi}{dt} = -A[\omega_c + k_f f(t)] \operatorname{sen}\left[\omega_c t + k_f \int_0^t f(\tau)\, d\tau\right]. \tag{6.47}$$

Si $k_f f(t) \ll \omega_c$, se ve que la ecuación (6.47) tiene la forma de una señal AM cuya envolvente es

$$A\omega_c\left[1 + \frac{k_f}{\omega_c} f(t)\right] \tag{6.48}$$

y cuya frecuencia portadora es

$$\omega_c + k_f f(t)\,. \tag{6.49}$$

El derivador ha cambiado FM en AM con sólo la pequeña diferencia de que la frecuencia portadora ha variado un poco. La señal AM puede detectarse por medio de un detector de envolvente que, mientras $k_f f(t) \ll \omega_c$, no podrá detectar el ligero cambio en la frecuencia portadora.

EJEMPLO 6.7.1

La señal de ángulo modulado $\phi(t) = A \cos(\omega_c t + \beta \operatorname{sen} \omega_m t)$ se aplica a la entrada de un filtro pasaaltas RC, el cual se muestra en la figura 6.16. Si $\omega \ll (RC)^{-1}$ en la banda de frecuencia ocupada por la señal $\phi(t)$, demuestre que la tensión de salida es de amplitud modulada y se puede detectar con un detector de envolvente. Encuentre también una expresión para el índice de modulación de la señal de AM en la salida del filtro.

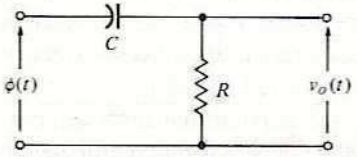


Figura 6.16 El filtro RC pasaaltas RC.

Solución La función de transferencia del filtro pasaaltas es

$$H(\omega) = \frac{R}{R + (j\omega C)^{-1}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}.$$

Para las frecuencias de interés dentro de la condición $\omega \ll (RC)^{-1}$, esta función de transferencia se puede aproximar por medio de

$$H(\omega) \approx j\omega RC \quad \text{para } \omega \ll (RC)^{-1},$$

de donde la respuesta al impulso es

$$h(t) \approx RC\frac{d}{dt}.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Usando la señal de ángulo modulado $\phi(t)$ como entrada, la señal de salida, con estas aproximaciones, es

$$v_o(t) \approx RC\frac{d}{dt}[A\ \cos\ (\omega_c t + \beta\ \text{sen}\,\omega_m t)]$$

$$v_o(t) \approx -ARC\omega_c\left[1 + \frac{\beta\omega_m}{\omega_c}\cos\ \omega_m t\right]\text{sen}\,(\omega_c t + \beta\ \text{sen}\,\omega_m t)\,.$$

Se observa que $v_0(t)$ constituye una señal de ángulo modulado que es a su vez de amplitud modulada. El hecho de que la señal portadora esté modulada en ángulo no es crítico para la utilización de un detector de envolvente en la demodulación de AM, y el índice de modulación equivalente en AM está dado por

$$m = \frac{\beta\omega_m}{\omega_c} = \frac{\Delta\omega}{\omega_c}.$$

La acción del derivador ideal se puede aproximar mediante cualquier dispositivo cuya magnitud de la función de transferencia sea razonablemente lineal en el intervalo de frecuencias de interés. En la figura 6.17(a) se ilustra este tipo de discriminador. En la figura 6.17(b) se usa un circuito *RL* seguido por un detector de envolvente como aproximación al derivador. En la figura 6.17(c) se muestra una versión pasabanda de este circuito. Estos discriminadores se conocen como *detectores de pendiente*. Aunque son económicos, tienen un intervalo lineal muy limitado y su empleo se restringe a señales de entrada con pequeñas variaciones de frecuencia.

Puede obtenerse una respuesta más lineal restando dos respuestas de magnitud pasabanda. El discriminador balanceado de triple sintonía de la figura 6.17(d) usa este principio y tiene mejor sensibilidad y linealidad. Además, proporciona una respuesta de salida cero a la frecuencia portadora, lo que es una ventaja en el diseño de equipo de grabación.

Otra posibilidad es usar una aproximación de retardo/desfasamiento al derivador. Esto evita los problemas de sintonía múltiple, manteniendo alta sensibilidad y buena linealidad. La aproximación más directa es el demodulador de retardo (desfasamiento) mostrado en la figura 6.18(a) en forma de diagrama de bloques, que tiene aplicación en la demodulación de señales FM de microonda.

A frecuencias por debajo de la región de microondas, puede aprovecharse la característica de desfasamiento casi lineal de un circuito sintonizado cerca de la resonancia. Uno de éstos es el circuito discriminador de Foster-Seeley mostrado en la figura 6.18(b).[†] En él, ambos circuitos se encuentran en sintonía con la frecuencia portadora y la tensión de salida varía con la desviación de frecuencia como resultado de los desfasamientos del circuito secundario. La operación del circuito puede ilustrarse mejor

---

[†] D.F. Foster y S.H. Seeley, *Proceedings of the IRE*, vol. 25, 1937, pág. 289.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

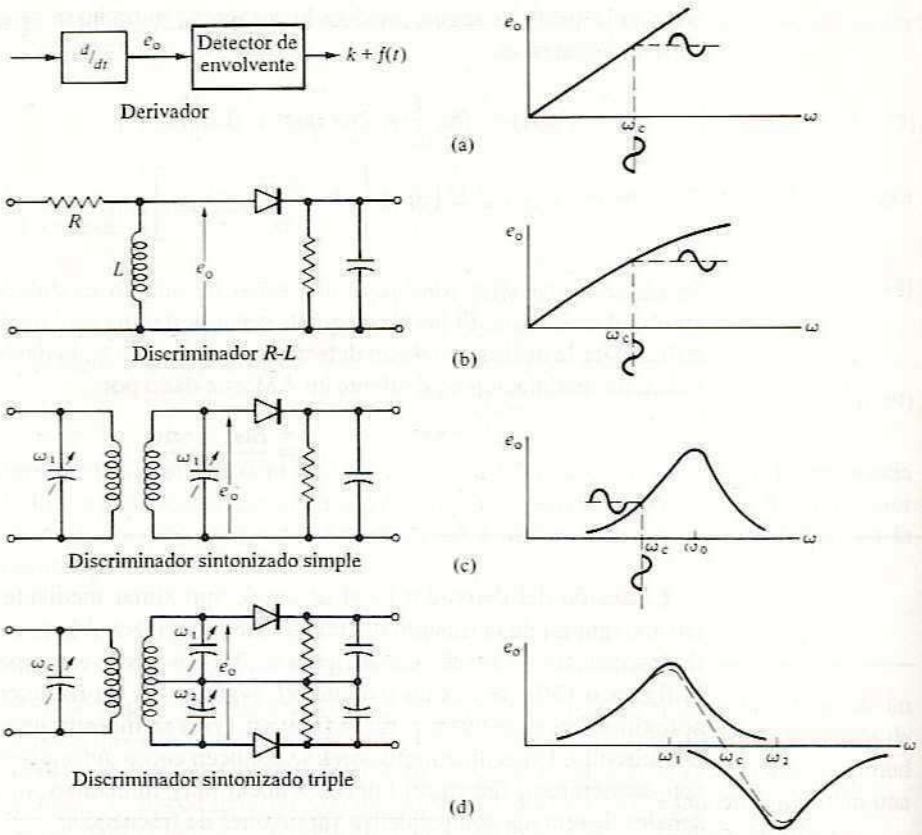


Figura 6.17 Demodulación de FM usando discriminadores.

usando diagramas fasoriales, aunque aquí no se hará.† El discriminador Foster-Seeley es muy lineal y produce una salida balanceada. Es sensible a la amplitud y requiere limitación de amplitud previa.

Un circuito más común usado en receptores comerciales que es similar aunque no necesita limitación previa, es el detector de relación mostrado en la figura 6.18(c). A diferencia del circuito de Foster-Seeley, los diodos del detector de relación están conectados en serie con el circuito sintonizado secundario y la salida se toma a través de un circuito puente. Un gran capacitor colocado a través de la diagonal opuesta del puente mantiene la tensión total relativamente constante, suprimiendo los efectos de las variaciones de amplitud. El detector de relación se usa en muchos receptores FM de entretenimiento.

Como la información sobre la señal moduladora está contenida en los cruces por cero de la señal FM, otra posibilidad es recortar (limitar) en forma drástica la amplitud de la

† Véase, por ejemplo, J.J. De France, *Communications Electronic Circuits*, 2a. ed., San Francisco, Rinehart Press, 1972, pág. 337; o A.B. Cook y A.A. Liff, *Frecuency Modulation Receivers*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1968, Cap. 10.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

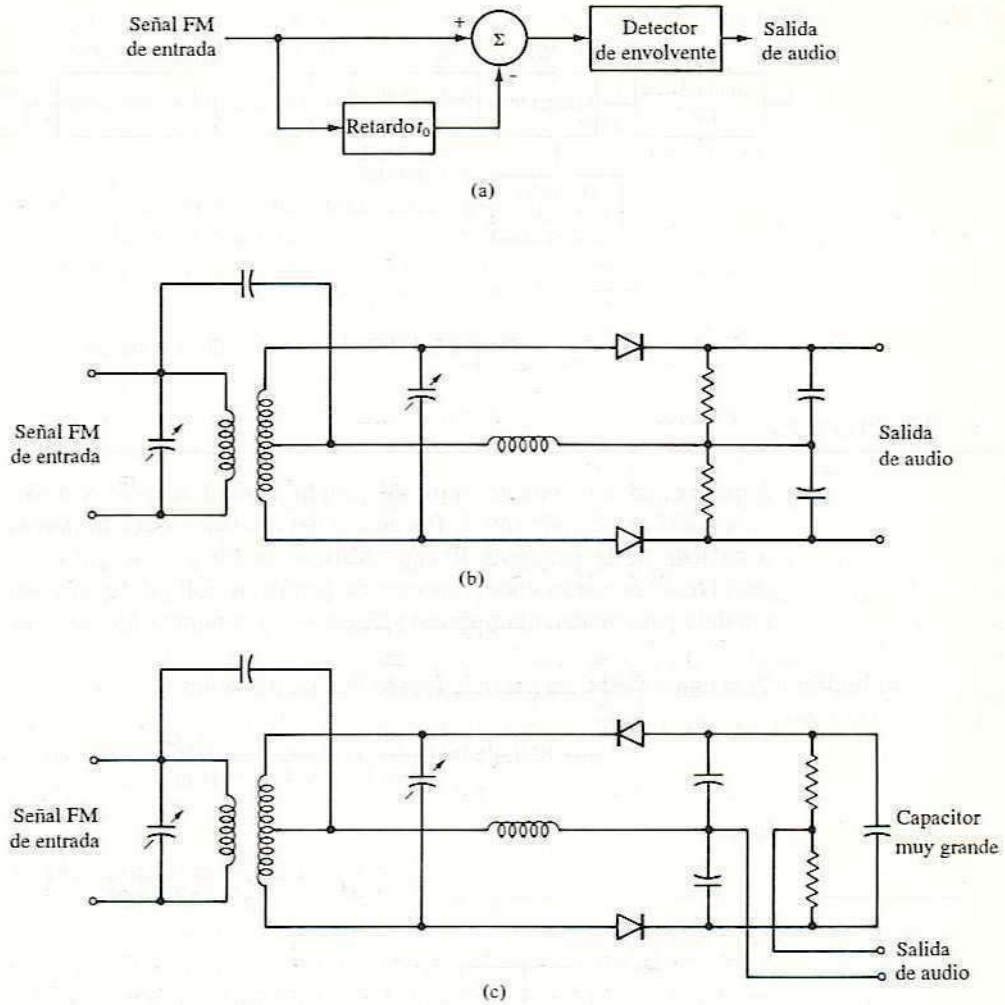


Figura 6.18 Algunos demoduladores de FM usados en la práctica: (a) demodulador de retardo; (b) discriminador de Foster-Seeley; (c) detector de relación.

señal FM y detectar la variación en los cruces por cero de la señal cuadrada resultante. El espaciamiento de los cruces por cero puede medirse contando el número de cruces en un intervalo de tiempo dado o midiendo el tiempo para determinado número de cruces.

En la figura 6.19 se muestra un diagrama de bloques de un receptor típico de banda FM comercial que cubre 88-108 MHz. El receptor es similar al superheterodino AM excepto por la adición de un discriminador y posiblemente un limitador. La elección usual de la frecuencia intermedia es de 10.7 MHz.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

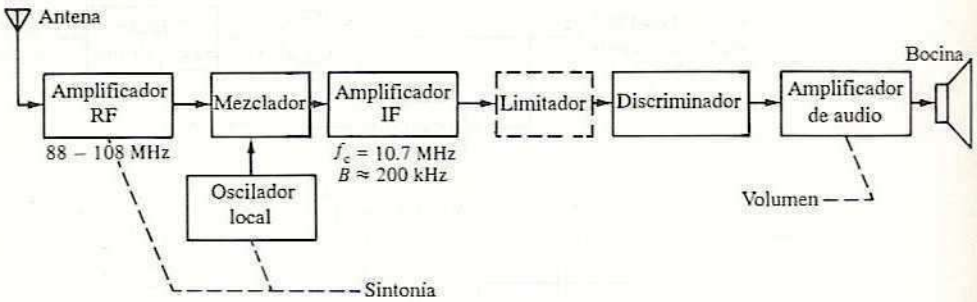


Figura 6.19 Receptor de radio FM típico.

★ EJEMPLO 6.7.2

Suponga que se intenta convertir un receptor normal de radio AM para recibir transmisiones FM cambiando sólo la frecuencia del oscilador local. Sintonizando ligeramente a un lado de la respuesta IF (no ideal), se puede pensar que ésta y el detector de envolvente actuarán como detector de pendiente. Eligiendo una red *RLC* simple en paralelo para modelar la respuesta IF, estime el comportamiento de este receptor.

Solución Para una red *RLC* en paralelo (véase Fig. 6.20), se tiene

$$|H(\omega)| = \left|\frac{V(\omega)}{I(\omega)}\right| = \frac{1/C}{\sqrt{4\alpha^2 + [(\omega_0^2 - \omega^2)/\omega]^2}}$$

donde

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad \text{y} \quad \alpha = 1/(2RC)\,.$$

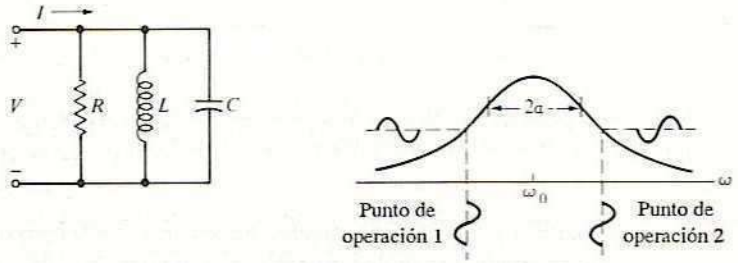


Figura 6.20 Demodulación por pendiente de FM usando un circuito sintonizado.

El ancho de banda a –3 dB es 2α; si $2\alpha \ll \omega_0$ (caso de alto Q), puede simplificar un poco las cosas trasladando a un caso equivalente pasabajas (es decir, $\omega_0 = 0$) para que

$$|H_1(\omega)| = \frac{1/C}{\sqrt{4\alpha^2 + \omega^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega/2\alpha)^2}}.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Para un intervalo de operación lineal máximo, una elección razonable es un punto de inflexión (véase Fig. 6.20); es decir, el punto en que

$$\frac{d^2}{d\omega^2}|H_1(\omega)| = 0.$$

Las soluciones se encuentran en $\omega = \pm\sqrt{2}\,\alpha$.

Ahora, extendiendo las características de sintonía alrededor del punto de operación, y tomando la parte superior de los puntos de operación, sea $\Delta\omega = \omega - \sqrt{2}\,\alpha$ y

$$|H_1(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{1 + [(\Delta\omega + \sqrt{2}\,\alpha)/2\alpha]^2}}$$

Si se supone que $\Delta\omega \ll \alpha$, esto se puede aproximar usando la expansión binomial, de manera que

$$|H_1(\omega)| \approx \sqrt{2/3}\,R[1 - 1/(3\sqrt{2}\,\alpha)\Delta\omega], \qquad \Delta\omega \ll \alpha.$$

Por tanto, con base en estas suposiciones, se ha verificado que $|H(\omega)|$ tiene una componente de pendiente lineal. Prosiguiendo con el ejemplo, el ancho de banda de este circuito AM es del orden de 10 kHz, por lo que $\alpha/2\pi = 5$ kHz y $\sqrt{2}\alpha/2\pi = 7$ kHz. En consecuencia, $\Delta\omega$ no debe exceder los 0.7 kHz para mantener la linealidad, de lo cual se concluye que, si bien este esquema funciona, está limitado a entradas de banda muy angosta. Se usa en convertidores baratos para escuchar en un receptor AM las llamadas policiacas que se transmiten en FM de banda angosta.

6.7.2 Método indirecto: el lazo de fase cerrada

Todos los métodos precedentes tienen algunas similitudes y la elección depende de la linealidad requerida, el balance cero, la facilidad de alineación, la sensibilidad a la amplitud, la confiabilidad y los factores económicos. Un enfoque diferente es colocar un modulador de frecuencias en la rama de retorno de un sistema retroalimentado. Uno de estos sistemas, con suficiente ganancia de lazo, realiza en la rama directa la operación inversa a la que se efectúa en la de retorno, demodulando así la señal. Entre los detectores de este grupo se encuentran los demoduladores FM con retroalimentación (FMFB, *FM demodulator with feedback*) y los de lazo de fase cerrada (PLL, *phase-locked loop*). En la figura 6.21 aparecen diagramas de bloques de los sistemas de demodulación FMFB y PLL. El análisis se centrará en el PLL. Su facilidad de alineación y eficiente operación en presencia de ruido hacen que se emplee cada vez más. Para mayores detalles sobre la operación del sistema FMFB, el lector deberá remitirse a textos más avanzados.

En la figura 6.21(b) se muestra un diagrama de bloques del PLL. Ambas entradas al comparador de fase se suponen periódicas y con la misma frecuencia fundamental. El comparador de fase detecta la diferencia en tiempo entre las dos señales y produce una tensión de salida proporcional a esa diferencia. Para entradas senoidales, esta

http://libreria-universitaria.blogspot.com

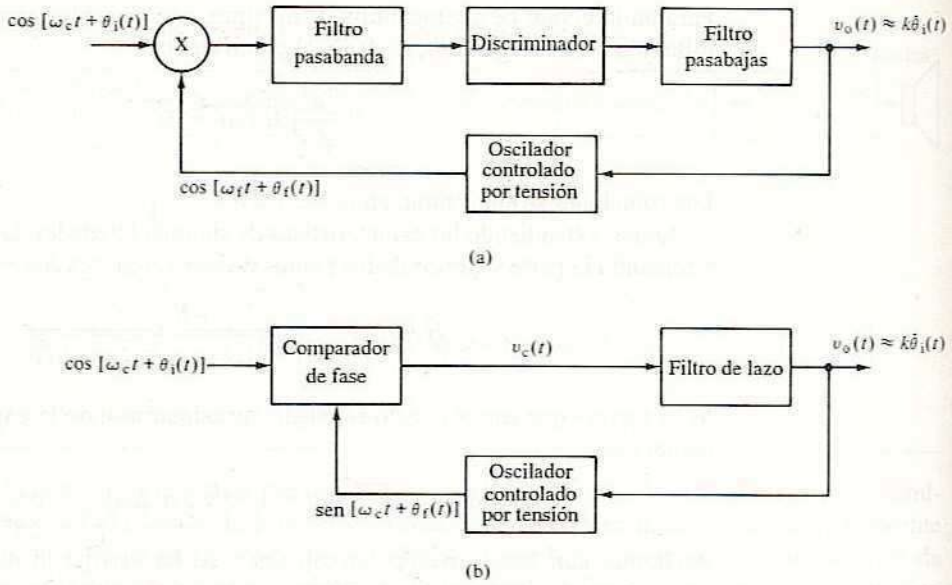


Figura 6.21 Diagrama de bloques de (a) el demodulador FM con retroalimentación (FMFB) y (b) el de lazo de fase cerrada (PLL).

diferencia en tiempo puede expresarse también como diferencia de fase. Una forma de construir comparadores de fase es utilizando un multiplicador y un filtro pasabajas, como se muestra en la figura 5.13. El propósito del filtro en el comparador de fase es atenuar las componentes de segunda frecuencia armónica que aparecen en la multiplicación. En la figura 6.21(b) se agregó un filtro de lazo, cuya función se explicará en forma breve.

En general, la salida del comparador de fase es proporcional al valor promedio del producto de las dos entradas, en función de sus desplazamientos relativos en el tiempo. Si las entradas son $x(t)$ y $y(t)$, esto puede expresarse como

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)\,dt = R_{xy}(\tau) \tag{6.50}$$

donde T es el periodo de la señal de entrada. Por tanto, la salida del comparador es proporcional a la correlación cruzada entre las señales de entrada. Si ambas entradas son senoidales, es decir,

$$x(t) = A_1 \cos \omega_c t\,, \tag{6.51}$$

$$y(t) = A_2 \cos \omega_c t\,, \tag{6.52}$$

entonces la ecuación (6.50) se convierte en (véase Ej. 4.4.2)

$$R_{xy}(\tau) = \tfrac{1}{2}A_1 A_2 \cos \omega_c \tau\,. \tag{6.53}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Como las entradas son senoidales, esto también puede expresarse en términos de la fase $\theta = \omega_c \tau$:

$$R_{xy}(\theta) = \tfrac{1}{2} A_1 A_2 \cos \theta . \tag{6.54}$$

Esto se muestra en la figura 6.22(a).

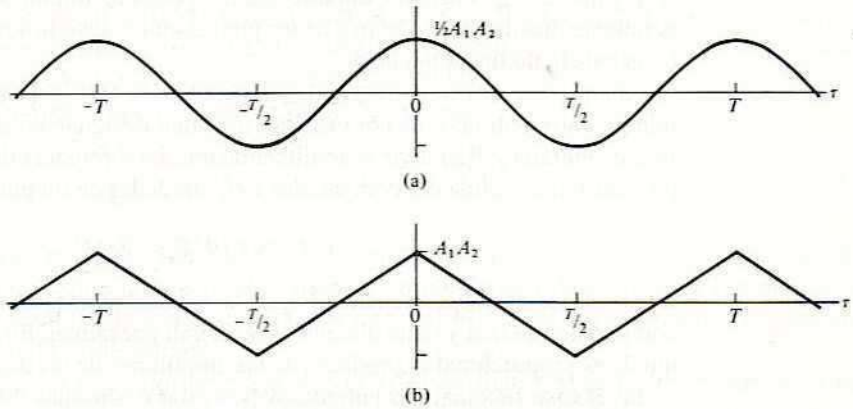


Figura 6.22 Características del comparador de fase para (a) dos entradas senoidales y (b) dos señales cuadradas.

También podrían haberse usado señales cuadradas para ambas señales de entrada. Por ejemplo, la entrada podría ser una senoidal de amplitud limitada y el VCO podría diseñarse para una salida de señal cuadrada. En este caso, la característica del comparador de fase es triangular (véase Ej. 4.4.1), como se muestra en la figura 6.22(b) (se supone valor promedio cero con valores pico A_1 y A_2). Otros casos (p. ej., una senoidal y una señal cuadrada) pueden resolverse con la ecuación (6.50).

De las características del comparador de fase de la figura 6.22, se observa que la salida es cero en múltiplos impares de $\pm T/4$; estos puntos se llaman *nulos*. Los nulos constituyen los puntos de operación deseados y el resto del PLL se diseña para mantener la diferencia en el tiempo entre las señales de entrada lo más cerca posible de los puntos de operación. Nótese que la salida del comparador de fase atraviesa un nulo con pendiente positiva para $\tau = -T/4 \pm T$ ($\theta = -\pi/2 \pm 2\pi$ para las senoidales) y con pendiente negativa para $\tau = T/4 \pm T$ ($\theta = \pi/2 \pm 2\pi$ para las senoidales).

Supóngase ahora que el lazo está operando en el punto nulo $\tau = T/4 \pm T$ y que la entrada se retarda en $\Delta\tau$. Esto provoca una pequeña tensión negativa en la salida del comparador (véase Fig. 6.22). Si la frecuencia del VCO aumenta con la tensión de entrada y la ganancia del lazo de retroalimentación es no inversora, el lazo producirá un retardo incremental de signo opuesto al de la entrada que tenderá a mantener el lazo cerca del punto de operación deseado. Por otra parte, si la ganancia de retroalimentación se invierte, el lazo producirá un retardo incremental que se sumará a $\Delta\tau$ y alejará al lazo del punto de operación. Por tanto, este nulo es un punto de operación estable para una ganancia que no invierte e inestable para la que invierte. Por el contrario, la pendiente

http://libreria-universitaria.blogspot.com

es positiva en el nulo $\tau = -T/4 \pm T$, por lo que este punto de operación es estable para una ganancia de lazo que invierte e inestable para la que no invierte. Nótese que, en todo caso, las relaciones son tales que la diferencia de tiempo entre las dos señales es de $\pm T/4$ (es decir, $\pm\pi/2$ para las senoidales).

Ambas características del comparador de fase de la figura 6.22 tienen pendientes lineales cerca de los nulos. La característica de señal cuadrada tiene la ventaja de que la pendiente es constante durante medio periodo, mientras que en la senoidal la pendiente disminuye al alejarse de los puntos nulos. Esto produce el efecto de un factor de ganancia no lineal del lazo.

Aunque las características del comparador de fase dependen de la diferencia de tiempo entre entradas, es conveniente usar una designación de fase tal que $\theta_i(t)$ es la fase de entrada y $\theta_f(t)$ la de retroalimentación. La diferencia de tiempo es $[\theta_i(t) - \theta_f(t)]$ y la tensión de salida del comparador $v_c(t)$ alrededor de un punto de operación es

$$v_c(t) = k_c[\theta_i(t) - \theta_f(t)]. \tag{6.55}$$

La constante de proporcionalidad k_c de la ecuación (6.55) es el factor de ganancia del comparador de fase y tiene dimensiones de volt por radián. En la figura 6.22 se observa que k_c es proporcional al producto de las amplitudes de las dos señales de entrada.

En el caso senoidal, las entradas deben estar desfasadas 90° en un nulo. Usando un multiplicador y un filtro pasabajas, la salida del comparador de fase es

$$\begin{aligned} v_c(t) &\propto A_1 \cos[\omega_c t + \theta_i(t)] A_2 \operatorname{sen}[\omega_c t + \theta_f(t)]_{LP} \\ &\propto \tfrac{1}{2} A_1 A_2 \operatorname{sen}[\theta_i(t) - \theta_f(t)], \end{aligned}$$

o

$$v_c(t) = k_c \operatorname{sen}[\theta_i(t) - \theta_f(t)]. \tag{6.56}$$

Si $[\theta_i(t) - \theta_f(t)]$ es pequeño, la ecuación (6.55) equivale a la (6.56). Por supuesto, la ecuación (6.55) debe restringirse al intervalo de operación $(-T/4, T/4)$ aun en el caso de la señal cuadrada. El análisis por medio de la ecuación (6.55) se llama de PLL "linealizado".

El filtro del lazo controla la respuesta dinámica del PLL. Se ha separado del filtro pasabajas del comparador de fase para destacar sus diferentes funciones. El propósito del filtro pasabajas en el comparador es suprimir los términos de segundo armónico, mientras que el filtro del lazo controla su respuesta dinámica. Designando como $h(t)$ a la respuesta a un impulso del filtro de lazo, la tensión de salida $v_o(t)$ es

$$v_o(t) = v_c(t) \circledast h(t). \tag{6.57}$$

El oscilador controlado por tensión (VCO) genera una señal periódica de amplitud constante (p. ej., una senoidal, una señal cuadrada, etc.) cuya frecuencia fundamental es proporcional a la tensión de entrada. Si ω_f es la frecuencia instantánea con respecto a la fundamental, se tiene

$$\omega_f(t) = k_f v_o(t), \tag{6.58}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

donde la tensión $v_o(t)$ es la salida del filtro de lazo [véase Fig. 6.21(b)]. La constante k_f tiene dimensiones de radianes por segundo por volt [véase Ec. (6.5)]. Entonces, la fase del VCO es, dentro de una constante arbitraria,

$$\theta_f(t) = k_f \int_0^t v_o(\xi)\, d\xi\,. \tag{6.59}$$

Las ecuaciones (6.55) [(6.56) para el caso no lineal], (6.57) y (6.59) describen la respuesta dinámica del PLL. Los parámetros controladores son los factores de ganancia del lazo, k_c, k_f y los parámetros del filtro del lazo.

Diferenciando la ecuación (6.59), se obtiene

$$v_o(t) = \frac{1}{k_f}\frac{d\theta_f}{dt}. \tag{6.60}$$

Si la ganancia del lazo es alta, $[\theta_i(t) - \theta_f(t)]$ es pequeño, $\theta_f(t) \approx \theta_i(t)$ y la ecuación (6.60) establece que la tensión de salida es proporcional a la frecuencia instantánea de la entrada referida a la portadora. Por tanto, el PLL efectúa la demodulación deseada de la señal FM de entrada.

Hemos supuesto que la entrada y el VCO se hallan a la misma frecuencia. Al principio esto puede no ser así, debido a lo cual el lazo debe atravesar por un proceso de adquisición para llegar a cerrarse. Si la diferencia de frecuencia es menor que el ancho de banda del lazo (es decir, el ancho de banda del lazo cerrado del PLL; esto se estudiará en la sección 6.7.3) el PLL se cerrará con rapidez. Esto es lo usual en la detección FM.

Si el intervalo de diferencias de frecuencia esperado es mucho mayor que el ancho de banda del lazo, la frecuencia del VCO puede barrerse a una velocidad adecuada para buscar la señal. En ausencia de ruido, esto es similar a la tasa de barrido del analizador de espectro para el cual (véase Problema 3.13.3) la restricción usual es que

$$\dot{f} < B^2, \tag{6.61}$$

donde $\dot{f}$ es la tasa de barrido de frecuencias y B el ancho de banda. La ecuación (6.61) se usa a menudo como cota superior de la tasa de barrido del PLL, aunque debe reducirse de manera considerable en presencia de ruido.

El barrido de frecuencia puede obtenerse aplicando una tensión rampa a la entrada del VCO. La rampa se genera cada vez que se alcanza un nivel de tensión preestablecido, reiniciando el barrido. Si éste es lo bastante lento, el lazo se cerrará cuando las frecuencias de la entrada y del VCO coincidan. Aunque la tensión de barrido puede dejarse para que el lazo cerrado controle éste, es conveniente tener un indicador que detenga automáticamente el barrido cuando el lazo se haya cerrado.

El indicador de cierre de uso más común es el comparador de fase en cuadratura mostrado en la figura 6.23. En situación abierta, las salidas de los comparadores de fase tienen valores promedio cercanos a cero. En situación cerrada, el comparador de fase principal tiene una salida proporcional a sen $(\theta_i - \theta_f)$ (para entradas senoidales), mientras que la salida en cuadratura es proporcional a cos $(\theta_i - \theta_f)$. Puesto que $(\theta_i - \theta_f)$ es pequeño en la situación cerrada, cos $(\theta_i - \theta_f) \approx 1$. Esta condición puede detectarse con un circuito de umbral que desconecte el barrido y conecte el PLL para una operación

http://libreria-universitaria.blogspot.com

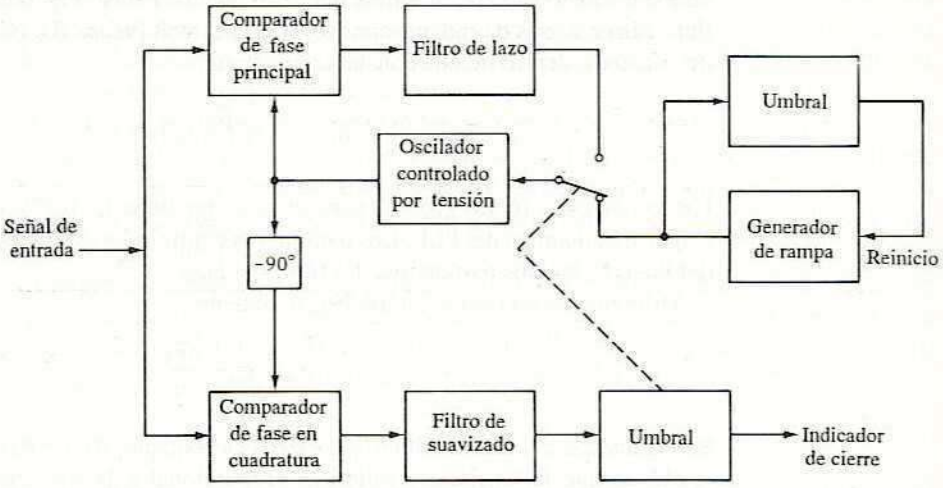


Figura 6.23 Adquisición por barrido del PLL.

normal. Sin los circuitos de adquisición, el indicador de cierre puede usarse para señalar la condición de cerrado (p. ej., el indicador de estéreo en la detección FM).

EJEMPLO 6.7.3

(a) Derive una ecuación íntegro-diferencial para $\theta_f(t)$ en términos de $\theta_i(t)$ para entradas senoidales al PLL. (b) Derive una ecuación diferencial para el caso en que no haya filtro de lazo y los errores de fase sean pequeños.

Solución a) Diferenciando la ecuación (6.59) y sustituyendo las ecuaciones (6.56) y (6.57), se obtiene

$$\frac{d\theta_f}{dt} = k_c k_f \operatorname{sen}[\theta_i(t) - \theta_f(t)] \circledast h(t) .$$

b) Para $h(t) = 1$ y sen $[\theta_i(t) - \theta_f(t)] \approx [\theta_i(t) - \theta_f(t)]$, se obtiene la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{d\theta_f}{dt} + k_c k_f \theta_f(t) = k_c k_f \theta_i(t) .$$

Por tanto, el PLL linealizado sin filtro en el lazo es un sistema de primer orden cuya constante de tiempo es $(k_c k_f)^{-1}$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJERCICIO 6.7.1

(a) Escriba la ecuación lineal diferencial del ejemplo 6.7.3(b) en términos de frecuencia.
(b) Halle ω_f para $t > 0$ si $\omega_i = u(t)$.

RESPUESTA: (a) $d\omega_f/dt + k_c k_f \omega_f(t) = k_c k_f \omega_i(t)$; (b) $1 - \exp(-k_c k_f t)$.

6.7.3 ★ Lazo de fase cerrada linealizado†

Para seguir adelante con el análisis del PLL, se linealiza la característica del comparador de fase y se aplica la transformada de Laplace a las ecuaciones (6.55), (6.57) y (6.59) para obtener, respectivamente,

$$V_c(s) = k_c[\theta_i(s) - \theta_f(s)], \tag{6.62}$$

$$V_o(s) = V_c(s)H(s), \tag{6.63}$$

$$\theta_f(s) = \frac{k_f}{s} V_o(s). \tag{6.64}$$

Combinando estas ecuaciones, se obtiene el modelo linealizado del PLL que se ilustra en la figura 6.24, por lo que puede escribirse

$$\theta_f(s) = k_c[\theta_i(s) - \theta_f(s)]H(s)k_f/s, \tag{6.65}$$

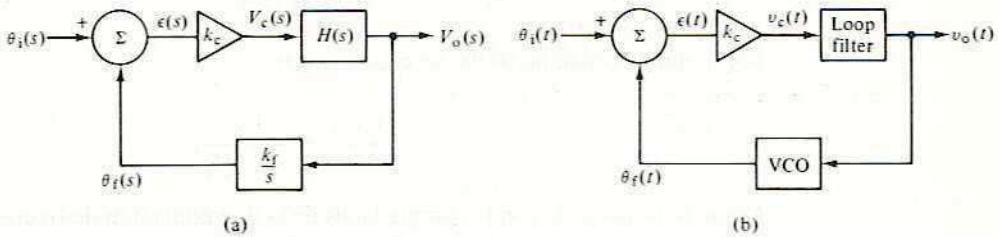


Figura 6.24 Modelo linealizado del PLL en (a) frecuencia y (b) tiempo.

o

$$\frac{\theta_f(s)}{\theta_i(s)} = \frac{k_c k_f H(s)}{s + k_c k_f H(s)}. \tag{6.66}$$

Esta última ecuación es el resultado básico para el PLL linealizado.

† Esta sección requiere cierto conocimiento de la transformada de Laplace.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

El error de fase del lazo $\epsilon(t)$ y la función de transferencia entrada-salida son dos magnitudes importantes en la demodulación de fase y de frecuencia. El primero puede hallarse de la ecuación (6.66) como sigue (véase Fig. 6.24a):

$$\frac{\epsilon(s)}{\theta_i(s)} = \frac{\theta_i(s) - \theta_f(s)}{\theta_i(s)} = 1 - \frac{\theta_f(s)}{\theta_i(s)}$$

$$= \frac{s}{s + k_c k_f H(s)}. \tag{6.67}$$

La última puede hallarse a partir de (véase Fig. 6.24a)

$$V_o(s) = k_c \epsilon(s) H(s),$$

o, usando la ecuación (6.67),

$$\frac{V_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{k_c s H(s)}{s + k_c k_f H(s)}. \tag{6.68}$$

Se han expresado la tensión de salida deseada $V_o(s)$ y el error de fase del lazo $\epsilon(s)$ en términos de la fase de entrada $\theta_i(s)$ y el filtro de lazo $H(s)$. Para proseguir, se requiere elegir la función de transferencia del filtro de lazo $H(s)$. Se examinan dos casos.

PLL de primer orden

El caso más simple es hacer

$$H(s) = 1 \tag{6.69}$$

por lo que la ecuación (6.68) se convierte en

$$\frac{V_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{k_c s}{s + k_c k_f}. \tag{6.70}$$

Como lo importante son las propiedades de la demodulación de frecuencia del PLL, se aplica un impulso unitario en *frecuencia* y se tiene

$$\theta_i(s) = 1/s, \tag{6.71}$$

y la ecuación (6.70) da

$$V_o(s) = \frac{k_c}{s + k_c k_f}. \tag{6.72}$$

Dado que el PLL se comporta como un sistema de primer orden, se llama *lazo de primer orden*. La frecuencia a –3 dB es

$$\omega_{-3\,\mathrm{dB}} = k_c k_f, \tag{6.73}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

y, por tanto, para evitar la atenuación del contenido de alta frecuencia, se requiere que el ancho de banda de modulación W satisfaga la restricción

$$W < k_c k_f . \tag{6.74}$$

Para un cambio en escalón, ω, de la frecuencia de entrada, se tiene

$$\theta_i(s) = \omega/s^2, \tag{6.75}$$

y la ecuación (6.70) da

$$V_o(s) = \frac{k_c \omega}{s(s + k_c k_f)}, \tag{6.76}$$

o

$$v_o(t) = \frac{\omega}{k_f}[1 - e^{-k_c k_f t}]u(t) . \tag{6.77}$$

La tensión de salida intenta seguir el escalón de frecuencia y, después de anularse los transitorios, produce la tensión deseada [véase Ec. (6.60)]

$$v_o(\infty) = \frac{\omega}{k_f}. \tag{6.78}$$

El error de fase del lazo para este escalón se halla a partir de las ecuaciones (6.67), (6.69) y (6.75):

$$\epsilon(s) = \frac{\omega}{s(s + k_c k_f)}, \tag{6.79}$$

o

$$\epsilon(t) = \frac{\omega}{k_c k_f}[1 - e^{-k_c k_f t}]u(t) . \tag{6.80}$$

Entonces, el error de fase de estado estacionario es

$$\epsilon(\infty) = \frac{\omega}{k_c k_f}. \tag{6.81}$$

Está claro que esto presupone que $|\epsilon(t)| < \pi/2$para las entradas de onda cuadrada o que $|\epsilon(t)| \ll \pi/2$ para las senoidales, a fin de mantener la linealidad.

El producto $k_c k_f$ es la ganancia de lazo. Para pequeños errores de fase, es deseable una alta ganancia de lazo [véase Ec. (6.81)]. Sin embargo, este producto es también el ancho de banda del lazo [véase Ec. (6.73)], por lo que una alta ganancia implica un gran ancho de banda. Debido a estas limitaciones, el PLL de primer orden se usa rara vez.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

PLL de segundo orden

La función de transferencia del filtro de lazo usada (o aproximada) a menudo en el PLL de segundo orden es†

$$H(s) = \frac{s\tau_2 + 1}{s\tau_1}, \tag{6.82}$$

donde τ_1, τ_2 son parámetros ajustables. Sustituyendo la ecuación (6.82) en la (6.68), se obtiene

$$\frac{V_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{k_c s(s\tau_2 + 1)}{\tau_1(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \tag{6.83}$$

donde la *frecuencia natural* ω_n y el *factor de amortiguamiento* ζ del lazo son parámetros usados normalmente en la teoría de los sistemas de segundo orden y están dados por

$$\omega_n = \sqrt{k_c k_f/\tau_1}, \tag{6.84}$$

$$\zeta = \omega_n\tau_2/2. \tag{6.85}$$

Para un impulso unitario de frecuencia, se sustituye la ecuación (6.71) en la (6.83):

$$V_o(s) = \frac{k_c(s\tau_2 + 1)}{\tau_1(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}, \tag{6.86}$$

la cual muestra el comportamiento de segundo orden del PLL. En general, el PLL se opera con un amortiguamiento ligeramente menor que el "crítico" ($\zeta = 1$) para obtener una respuesta rápida. Nuestro interés se centra en el intervalo $1/2 < \zeta < 1$ ($\zeta = 1/\sqrt{2} = 0.707$ es un valor usual). Dentro de este intervalo, el ancho de banda a −3 dB de la ecuación (6.86) es aproximadamente

$$\omega_{-3\,\mathrm{dB}} \approx (1 + \sqrt{2}\,\zeta)\omega_n \quad \text{para } \tfrac{1}{2} < \zeta < 1. \tag{6.87}$$

Para el ancho de banda de modulación W, se usa a menudo el criterio un poco más conservador

$$W < 2\omega_n\zeta. \tag{6.88}$$

Para un cambio en escalón de frecuencia, las ecuaciones (6.75) y (6.83) dan

$$V_o(s) = \frac{k_c\omega}{\tau_1}\frac{s\tau_2 + 1}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}, \tag{6.89}$$

cuya solución en el tiempo, para $\zeta^2 < 1$, es

$$v_o(t) = \frac{\omega}{k_f}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \phi\right)\right]u(t), \tag{6.90}$$

† Esto se conoce como filtro de *adelanto-retraso* en la teoría de los sistemas retroalimentados.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

donde $\phi = \tan^{-1}(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})$. Tras desaparecer los transitorios, la ecuación (6.90) da†

$$v_o(\infty) = \omega/k_f . \tag{6.91}$$

El error de fase del lazo se halla usando las ecuaciones (6.67) y (6.82):

$$\frac{\epsilon(s)}{\theta_i(s)} = \frac{s^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} . \tag{6.92}$$

Como en el caso del lazo de primer orden, éste exhibe una característica pasaaltas y muestra que el lazo no puede mantenerse con cambios de fase rápidos. Aplicando un escalón de frecuencia y sustituyendo la ecuación (6.75) en la (6.92), se obtiene

$$\epsilon(s) = \frac{\omega}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} , \tag{6.93}$$

cuya solución en el tiempo, para $\zeta^2 < 1$, es

$$\epsilon(t) = \frac{\omega}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\, t)u(t) . \tag{6.94}$$

Luego de desaparecer los transitorios, la ecuación (6.94) da

$$\epsilon(\infty) = 0 . \tag{6.95}$$

A diferencia del lazo de primer orden, el PLL de segundo orden elimina el error de fase estático debido al cambio en escalón de frecuencia y devuelve la característica del comparador de fase al punto nulo. Esto, junto con la facilidad de ajuste de la respuesta dinámica del lazo, es lo que hace que la mayoría de los sistemas PLL se operen como de segundo orden.

El error de fase pico se halla haciendo $d\epsilon/dt = 0$ y resolviendo para obtener

$$\epsilon_p = \frac{\omega}{\zeta\omega_n\chi} \exp\left[-\frac{\tan^{-1}\chi}{\chi}\right] \operatorname{sen}(\tan^{-1}\chi) , \tag{6.96}$$

donde

$$\chi = \sqrt{1-\zeta^2}/\zeta .$$

Para un valor dado de ζ, la ecuación (6.96) se ajusta al máximo error de fase para un cambio en escalón de frecuencia.

Ahora se investigará el caso senoidal. Supóngase que la modulación de frecuencia es senoidal con frecuencia ω_m y desviación de frecuencia pico $\Delta\omega$. La desviación de fase pico es $\Delta\omega/\omega_m = \beta$ y, de la ecuación (6.92), la magnitud del error de fase es

$$|\epsilon(\omega)| = \frac{\beta\omega^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}} \qquad \text{(caso senoidal).} \tag{6.97}$$

† Puede usarse el teorema del valor final de la transformada de Laplace, que da este resultado para ζ en general, usándolo junto con las ecuaciones (6.89) y (6.84).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Para $\omega = \omega_m$ y $\Delta\omega$ fijo, haciendo $d\epsilon/d\omega_m = 0$ y resolviendo, se halla que el error máximo ocurre cuando $\omega_m = \omega_n$. Usando este valor en la ecuación (6.97), se obtiene

$$\epsilon_p = \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_n}\right)\frac{1}{2\zeta} \quad \text{(caso senoidal).} \tag{6.98}$$

Para una demodulación FM sin distorsión, esta fase pico debe mantenerse dentro del intervalo lineal de la característica del comparador de fase.

El PLL de segundo orden tiene dos parámetros, ω_n, ζ, que se pueden controlar con la selección de τ_2 y $k_c k_f/\tau_1$. Este PLL tiene un buen comportamiento y es muy utilizado. Sólo para aplicaciones muy especiales la complejidad justifica un sistema de orden superior.

EJEMPLO 6.7.4

Determine los parámetros de diseño de un PLL de segundo orden y banda mínima para demodular FM comercial. Base su diseño en una señal FM senoidal con $\Delta f = 75$ kHz, $0 \le f_m \le 75$ kHz. Suponga una característica triangular del comparador de fase, $\zeta = 0.707$ y $\tau_1 = \tau_2$.

Solución El PLL debe demodular la señal con ganancia uniforme y mantenerse en la característica lineal del comparador de fase. De la ecuación (6.88), se tiene

$$f_n > f_m/(2\zeta) = 53 \text{ kHz}.$$

De la ecuación (6.98), el error de fase pico para $\zeta = 0.707$ es

$$\epsilon_p = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_n}\right) < \frac{\pi}{2},$$

o

$$f_n > \sqrt{2}\,\Delta f/\pi = 34 \text{ kHz}.$$

Por tanto, se elige $f_n = 53$ kHz; de la ecuación (6.85),

$$\tau_2 = 2\zeta/\omega_n = 4.24\ \mu\text{s}.$$

Usando la ecuación (6.84) y notando que $\tau_1 = \tau_2$, encontramos

$$k_c k_f = \frac{2}{\omega_n}\zeta\omega_n^2 = 4.71 \times 10^5/\text{s}.$$

EJERCICIO 6.7.2

Un escalón de frecuencia de 25 kHz se aplica al PLL del ejemplo 6.7.4. Si $k_c = 1$ V/rad, determine (a) el error de fase pico y (b) la salida de tensión en estado estacionario.

RESPUESTA: (a) 12.3°; (b) 0.333 V.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

6.8 RAZÓN SEÑAL A RUIDO EN LA RECEPCIÓN DE FM

El propósito aquí es examinar los efectos del ruido blanco de banda limitada en el proceso de demodulación de frecuencia. En la figura 6.25 aparece el diagrama de bloques de un receptor FM idealizado. La razón señal a ruido se define como el cociente de la potencia media de la señal sin ruido entre la potencia media de ruido en presencia de una portadora no modulada.†

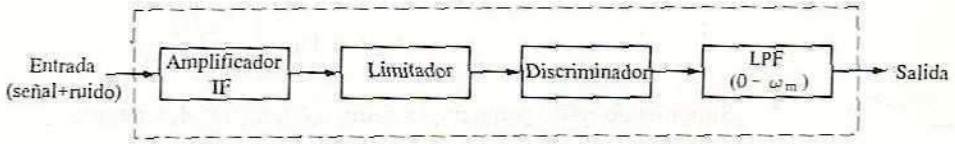


Figura 6.25 Receptor de FM idealizado.

Suponiendo que el limitador es ideal y elimina todas las variaciones de amplitud, la señal FM en la entrada del discriminador puede escribirse como

$$s_i(t) = A \cos \theta(t) ,$$

$$s_i(t) = A \cos \left[\omega_c t + k_f \int_0^t f(\tau)\, d\tau \right] . \tag{6.99}$$

La salida del discriminador es proporcional a la diferencia entre la frecuencia instantánea de $s_i(t)$ y la frecuencia de la portadora. Haciendo, por conveniencia, que la constante de proporcionalidad valga 1,

$$s_o(t) = \left(\frac{d\theta}{dt} - \omega_c \right) = k_f f(t) . \tag{6.100}$$

El valor cuadrático medio de la señal de salida es

$$S_o = \overline{s_o^2(t)} = k_f^2 \overline{f^2(t)} . \tag{6.101}$$

Ahora corresponde calcular la potencia media del ruido de salida en presencia de una portadora no modulada. Usando la representación pasabanda del ruido de banda limitada [véase Ec. (5.59)], se puede escribir (véase Fig. 6.26),

$$\begin{aligned} A \cos \omega_c t + n_i(t) &= A \cos \omega_c t + n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \operatorname{sen} \omega_c t \\ &= r(t) \cos[\omega_c t - \gamma(t)] . \end{aligned} \tag{6.102}$$

Por tanto, la adición de ruido introduce tanto ruido de amplitud [en $r(t)$] como de fase [en $\gamma(t)$]. En la AM interesaban los efectos de $r(t)$, pero en la FM puede suponerse limitación de amplitud y sólo interesa $\gamma(t)$.

---

† En otras palabras, se supone que la potencia de ruido de entrada puede calcularse de manera independiente de la potencia de la señal moduladora. La justificación para la elección de FM de banda ancha en presencia de ruido blanco se da en B. P. Lathi, *Communication Systems*, Nueva York, John Wiley & Sons, 1968, pág. 363.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

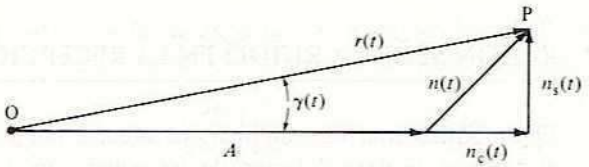


Figura 6.26 Diagrama fasorial de la suma de una señal seno y ruido de banda angosta, para el caso de *S/N* alta.

El valor principal del ángulo de ruido de fase es

$$\gamma(t) = \tan^{-1}\left[\frac{n_s(t)}{A + n_c(t)}\right]. \tag{6.103}$$

Suponiendo ruido pequeño, es decir, $n_c(t)$, $n_s(t) \ll A$, tenemos

$$\gamma(t) \approx \tan^{-1}\left[\frac{n_s(t)}{A}\right] \approx \frac{n_s(t)}{A}. \tag{6.104}$$

La salida del discriminador es proporcional a la diferencia entre la frecuencia instantánea y la portadora, por lo que

$$n_o(t) = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{A}\frac{d}{dt}[n_s(t)]. \tag{6.105}$$

La densidad espectral de potencia correspondiente a la ecuación (6.105) es

$$S_{n_o}(\omega) = \frac{1}{A^2} S_{n_s}(\omega)\,|H(\omega)|^2, \tag{6.106}$$

donde $\mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = h(t)$ es un derivador en el tiempo. Sin embargo, la transformada de Fourier equivalente a la derivación en el tiempo es la multiplicación por $(j\omega)$, de manera que

$$S_{n_o}(\omega) = \frac{1}{A^2}\omega^2 S_{n_s}(\omega). \tag{6.107}$$

Por tanto, se destacan los componentes espectrales a mayores frecuencias; ésta es una consecuencia general del derivador.

El ancho de banda de la salida del discriminador está limitado por un filtro pasabajas con frecuencia de corte de ω_m radianes por segundo. Con la ecuación (5.65) puede expresarse la densidad espectral de potencia dentro de este ancho de banda por medio de

$$S_{n_s}(\omega) = [S_n(\omega - \omega_c) + S_n(\omega + \omega_c)]_{LP}. \tag{6.108}$$

Si el ruido en la entrada del discriminador es blanco,

$$S_n(\omega) = \eta/2,$$

La ecuación (6.108) se reduce a

$$S_{n_s}(\omega) = \eta,$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

y la ecuación (6.107) se convierte en

$$S_{n_o}(\omega) = \eta\omega^2/A^2. \tag{6.109}$$

En otras palabras, si se supone densidad espectral de ruido blanco en la entrada del discriminador, la densidad espectral de ruido de salida será parabólica (véase Fig. 6.27).

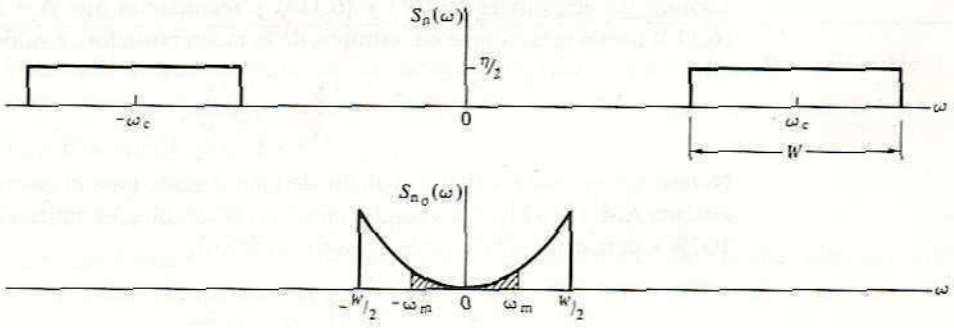


Figura 6.27 Densidades espectrales de ruido de entrada y salida para el demodulador FM en condiciones de alta razón portadora a ruido.

Usando la ecuación (6.109), el valor cuadrático medio del ruido de salida es

$$N_o = \overline{n_o^2(t)} = \frac{\eta}{\pi A^2}\int_0^{\omega_m} \omega^2\, d\omega\,,$$

$$N_o = \frac{\eta\omega_m^3}{3\pi A^2}. \tag{6.110}$$

La potencia media de la portadora es

$$S_c = A^2/2\,. \tag{6.111}$$

Comparando las ecuaciones (6.110) y (6.111), se ve que la potencia de ruido de salida es inversamente proporcional, en FM, a la potencia media portadora. Este efecto de disminución de la potencia de ruido de salida al aumentar la potencia portadora se llama *silenciamiento del ruido*.

Combinando las ecuaciones (6.101) y (6.110), se tiene

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{3\pi A^2 k_f^2 \overline{f^2(t)}}{\eta\omega_m^3}. \tag{6.112}$$

La desviación de frecuencia pico es proporcional a k_f; en el caso de banda ancha, la banda aumenta en proporción a k_f. *Se concluye que, para la FM de banda ancha, la razón señal a ruido en la salida aumenta con el cuadrado del ancho de banda.* En particular, si $f(t)$ es senoidal [esto es, $f(t) = a\cos\omega_m t$ y $\Delta\omega = ak_f$], la ecuación (6.112) se convierte en

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{3\pi A^2(\Delta\omega)^2}{2\eta\omega_m^3} = \frac{3\pi A^2\beta^2}{2\eta\omega_m}. \tag{6.113}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Como comparación entre AM y FM, considérese modulación senoidal en ambos casos y defínase el ruido cuadrático medio en la IF para el caso de AM por medio de

$$N_c = \frac{1}{\pi}\int_{\omega_c-\omega_m}^{\omega_c+\omega_m}\frac{\eta}{2}d\omega = \frac{\eta\omega_m}{\pi}. \tag{6.114}$$

Usando las ecuaciones (6.111) y (6.114) y recordando que $\beta = \Delta\omega/\omega_m$, la ecuación (6.113) puede reescribirse en términos de la razón portadora a ruido

$$\frac{S_o}{N_o} = 3\beta^2\frac{S_c}{N_c}. \tag{6.115}$$

Nótese que en este resultado el ancho de banda usado para el cálculo de N_c es el de un sistema AM. En AM, en las condiciones más favorables, el índice de modulación es del 100% y para estas condiciones [véase Ec. (5.90)],

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{AM} = \frac{S_c}{N_c}. \tag{6.116}$$

Usando la ecuación (6.116) en la (6.115), se obtiene el resultado final:

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{FM} = 3\beta^2\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{AM}. \tag{6.117}$$

De aquí se deduce que la razón señal a ruido puede hacerse mucho mayor en FM que en AM, aumentando el índice de modulación β. Por supuesto, debe recordarse que se supuso ruido pequeño al deducir este resultado. Los efectos del ruido en la salida se reducen y el factor $3\beta^2$ se llama silenciamiento del ruido del sistema [esto se expresa en decibeles tomando $10\log_{10}(3\beta^2)$]. Sin embargo, un aumento de β también provoca un incremento del ancho de banda, por lo que los sistemas FM producen una mejora en señal a ruido a expensas de un aumento del ancho de banda. Por ejemplo, cuando $\beta = 5$, la razón señal a ruido de salida es 75 veces mayor que la de un sistema AM equivalente, pero el ancho de banda requerido es aproximadamente 8 veces mayor (véase Fig. 6.11). Por tanto, el uso de FM permite intercambiar ancho de banda por razón señal a ruido.

Para obtener en FM cualquier mejora sobre AM en la razón señal a ruido, se debe cumplir, a partir de la ecuación (6.117),

$$\beta > \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577.$$

Sin embargo, esta condición es aproximadamente el punto de transición entre las FM de banda angosta y de banda ancha. Por ello, la FM de banda angosta no proporciona ninguna mejora señal a ruido con respecto a la AM. Éste es un resultado lógico ya que la NBFM no usa aumento de ancho de banda que pueda intercambiarse por mejora de la razón señal a ruido.

Este intercambio en FM no puede continuar de manera indefinida. La razón es que la potencia de ruido se incrementa al aumentar el ancho de banda del receptor requerido para demodular la señal. Suponiendo que la potencia de la señal es fija, la de ruido llega a ser comparable a aquélla y los anteriores resultados ya no son válidos.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Cuando la potencia de ruido se hace mayor en la modulación de ángulo, aparecen las variaciones de fase del ruido y el comportamiento del sistema resulta muy pobre. Esta transición depende mucho de la razón señal a ruido, dando origen a un efecto de "umbral" (Sec. 6.9).

EJEMPLO 6.8.1

Desarrolle un resultado similar a la ecuación (6.117) para la mejora de la PM sobre la AM.

Solución Para PM, puede escribirse

$$s_i(t) = A \cos [\omega_c t + k_p f(t)] .$$

La salida del detector de fase es proporcional a la diferencia entre la fase instantánea de $s_i(t)$ y la fase portadora,

$$s_o(t) = [\theta(t) - \omega_c t] = k_p f(t) .$$

De igual modo, usando la ecuación (6.104), el ruido de salida para condiciones de alta razón señal a ruido es

$$n_o(t) = n_s(t)/A ,$$

$$S_{n_o}(\omega) = \frac{1}{A^2} S_{n_s}(\omega) .$$

Suponiendo que la densidad espectral del ruido de entrada es blanca e igual a $\eta/2$ watts por Hz, escribimos

$$\overline{n_o^2(t)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_m} \frac{1}{A^2} \eta \, d\omega = \frac{\eta \omega_m}{\pi A^2} .$$

Entonces, la razón señal a ruido de salida es

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{\overline{s_o^2(t)}}{\overline{n_o^2(t)}} = \pi A^2 \frac{k_p^2 \overline{f^2(t)}}{\eta \omega_m} .$$

Para el caso senoidal, $\overline{f^2(t)} = a^2/2$ y $\Delta\theta = ak_p$ de modo que

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{\pi A^2}{2\eta \omega_m} (\Delta\theta)^2 .$$

Comparado con AM con modulación del 100%, esto se convierte en

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{PM} = (\Delta\theta)^2 \left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{AM} .$$

Dado que $\Delta\theta = \beta$ para PM, se concluye que la mejora señal a ruido en PM es similar a la de FM.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJERCICIO 6.8.1

La señal PM de banda angosta

$$\phi_{\text{NBPM}}(t) = \cos \omega_c t - \beta \cos \omega_m t \operatorname{sen} \omega_c t$$

debe demodularse usando un detector síncrono, es decir, multiplicando por $\cos(\omega_c t + \theta)$ seguido de un filtro pasabajas. Determine (a) si esto funcionará satisfactoriamente y (b) qué valor de θ hará falta para obtener mejores resultados.

RESPUESTA: (a) Sí; (b) $\pm\pi/2$.

Antes de abandonar este examen de las razones *S/N*, divaguemos un poco para completar la comparación de los sistemas de modulación de señal continua (CW) que se inició en el capítulo 5. Los resultados se resumen en la tabla 6.1. Por conveniencia, en esta tabla se han normalizado las razones *S/N* de entrada para el caso de ruido blanco de banda limitada con densidad espectral de potencia $S_n(\omega) = \eta/2$ W/Hz y ancho de banda f_m igual al de la señal moduladora de entrada. Esto coloca a los sistemas de modulación de única y de doble banda lateral sobre una misma base para las comparaciones *S/N*.

En la tabla 6.1 se hace evidente que los sistemas SSB y VSB ofrecen eficiencia espectral, y sólo necesitan tanto ancho de banda (o ligeramente más) que la señal moduladora de entrada. Por el contrario, los sistemas de modulación de ángulo ofrecen mayor *S/N* a expensas de algún ancho de banda. Los sistemas de modulación de amplitud de gran portadora usan, en general, detección de envolvente para minimizar la comple-

TABLA 6.1 Comparación de sistemas de modulación CW

Modulación	B/f_m	$\frac{S_o}{N_o}\left(\frac{S_i}{\eta f_m}\right)^{-1}$	$\frac{S_o}{N_o}\left(\frac{S_c}{\eta f_m}\right)^{-1}$	Aplicaciones típicas
DSB-SC	2	1		Instrumentación analógica, multiplexión
DSB-LC[a]	2	$\frac{\overline{f^2(t)}}{A^2 + \overline{f^2(t)}}$	$\frac{\overline{f^2(t)}}{A^2}$	Radiodifusión, voz punto a punto
SSB-SC	1	1		Voz punto a punto, multiplexión
SSB-LC[a]	1	$\frac{\overline{f^2(t)}}{A^2 + \overline{f^2(t)}}$	$\frac{\overline{f^2(t)}}{A^2}$	Voz punto a punto
VSB-SC	1^+	1		Facsímil, datos digitales
VSB-LC[a]	1^+	$\frac{\overline{f^2(t)}}{A^2 + \overline{f^2(t)}}$	$\frac{\overline{f^2(t)}}{A^2}$	Video de televisión
FM[b]	$\approx 2(1 + \beta)$		$\frac{3}{2}\beta^2$	Radiodifusión, radio móvil
PM[b]	$\approx 2(1 + \beta)$		$\frac{1}{2}(\Delta\theta)^2$	Telemetría, datos digitales

[a] Se supone por encima del umbral de detección de la envolvente supuesto; para modulación senoidal, $f(t) = mA\cos\omega_m t$ tal que $\overline{f^2(t)} = m^2A^2/2$.

[b] Se supone por encima del umbral de detección supuesto; sin deénfasis ni modulación senoidal.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

jidad del receptor. Los sistemas de modulación de ángulo y SSB-SC requieren una moderada complejidad del receptor, mientras que otros tipos de transmisiones de portadora suprimida necesitan receptores mucho más complejos. Cada método tiene ventajas y desventajas, que deben evaluarse en cada situación concreta.

6.9 EFECTO DE UMBRAL EN FM

En FM, el efecto de umbral resulta muy pronunciado. Dado que ocurre cuando los niveles de la señal y el ruido son comparables, es más difícil de analizar que el caso de alta razón señal a ruido.

Para comprender esto, considérese el siguiente problema simplificado. Dos fasores, A y B, mostrados en la figura 6.28(a), se suman para dar un fasor resultante C. Para simplificar, se supone que las magnitudes de A y B son fijas y que el ángulo de B puede tomar todos los valores del intervalo $-\pi < \theta_B \leq \pi$ con igual ponderación. El ángulo del fasor A se mantiene fijo. Este fasor puede usarse para representar la señal y el fasor B el ruido. Deseamos hallar el valor cuadrático medio del ángulo de fase θ_c de la resultante, lo que representará el ruido de fase promedio en la medición del ángulo.

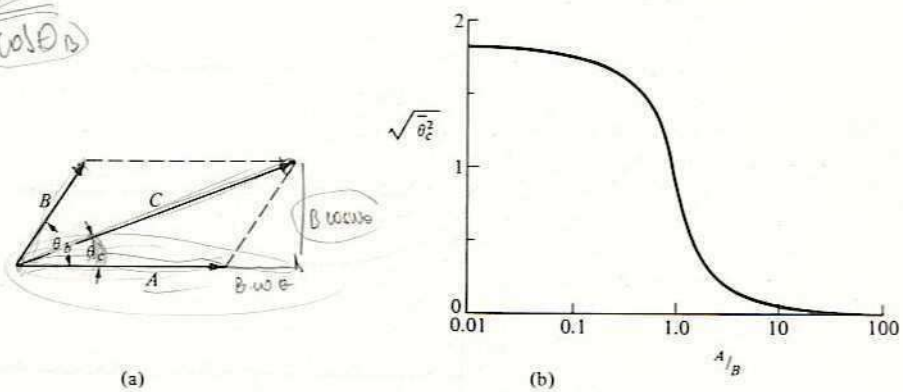


Figura 6.28 Diagrama fasorial y determinación del ruido de fase.

De la figura 6.28(a), podemos escribir

$$\theta_C = \tan^{-1}\left(\frac{B \operatorname{sen} \theta_B}{A + B \cos \theta_B}\right), \tag{6.118}$$

de manera que el valor cuadrático medio es

$$\overline{\theta_C^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{B \operatorname{sen} \theta_B}{A + B \cos \theta_B}\right)\right]^2 d\theta_B . \tag{6.119}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Ésta se puede resolver en forma numérica, y los resultados se muestran en la figura 6.28(b). Nótese que en este modelo simplificado la razón A/B puede tomarse como una razón señal a ruido en tensión. A partir de estos resultados, puede verse que el ruido de fase cuadrático medio aumenta con rapidez cuando A/B es menor que alrededor de tres.

En realidad, el problema es más complicado porque la amplitud del ruido varía y la modulación de ángulo de la señal tiene también algún efecto. Hay también otro efecto peculiar de la FM que hace más abrupto aún el efecto de umbral, lo que se verá a continuación.

Volviendo a la figura 6.26, se nota que el extremo del fasor resultante, marcado como punto P, se mueve alrededor del entorno del extremo del fasor portador A debido a las fluctuaciones aleatorias del ruido aditivo $n(t)$. Mientras $n(t) \ll A$, el punto P se mantiene cerca del extremo del fasor portador A, y el valor principal del ángulo $\gamma(t)$ es aproximadamente $n_s(t)/A$, como se da en la ecuación (6.104). A medida que crece la magnitud del ruido, aumentan las fluctuaciones del punto P con respecto al extremo del fasor portador, y en consecuencia se incrementa el ruido de salida del discriminador.

Sin embargo, a medida que aumenta el ruido, se alcanza una condición en la que la magnitud del fasor $n(t)$ no sólo puede exceder a la magnitud del fasor portador, sino que los ángulos pueden ser tales que el punto P barra *alrededor* del origen (punto O). Esta última condición se demuestra en la figura 6.29(a). El efecto neto es que el ángulo

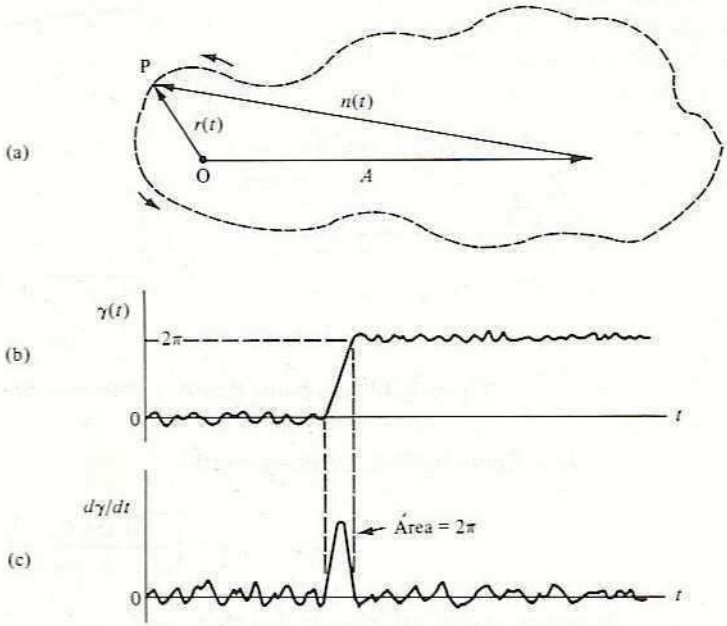


Figura 6.29 (a) Diagrama fasorial de la suma de una onda senoidal y ruido de banda estrecha, caso de S/N pequeño. (b) Ejemplo de $\gamma(t)$ para un caso en el que un punto P rodea el origen (punto O).(c) Gráfica de la resultante $d\gamma/dt$, que muestra ruido de espiga.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

de fase $\gamma(t)$ puede cambiar en $\pm 2\pi$ radianes en un intervalo de tiempo muy corto, como se ilustra en la figura 6.29(b). Como la salida del discriminador de FM es proporcional a $d\gamma/dt$, ocurrirán espigas de ruido parecidas a impulsos cada vez que el fasor resultante rodee el punto O. Esto se ilustra en la figura 6.29(c). Las alturas y polaridades de estas espigas de ruido variarán dependiendo de las trayectorias tomadas por P alrededor de O, aunque el área de cada una es aproximadamente de $\pm 2\pi$ radianes.

De manera experimental, se halla que las ocasionales espigas de ruido se oyen como "clics" individuales en la salida del discriminador de FM. Por tanto, a la irrupción de ruido de espiga en FM se le llama en ocasiones ruido "clic". Si la razón señal a ruido se reduce un poco, estos "clics" se funden con gran rapidez en un ruido muy fuerte. Como resultado de ello, la razón señal a ruido en la salida disminuye en forma acelerada con tan sólo una disminución relativamente pequeña de la S/N de entrada, y ahora los resultados descritos en la sección precedente ya no describen de manera adecuada el comportamiento. Esto da origen a un efecto de umbral de FM muy pronunciado.

La presencia de la modulación varía el ángulo instantáneo del fasor portador de la figura 6.29(a). El comportamiento resultante cerca de la condición de umbral es tal que, en un momento dado, ocurren mayores rodeos alrededor de O en una dirección que en la otra. El caso es que la reducción resultante de los rodeos en una dirección no llega a compensar el aumento de los rodeos en la otra. Por tanto, existe cierta dependencia en la modulación, aunque este efecto es secundario.

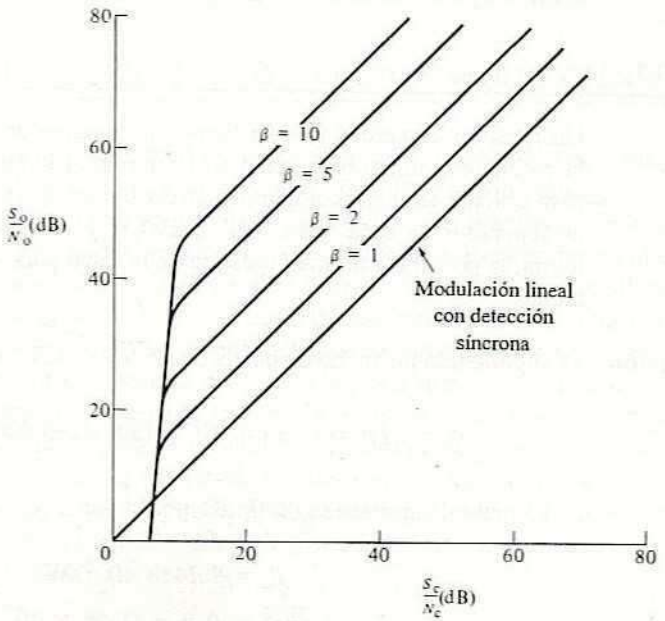


Figura 6.30 Comportamiento señal a ruido de la FM de banda ancha.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En la figura 6.30 se muestran las características del comportamiento señal a ruido de un sistema FM de banda ancha. La dependencia del umbral en el valor de β es pequeña, y la razón de entrada señal a ruido que debe alcanzarse por encima del umbral se toma en general alrededor de 10 dB para β grande. Nótese que para razones señal a ruido de entrada pequeñas, el sistema FM puede en realidad ser inferior al AM. La magnitud del silenciamiento de ruido por encima del umbral aumenta con β, como se apuntó antes.

El aprovechamiento del umbral FM ha sido tema de considerable investigación, en particular para comunicaciones especiales donde la potencia es de gran importancia y las razones señal a ruido no pueden ser muy grandes. Un método muy exitoso para extender el umbral FM a valores más bajos es el del lazo de fase cerrada (PLL, *phase-locked loop*). La aparición de una espiga de ruido en el PLL causa que el error de fase exceda $\pm T/4$ ($\pm 90°$) en la característica del comparador de fase (véase Fig. 6.22). Sin embargo, el intervalo dinámico de la salida del PLL está limitado por el comparador y, por tanto, la energía neta debida a la espiga de ruido se reduce. Se ha hallado que la corrección global del umbral lo reduce en alrededor de 3 dB con el uso del PLL.

Otros métodos exitosos para extender el umbral FM incluyen el lazo de frecuencia cerrada y la FM con retroalimentación (FMFB). En la referencia 7 puede hallarse un estudio sobre éstos.

Por supuesto, no existe razón alguna para que la segunda señal del ejemplo del fasor no pudiera haber sido una segunda señal FM o PM. En este caso, lo que interesa es la razón señal a interferencia. La transición algo brusca de la buena a la mala razón interferencia a señal en la FM produce una supresión muy definida de señales pequeñas en presencia de otras mayores. Este efecto, junto con una mayor frecuencia portadora, define mejor las áreas de servicio para la FM comercial que para la AM.

EJEMPLO 6.9.1

Un receptor comercial de FM tiene una temperatura de ruido de 210 K. (a) Estime la potencia mínima de la señal en las terminales del generador de prueba, requerida para obtener silencio completo. La resistencia de entrada es de 300 Ω; suponga que el generador de señales se halla a 290 K y acoplado al receptor. (b) ¿Cuál es, en teoría, la potencia mínima necesaria de la señal para silencio completo en estas condiciones?

Solución a) Suponiendo un ancho de banda de IF de 180 kHz, la potencia de ruido disponible es

$$P_n = kTB = (1.38 \times 10^{-23})(500)(180\,000) = 1.24 \times 10^{-15}\ \text{W}.$$

El umbral supuesto es de 10 dB, por lo que

$$P_s = 1.24 \times 10^{-14}\ \text{W},$$
$$\overline{e_s^2(t)} = P_s R = (1.24 \times 10^{-14})(300),$$
$$\sqrt{\overline{e_s^2(t)}} = 1.93\ \mu\text{V}.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

b) Para que el receptor no produzca ruido, $T = 290$ K (del generador de señales), de modo que

$$P_s = 10\, kT_0B = 7.20 \times 10^{-15}\ \text{W},$$
$$\overline{e_s^2(t)} = (300)\,(7.20 \times 10^{-15}),$$
$$\sqrt{\overline{e_s^2(t)}} = 1.47\ \mu\text{V}.$$

★ EJERCICIO 6.9.1

Un sistema de telemetría para transmisiones meteorológicas por satélite usa un ancho de banda (pasabajas) de 1.6 kHz. Éste se modula en una portadora de 2.4 kHz usando DSB-SC y luego modulación en frecuencia (AM/FM).

a) Por medio de la regla de Carson, estime el ancho de banda requerido para el receptor si la desviación de frecuencia pico se ajusta a 20 kHz.

b) Estime la máxima temperatura de ruido del receptor si el nivel mínimo de la señal es de 1 μV rms a través de 75 Ω y la temperatura de ruido de la antena es de 1150 K.

RESPUESTA: (a) 48 kHz; (b) 863 K.

6.10 MEJORA DE LA RAZÓN SEÑAL A RUIDO USANDO DEÉNFASIS

En la radiodifusión comercial FM se halla que las señales de voz y música tienen la mayor parte de la energía a las más bajas frecuencias. Sin embargo, en la salida del demodulador FM, la densidad espectral de potencia de ruido crece parabólicamente con la frecuencia, por lo cual es mayor en el intervalo de frecuencias en que la densidad espectral de la señal es menor. Esto da lugar a un sistema de comunicación bastante ineficiente. Para remediar esto, se acentúan las componentes de alta frecuencia de la señal de entrada al transmisor, *antes de que se introduzca el ruido*. En la salida del demodulador FM del receptor se efectúa la operación inversa por medio del deénfasis de los componentes de alta frecuencia. El espectro de la señal recupera su forma original pero ahora se reduce el ruido, que se agregó después del preénfasis.

El uso de la técnica de preénfasis-deénfasis es un ejemplo de cómo el conocimiento de las diferencias entre las características de la señal y el ruido pueden aplicarse en el mejoramiento del sistema de comunicación. Esta técnica tiene otras aplicaciones, en particular en la grabación de audio.†

† Se ha despertado mucho interés en aplicar combinaciones de filtrado de preénfasis y compresión de la amplitud de la señal en el intervalo dinámico para suprimir los efectos del ruido en las grabaciones de audio. Esto se estudia en el apéndice F.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Debe tenerse algún cuidado al seleccionar el preénfasis que se habrá de usar. Si las componentes de alta frecuencia se acentúan demasiado, el ancho de banda del espectro FM transmitido crecerá, a menos que se reduzca β, cancelando la ventaja. Un enfoque simple y directo es elegir una característica de preénfasis que proporcione una densidad espectral de ruido blanco tras la demodulación. Como la densidad espectral de potencia de ruido en la salida del demodulador FM crece en forma parabólica con la frecuencia, usamos entonces un preénfasis acoplado para la señal; esto requiere que $|H(\omega)|^2 = \omega^2$, lo cual sugiere la posibilidad de que $H(\omega) = j\omega$. Esta función de transferencia corresponde a un derivador, y llegamos al sorprendente resultado de que debería usarse ¡PM en lugar de FM! Sin embargo, si se usara completamente PM, el ancho de banda sería más difícil de controlar para uso comercial. Resulta obvio que lo mejor es combinar ambos métodos de modulación.

Así, lo que se necesita es un filtro cuya función de transferencia sea constante para bajas frecuencias y se comporte como derivador para las más altas. En la figura 6.31(a) se muestra un ejemplo de red *RC* que se aproxima a este tipo de respuesta. También aparece la gráfica de magnitud de Bode para esta red. En la figura 6.31(b) se muestra la correspondiente red de deénfasis para el receptor.

La elección de ω_1 y ω_2 en la figura 6.31 determina los valores de las componentes que se han de usar. Una elección razonable para $f_1 = \omega_1/2\pi$ es la frecuencia a la cual la densidad espectral de la señal se reduce en 3 dB; para la radiodifusión se toman 2.1 kHz ($RC = 75\ \mu$s) y se supone que la densidad espectral disminuye con gran rapidez más allá de esta frecuencia.[†] La elección de $f_2 = \omega_2/2\pi$ se hace un poco por arriba de la mayor frecuencia de audio que se va a transmitir.

¿En qué medida la adición del preénfasis-deénfasis mejora la razón global señal a ruido? Suponiendo que las dos redes se eligen en forma adecuada, no habrá cambio neto en la señal. Sin embargo, la densidad espectral del ruido en la salida del demodulador, se altera de manera apreciable, como se muestra en la figura 6.32.

La mejora en la razón señal a ruido puede hallarse calculando la disminución de la potencia de ruido. De la ecuación (6.109), la densidad espectral de potencia del ruido en la salida del demodulador FM es

$$S_{n_o}(\omega) = \eta\omega^2/A^2.$$

La función de transferencia del filtro de deénfasis puede escribirse como

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_1}. \tag{6.120}$$

El valor cuadrático medio del ruido tras el filtro de deénfasis es

[†] La respuesta de alta frecuencia está resultando tan buena en las grabaciones modernas, que esta suposición ya no es válida. Por tanto, las estaciones han tenido que reducir su modulación o bien "colorear" de manera expresa su espectro de entrada para mantenerse dentro de la desviación de frecuencia pico de 75 kHz. Recientemente, la FCC ha permitido a algunas estaciones usar una constante de tiempo de 245 μs (6.4 kHz) y compresión Dolby B (véase Ap. F) en lugar de 75 μs. Esta elección resulta compatible con el deénfasis de 75 μs y permite todo el intervalo dinámico de programación con una razón *S/N* aumentada.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

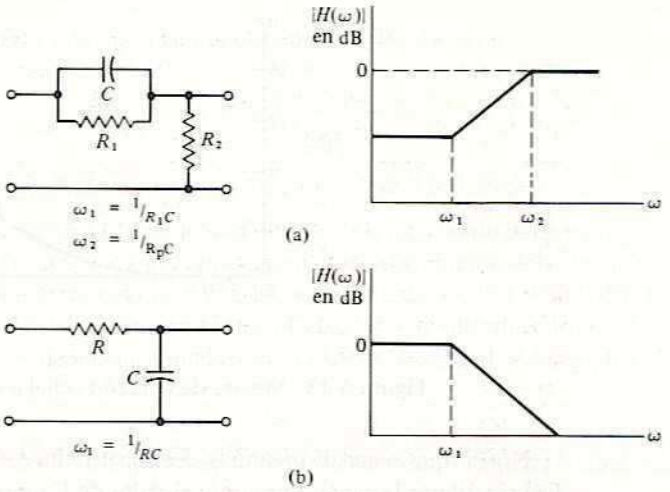


Figura 6.31 Ejemplo de una red de combinación de preénfasis-deénfasis.

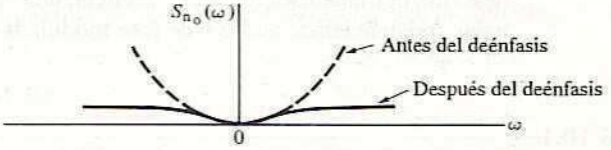


Figura 6.32 Densidad espectral de ruido después del deénfasis.

$$N_o' = \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_m} S_{n_o}(\omega)\,|H(\omega)|^2\,d\omega\,,$$

$$N_o' = \frac{\eta}{\pi A^2}\int_0^{\omega_m} \frac{\omega^2}{1 + (\omega/\omega_1)^2}\,d\omega\,. \tag{6.121}$$

Sin el filtro de deénfasis, el ruido sería

$$N_o = \frac{\eta}{\pi A^2}\int_0^{\omega_m} \omega^2\,d\omega\,. \tag{6.122}$$

Definiendo un factor de corrección de ruido,

$$\Gamma = N_o/N_o'\,, \tag{6.123}$$

y evaluando las ecuaciones (6.121) y (6.122), se encuentra que

$$\Gamma = \frac{1}{3}\,\frac{(\omega_m/\omega_1)^3}{(\omega_m/\omega_1) - \tan^{-1}(\omega_m/\omega_1)}\,. \tag{6.124}$$

Por ejemplo, si f_m = 15 kHz, f_1 = 2.1 kHz, Γ es aproximadamente 13 dB. En la figura 6.33 se muestra una gráfica del factor de corrección de ruido Γ.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

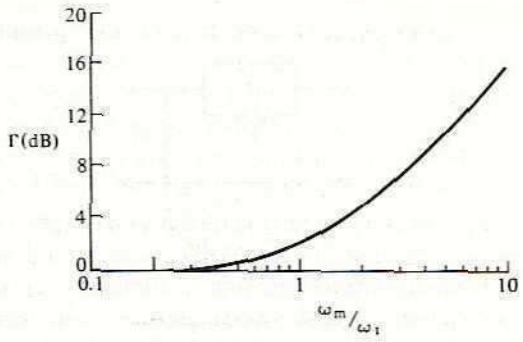


Figura 6.33 Mejora de la razón señal a ruido usando deénfasis.

Nótese que el uso de preénfsis-deénfasis reduce el ruido en la salida del demodulador FM sin alterar la señal. Por tanto, el valor de Γ representa un aumento neto de la razón señal a ruido efectiva sin necesidad de aumentar la potencia transmitida. Como se muestra en la figura 6.33, este aumento puede ser apreciable. Con el uso del preénfasis descrito, el transmisor emite, en esencia, una señal de frecuencia modulada por las más bajas frecuencias de audio y de fase modulada por las más altas.

EJEMPLO 6.10.1

En el anterior análisis del preénfasis para FM comercial, se supuso que las mayores componentes espectrales de la señal moduladora son muy pequeñas. Por tanto, la ecuación (6.124) omite cualquier aumento en la potencia de modulación debido al preénfasis de las componentes espectrales mayores. En las grabaciones modernas, esta suposición puede perder algo de su validez. Por ejemplo, supóngase que la densidad espectral de potencia de la señal es $S_f(\omega) = (\text{constante})/[1 + (\omega/\omega_1)^2]$.

a) Determine el cambio requerido en el nivel de modulación con y sin preénfasis para una potencia fija de modulación.
b) ¿Cuál es la mejora en *S/N* neta en estas condiciones?

Solución a) Sin preénfasis, la potencia de la señal de modulación, dentro de una constante, es

$$P = \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_m} \frac{1}{1 + (\omega/\omega_1)^2}\,d\omega = \frac{\omega_1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\omega_m}{\omega_1}\right).$$

Con preénfasis, la potencia de la señal de modulación aumenta, a menos que se use una atenuación K, de manera que la potencia es

$$P = \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_m} K\,d\omega \approx K\omega_m/\pi.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Si esta potencia de modulación se mantiene fija, se tiene

$$K = \frac{\tan^{-1}(\omega_m/\omega_1)}{\omega_m/\omega_1}.$$

Para $f_m = 15$ kHz, $f_1 = 2.1$ kHz, esto da $K = 0.200$ (-6.98 dB).

b) De la ecuación (6.124), la mejora de *S/N* como resultado del preénfasis-deénfasis es de 13.28 dB. Sin embargo, ahora el nivel de modulación debe reducirse en 6.98 dB para que la mejora neta en *S/N* sea de sólo (13.28 – 6.98) = 6.30 dB. Esto da cierta idea de por qué las estaciones de FM comerciales introducen métodos alternativos de preénfasis-deénfasis a medida que mejora la calidad de las grabaciones.

EJERCICIO 6.10.1

Suponga que las redes de preénfasis-deénfasis descritas en esta sección se proponen para usarse en AM comercial. Suponiendo que la densidad espectral de ruido en la entrada es blanca y que se usa un detector de envolvente en condiciones de señal a ruido alta, calcule la posible mejora para $f_m = 5$ kHz. [*Sugerencia:* Suponga que el ruido de salida es blanco.]

RESPUESTA: 3.07 dB.

6.11 RESUMEN

La variación de la frecuencia de una senoidal continua en proporción a la amplitud de una señal moduladora se llama modulacion de frecuencia (FM). La variación de la fase de una senoidal continua en proporción a la amplitud de una señal moduladora se llama modulación de fase (PM). Ambos son ejemplos de modulación de ángulo. La frecuencia instantánea es la derivada en el tiempo de la fase, por lo que la PM y la FM están estrechamente relacionadas.

En la generación de FM hay una conversión de amplitud a frecuencia y una de frecuencia a frecuencia. La desviación de frecuencia pico es una medida de la primera y la frecuencia moduladora, de la última. La relación se llama índice de modulación β.

El valor de β determina las características espectrales de la señal FM. Para los valores de β por debajo de alrededor de 0.2, la densidad espectral de una señal FM consiste en dos bandas laterales sobre una gran portadora, lo que se conoce como FM de banda angosta. Los detalles espectrales para valores mayores de β, llamados FM de banda ancha, dependen de cada señal moduladora en particular porque la generación de FM no es lineal. Sin embargo, el ancho de banda total puede aproximarse agregando el doble de la desviación de frecuencia pico al doble del ancho de banda de la señal moduladora (regla de Carson).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La mayoría de los principios de la FM se aplican también a la PM. Una diferencia es que, en la PM, la desviación de fase pico está controlada por la señal moduladora, debido a lo cual varía tanto con la frecuencia como con la amplitud de la señal moduladora.

La potencia promedio total en una señal de ángulo modulado se mantiene constante e independiente del índice de modulación.

La generación de señales de ángulo modulado se obtiene ya sea generando primero una señal de banda angosta y aumentando luego el índice de modulación por multiplicación de frecuencias o mediante la generación directa de una señal de banda ancha. La demodulación puede conseguirse con un circuito convertidor de frecuencia a tensión llamado discriminador o bien usando técnicas de retroalimentación en un convertidor de tensión a frecuencia.

Los sistemas de ángulo modulado de banda ancha ofrecen, con respecto a la AM, una mejora de la razón señal a ruido aunque con anchos de banda mayores. Sin embargo, esta mejora sólo puede conseguirse cuando la razón señal a ruido está por encima del nivel de umbral. En la radiodifusión FM se emplea un circuito preénfasis-deénfasis para suprimir en forma parcial el ruido de alta frecuencia en la salida del demodulador.

Referencias seleccionadas para lectura adicional

1. DeFrance, J.J., *Communicactions Electronics Circuits*, 2a. ed., San Francisco, Rinehart Press, .1972.
   El capítulo 9 contiene un estudio de los circuitos y características de operación de sistemas FM prácticos; de fácil lectura.
2. Haykin, S., *Communication Systems*. 2a. ed., Nueva York, John Wiley & Sons, 1983.
   El capítulo 4 contiene un tratamiento de la FM casi del mismo nivel, e incluye el caso multitonal.
3. Stark, H. y Tuteur, F. B., *Modern Electrical Communications*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1988.
   El capítulo 7 presenta modulación de ángulo con explicaciones breves de algunos de los circuitos que se usan más. (Para ver más descripciones detalladas de circuitos, consulte los capítulos 11 y 12 de la referencia 5 del capítulo 5.)
4. Gagliardi, R. M., *Introduction to Communications Engineering*, 2a. ed., Nueva York, John Wiley & Sons, 1988.
   En el capítulo 10 se estudian los temas de frecuencia receptora, fase de referencia y sincronización.
5. Best, R.E., *Phase-Locked Loops*, Nueva York, McGraw Hill, 1984.
   Interesante análisis acerca del lazo de fase cerrada, con énfasis en aplicaciones prácticas y el PLL digital.
6. Gardner, F. M., *Phaselock Techniques*, 2a. ed., Somerset, N. J., Wiley-Interscience, 1979.
   Contiene un buen examen del lazo de fase cerrada de segundo orden linealizado, y su comportamiento en presencia de ruido; proporciona así mismo útiles criterios de diseño.
7. Taub, H. y Schilling, D. L., *Principles of Communications Systems*, 2a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1986.
   Los capítulos 4, 9 y 10 contienen un bien escrito análisis de la modulación de ángulo en un nivel más avanzado, destacando la supresión de ruido y el efecto de umbral.
8. Panter, P. F., *Modulation, Noise, and Spectral Analysis*, Nueva York, McGraw-Hill, 1965.
   Escrito en un nivel más avanzado, este libro es tal vez la más completa referencia disponible sobre el tema de modulación de ángulo, dedicando 10 capítulos al tema.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

PROBLEMAS

6.1.1 Determine la frecuencia instantánea, en Hertz, de cada una de las siguientes señales.

a) $10 \cos (100\pi t + \pi/3)$

b) $10 \cos (200\pi t + 10 \operatorname{sen} \pi t)$

c) $2 \exp [j200\pi t(1 + \sqrt{t})]$

d) $\cos 200\pi t \cos (5 \operatorname{sen} 2\pi t) + \operatorname{sen} 200\pi t \operatorname{sen} (5 \operatorname{sen} 2\pi t)$

6.1.2 Dibuje a) la fase en función del tiempo y b) la frecuencia instantánea en función del tiempo para la señal

$$\phi(t) = A \cos [\omega_c t + p(t)\pi/6],$$

donde $p(t)$ es una señal cuadrada de ±1 que cambia de estado cada $2/f_c$ segundos a $(\omega_c t) = \pi/2, 3\pi/2, \ldots$

6.1.3 a) Encuentre una aproximación a la expansión en serie de Fourier de la señal de ángulo modulado $\psi(t) = \exp (j\beta \operatorname{sen} \omega_m t)$ para β pequeña utilizando la expansión en serie de McLaurin para $\exp (x)$ y conservando sólo los primeros dos términos de la expansión.

b) Dibuje el espectro de línea de la aproximación de $\psi(t)$, como se determinó en la parte (a).

c) Determine la transformada de Fourier (densidad espectral) de la aproximación de $\psi(t)$, determinada en la parte (a).

6.2.1 Una portadora de 1 GHz se modula en frecuencia por una senoidal de 10 kHz de manera que la desviación pico de frecuencia es de 100 Hz. Determine

a) El ancho de banda aproximado de la señal de FM.

b) El ancho de banda si la amplitud de la señal moduladora se duplica.

c) El ancho de banda si la frecuencia de la señal moduladora se duplica.

d) El ancho de banda si se duplican tanto la frecuencia como la amplitud de la señal moduladora.

6.2.2 Determine el ángulo de fase de la portadora, la desviación de frecuencia instantánea y la magnitud (envolvente) de la señal SSB-LC descrita por

$$\phi(t) = A(1 + me^{j\omega_m t})e^{j\omega_c t}.$$

6.2.3 La banda lateral superior de una señal de AM (DSB-LC) con modulación senoidal e índice de modulación m se multiplica por un factor α, donde: $0 \leq \alpha \leq 1$. Derive una relación para la desviación de fase pico (es decir, máxima) de la portadora como función de m y α.

6.2.4 Se genera una señal de banda lateral residual a partir de una entrada $f(t) = \cos 2000\pi t$ mediante la generación, en primer lugar, de una señal DSB-LC con frecuencia de portadora $f_c = 10$ kHz e índice de modulación m. Luego esta señal DSB-LC se aplica a un filtro VSB. El espectro de línea resultante en la salida del filtro es una línea a 9 kHz de altura a, una línea a 10 kHz de altura 1.0 y una línea a 11 kHz de altura b.

a) ¿Cuál es el índice de modulación de la señal DSB-LC, en términos de a y b?

b) Dibuje y marque un diagrama fasorial para la señal VSB si $a = 0.40$ y $b = 0.60$. [*Sugerencia*: Primero exprese sus resultados en términos de las componentes real e imaginaria.]

c) Encuentre una expresión para la frecuencia instantánea pico de la portadora (en términos de a, b, m) presente en la señal VSB.

★ **6.3.1** La señal de tensión $f(t)$ mostrada en la figura 2.18 se aplica a un modulador FM con una sensibilidad a la modulación de $k_f = 10$ kHz/mV alrededor de la frecuencia central f_c.

a) Dibuje un diagrama de la frecuencia instantánea en función del tiempo.

b) Dibuje la magnitud de la densidad espectral de potencia apropiada si el periodo (T) es un segundo.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

✓ ★ **6.3.2** Calcule y grafique la magnitud de la densidad espectral de potencia de una senoidal en $(0, T)$, $T = 1$, cuya frecuencia instantánea varía en forma lineal desde $(f_c - D)$ a $(f_c + D)$ en el intervalo de cálculo, utilizando un algoritmo FFT y $N = 256$. [*Sugerencia*: En el cálculo, haga $f_c = N/4$ y $D = N/8$.] Compare su resultado con la figura 6.8.

6.3.3 Repita el problema 6.2.1 con la excepción de que la desviación de frecuencia pico es de 40 kHz. Utilice tanto la regla de Carson como las funciones de Bessel y compare sus resultados.

6.3.4 Usando el apéndice G, haga una comparación entre los anchos de banda utilizando la regla de Carson y las funciones de Bessel con una regla de 1% para las bandas laterales significativas [véase Ec. (6.38)], y funciones de Bessel con una regla de 10% para las bandas laterales significativas. Haga la comparación para $\beta = 1, 2, \ldots, 6$.

6.3.5 Se utiliza una senoidal de 1 kHz para modular en frecuencia una señal portadora de 50 kHz. La desviación de frecuencia pico desde la portadora es de 200 Hz. Esta señal FM se aplica a un sistema no lineal cuya característica de transferencia de entrada y salida es $e_o(t) = 2 e_i^2(t)$. La salida se filtra con un filtro pasabanda ideal (BPF) que tiene un ancho de banda de 20 kHz centrado en 100 kHz.

a) Dibuje a escala el espectro de línea resultante.

b) Utilizando una tabla de funciones de Bessel, estime el índice de modulación β de la señal de salida.

6.3.6 Una señal portadora se modula en frecuencia por la suma de dos senoidales:

$$\phi(t) = 100 \cos(\omega_c t + \operatorname{sen} \omega_m t + 2 \operatorname{sen} 2\omega_m t),$$

donde $f_c = 100$ kHz y $f_m = 1$ kHz.

a) ¿Cuál es la desviación de frecuencia pico de la portadora?

b) Estime el ancho de banda neto necesario para la transmisión de esta señal FM.

c) Dibuje a escala la magnitud del espectro de línea resultante (unilateral, arriba de la portadora). [*Sugerencia*: Exprese $\phi(t)$ en notación de valor complejo y utilice las funciones de Bessel de la representación en serie para reconocer los coeficientes requeridos.]

6.3.7 La salida de un modulador de frecuencia se filtra con un filtro pasabanda ideal sin memoria con ancho de banda B. Con base en el concepto de frecuencia instantánea y modulación senoidal, proponga un argumento para explicar por qué es necesaria la condición $B \geq 2\Delta f$ para evitar la distorsión.

6.3.8 Use un computador digital y un monitor gráfico para calcular y mostrar la magnitud de la FFT usando $N = 128$ sobre un intervalo $T = 1$ para simular un analizador de espectro. Muestre las magnitudes sobre $(0, N/2)$. Esto presentará un despliegue con los enteros como frecuencia (en Hertz) para el eje horizontal, con resolución de 1 Hz. Como sólo son importantes las magnitudes relativas, normalice el despliegue vertical a la máxima magnitud.

a) Calcule y muestre la magnitud espectral para: $x(t) = \cos[64\pi t + 6 \operatorname{sen}(4\pi t)]$. Imprima una copia del espectro exhibido. Liste también las magnitudes de las bandas laterales calculadas, y compare sus magnitudes relativas con los valores tabulados (véase Ap. G).

b) Calcule y muestre la magnitud espectral para: $y(t) = \cos[64\pi t + \operatorname{sen} 4\pi t + 2 \operatorname{sen} 8\pi t]$. Imprima una copia del espectro mostrado; explique sus resultados (tal vez sea útil referirse al Problema 6.3.6c).

6.3.9 El método analítico utilizado para encontrar la densidad espectral de FM con modulación senoidal se puede utilizar para señales moduladoras periódicas más generales con valor medio cero. Considere el caso en el que la señal moduladora es una señal cuadrada periódica de amplitud unitaria y periodo T (por conveniencia, suponga que la señal cuadrada tiene

http://libreria-universitaria.blogspot.com

simetría par alrededor del origen. Sea la desviación de frecuencia pico de la portadora $\Delta\omega$, y defina el índice de modulación $\beta = \Delta\omega/\omega_0$, donde $\omega_0 = 2\pi/T$).

a) Dibuje la frecuencia y la fase instantáneas.

b) Derive una expresión para la densidad espectral.

c) Dibuje el espectro de magnitud para $\beta = 5$.

6.4.1 La señal senoidal $f(t) = a \cos 2\pi f_m t$ se aplica a la entrada de un sistema FM. La señal modulada de salida correspondiente (en volts) para $a = 1$ V, $f_m = 1$ kHz, es: $\phi(t) = 100 \cos (2\pi \times 10^7 t + 4 \text{ sen } 2000\pi t)$ a través de una carga resistiva de 50 ohms.

a) ¿Cuál es la desviación de frecuencia pico de la portadora?

b) ¿Cuál es la potencia promedio total desarrollada por $\phi(t)$?

c) ¿Cuál es el porcentaje de potencia promedio a 10.000 MHz?

d) ¿Cuál es el ancho de banda aproximado, utilizando la regla de Carson?

e) Repita las partes (a) a (d) para parámetros de entrada $a = 0.75, f_m = 2$ kHz; suponga que todos los demás factores permanecen iguales.

6.4.2 Se utiliza cierta senoidal a una frecuencia f_m Hz como señal moduladora tanto en un sistema AM (DSB-LC) como en uno FM. Cuando se modula, la desviación de frecuencia pico del sistema FM se fija a tres veces el ancho de banda del sistema AM. Las magnitudes de las bandas laterales a $\pm f_m$ Hz de la portadora en ambos sistemas son iguales, y la potencia promedio total en ambos sistemas es igual. Determine a) el índice de modulación del sistema FM; y b) el índice de modulación del sistema AM.

6.4.3 La salida de un modulador FM dado con entrada senoidal es: $\phi(t) = A \cos (\omega_c t + \beta \text{ sen } \omega_c t)$. Esta salida $\phi(t)$ se aplica a un detector síncrono y un filtro pasabajas RC, con $(RC)^{-1} = \omega_m$. Desarrolle una expresión para la potencia promedio a la salida del filtro si se sabe que la salida es de un watt cuando $\beta = 0$.

6.4.4 Una señal portadora de FM se modula con una señal senoidal.

a) ¿Para qué valores de β toda la potencia se encuentra en las bandas laterales (es decir, potencia promedio cero a la frecuencia de la portadora)?

b) Usando esta información, proponga un procedimiento experimental para la calibración de un modulador de frecuencia dado.

c) Se pueden utilizar otros valores en la calibración. Grafique el valor más pequeño distinto de cero de β para el cual la potencia promedio en una banda lateral dada se va primero a cero, contra el número armónico de la banda lateral (para $0 < n \leq 6$).

✓ **6.4.5** Demuestre que el error en la potencia promedio total provocado por truncar el ancho de banda a la condición $n = \beta$ de una señal FM modulada en forma senoidal es $\leq 4\%$.

6.5.1 Responda las preguntas del problema 6.4.1 para la señal PM $\phi(t) = 100 \cos (2\pi \times 10^7 t + 4 \cos 2000\pi t)$ con los mismos parámetros de entrada.

6.5.2 Un transmisor se modula con una senoidal de frecuencia $f_m = 1$ kHz para originar una señal de ángulo modulado con desviación de frecuencia pico de 20 kHz. Determine el índice de modulación β y el ancho de banda de la señal modulada para cada uno de los siguientes cambios, suponiendo que los demás factores permanecen iguales.

a) FM; f_m aumentado por 4

b) FM; f_m disminuido por 4

c) PM; f_m aumentado por 4

d) PM; f_m disminuido por 4

http://libreria-universitaria.blogspot.com

6.5.3 Una señal portadora se modula en fase con una señal senoidal $f(t)$. La desviación de fase pico es de 1 rad cuando la amplitud pico de entrada es de 0.5 V. Encuentre el ancho de banda usando la regla de Carson, y la razón de la potencia promedio en la portadora y en las bandas laterales de primer orden a aquellas de las bandas laterales restantes para cada una de las siguientes entradas [suponga que $f(t)$ se expresa en volts en cada caso].

a) $f(t) = \cos 1000\pi t$

b) $f(t) = 1.2 \cos 300\pi t$

c) $f(t) = 1.9 \cos 200\pi t$

6.5.4 El procedimiento de prueba desarrollado para cierto sistema PM diseñado para transmitir información adquirida en forma remota a un satélite en órbita, utiliza la señal moduladora periódica de tipo escalera $\gamma(t)$ mostrada en la figura P-6.5.4.

a) Derive una expresión para la densidad espectral, referida a la frecuencia portadora ω_c, para esta modulación en función de la desviación de frecuencia pico α (los comentarios del problema 6.3.9 también podrían ser útiles aquí).

b) Dibuje el espectro de magnitud para $\alpha = \pi/3$ (60°).

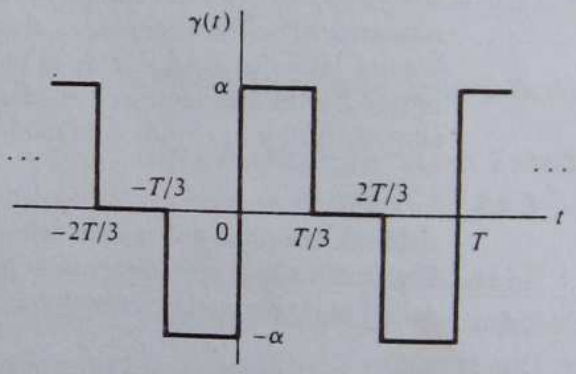


Figura P–6.5.4.

6.6.1 Una señal de 1.28 GHz se deriva a partir de un oscilador de 10 MHz utilizando una cadena multiplicadora de frecuencia de $N = 2^7$. Para las partes (a) a (c), suponga que esta cadena multiplicadora es ideal y no contribuye al ruido de fase por sí misma.

a) ¿Cuál es la máxima imprecisión en la frecuencia de 1.28 GHz si la precisión del oscilador de 10 MHz es de una parte en 10^9?

b) ¿Cuál es la estabilidad de la frecuencia de la señal de 1.28 GHz si la salida del oscilador de 10 MHz varía en ±0.05 Hz?

c) ¿Cuál es la estabilidad de la frecuencia de salida si el oscilador de 10 Mhz varía ±5° por segundo?

d) ¿Cuál es la estabilidad de la frecuencia de salida si el oscilador varía ±5° por segundo y cada multiplicador por 2 contribuye ±2° de ruido de fase? (Incluya tanto los casos no correlacionados como los completamente correlacionados.)

6.6.2 Un sistema FM de tipo Armstrong para manejar una entrada con contenido de frecuencia máximo de 3.3 kHz genera en primer lugar una señal FM con $\beta = 0.20$ (constante), $f_c = 5$ MHz. Se requiere que la salida deseada tenga una frecuencia portadora de 30.0 MHz. Usando un multiplicador de frecuencia por 8 y un mezclador de frecuencia (más un filtro pasabanda que siga a cada uno), diseñe la configuración de dos sistemas distintos para lograr los objetivos deseados. Especifique todas las frecuencias y los anchos de banda en sus diagramas.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

6.6.3 Suponga que las frecuencias de oscilador f_1, f_2 en la figura 6.13 no se derivan de una fuente común y que cada una tiene una imprecisión en frecuencia de una parte en 10^8. ¿Cuál es la máxima imprecisión en la señal de salida?

6.6.4 Una señal portadora de 200 kHz se modula en frecuencia con una senoidal de 1 kHz de manera que la desviación en frecuencia pico es de 200 Hz. Esta señal FM se aplica a una cadena de cuatro multiplicadores de frecuencia por 4 consecutivos. Cada multiplicador está seguido de un BPF; además, el primer multiplicador por 4 está precedido de un BPF. Especifique la frecuencia central y el ancho de banda (utilizando la regla de Carson) para cada uno de los cinco filtros.

6.7.1 Sea la señal de FM $\phi(t) = A \cos(\omega_c t + \beta \operatorname{sen} \omega_m t)$ la entrada al discriminador *RL* mostrado en la figura 6.17(b). Sea r la resistencia en directo del diodo lineal por tramos (puede usted suponer una resistencia en inverso infinita para el diodo), y sean R_1, C la resistencia y la capacitancia en paralelo, respectivamente, del detector de envolvente a tierra. Analice la operación de este discriminador. Describa en forma breve los compromisos de diseño en la elección (con valores bajos y altos) de a) R/L, b) R_1C y r en términos de los parámetros pertinentes a la señal FM de entrada.

6.7.2 Sea la señal de FM $\phi(t) = A \cos(\omega_c t + \beta \operatorname{sen} \omega_m t)$ aplicada a la entrada de un sistema que genera un pulso angosto (por conveniencia, supóngalo rectangular) de amplitud fija a_o y duración τ siempre que la amplitud de $\phi(t)$ pasa por cero. La salida de este "detector de cruces por cero" se aplica a un filtro que sólo deja pasar la frecuencia fundamental del tren de pulsos.

a) Demuestre que si $f_c\tau \ll 1$ entonces la tensión de salida del filtro se puede hacer proporcional a la frecuencia instantánea de $\phi(t)$.

b) Investigue sobre la posibilidad de reemplazar al filtro de salida con un filtro pasabajas *RC*.

6.7.3 Cierto sistema de demodulación FM diseñado para operar a una frecuencia portadora ω_c genera dos fasores $A_1 \exp(j\theta_1)$, $A_2 \exp(j\theta_2)$, ajustados para tener ángulos de fase complementarios ($\theta_1 = -\theta_2$) a $\omega = \omega_c$. La diferencia entre las magnitudes ($A_2 - A_1$) se hace proporcional a la frecuencia instantánea desde la portadora. La tensión de salida de este demodulador es proporcional al ángulo de fase del resultado de sumar los dos fasores.

a) Demuestre que la tensión de salida se puede hacer proporcional a la frecuencia instantánea desde la portadora de $\phi(t)$ si ($A_1 + A_2$) se mantiene constante.

b) Investigue los compromisos de diseño en θ_1.

6.7.4 Estime la máxima desviación de frecuencia pico que se puede utilizar antes de que el error en la ganancia del demodulador del ejemplo 6.7.2 sea 1% de la característica lineal (puede ser útil remitirse al ejemplo 6.6.2). Utilizando este resultado, ¿qué error se supone que sería tolerable en el ejemplo 6.7.2?

6.7.5 Para entradas senoidales de banda angosta, se puede utilizar un detector síncrono como comparador de fase. Demuestre que si las dos entradas a dicho comparador son $x(t) = A_1 \cos[\omega_c t + \theta_1(t)]$ y $y(t) = A_2 \cos[\omega_c t + \theta_2(t)]$, entonces la salida del comparador de fase, con ganancia constante, es

$$z(t) = \tfrac{1}{2} A_1 A_2 \cos\theta(t), \quad \text{donde } \theta(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t).$$

6.7.6 a) Dibuje la característica del comparador de fase para una entrada cuadrada simétrica a una frecuencia fundamental f_c y una señal rectangular VCO con duración en el nivel uno de un cuarto del periodo y frecuencia fundamental f_c.

b) Describa el efecto de la señal rectangular en la ganancia del comparador k_c y compárelo con el de la señal cuadrada.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

6.7.7 Dos funciones periódicas, $x(t)$ y $y(t)$, ambas del mismo periodo, son entradas a un comparador de fase.

a) Usando una representación en serie de Fourier exponencial para cada una, encuentre una representación en serie de Fourier exponencial para la salida del comparador.

b) ¿Cuál es el valor promedio de la salida del comparador si una de las entradas tiene valor promedio cero?

c) ¿Cuál es la salida cuando $x(t)$ y $y(t)$ no tienen contenido armónico común? (Por ejemplo, examine el caso en el que una entrada es una señal cuadrada simétrica con fundamental f_c, y la segunda es una señal cuadrada con fundamental $2f_c$.)

✓ **6.7.8** Sea $x(t)$ una señal cuadrada simétrica y $y(t)$ una senoidal. El periodo de cada señal cuadrada es el mismo. Utilizando una FFT de 64 puntos,

a) Calcule $R_x(\tau)$ para un periodo de la señal cuadrada simétrica;

b) Calcule $R_x(\tau)$ para un periodo de la senoidal;

c) Calcule $R_{xy}(\tau)$;

d) Normalice las salidas al valor pico de la parte (a) y grafique un periodo.

★ **6.7.9** Un PLL de primer orden con una característica de comparador de fase lineal (véase Fig. 6.22b) se ajusta en forma inicial para una operación en el punto nulo en presencia de una portadora sin modular. La constante de tiempo del modulador es de 10 μs.

a) Si la entrada es la señal FM modulada en forma senoidal:

$$\phi(t) = A \cos(\omega_c t + \beta \operatorname{sen} \omega_m t),$$

determine la máxima desviación de frecuencia pico permitida en la portadora si el PLL debe recuperar la señal moduladora sin distorsión.

b) Para demodulación de FM que utiliza una desviación de frecuencia pico fija, se requiere que la respuesta en frecuencia de la salida demodulada sea lo más plana posible (en términos de ω_m). Determine el ancho de banda aproximado del PLL.

c) El VCO tiene la propiedad de que cuando su entrada cambia 1 V, su frecuencia cambia 100 kHz. Determine el máximo en la señal de salida del PLL.

★ **6.7.10** a) Determine los parámetros de diseño ($k_c k_f$) y τ_1 de un PLL de segundo orden y ancho de banda mínimo para demodular el audio (monofónico) de la televisión comercial. Base su diseño en una señal FM modulada en forma senoidal con una desviación de frecuencia pico de 25 kHz y una frecuencia de audio mínima de 15 kHz. Suponga una característica triangular para el comparador de fase, $\zeta = 0.707$, y $\tau_1 = \tau_2$.

b) Se aplica un escalón de frecuencia de 10 kHz a este PLL. Si $k_c = 1$ V/rad, determine el error de fase pico, el error de fase en estado estacionario y la tensión de salida en estado estacionario.

★ **6.7.11** Repita el problema 6.7.10 para un PLL de primer orden.

★ **6.7.12** Repita el ejemplo 6.7.4 y el ejercicio 6.7.2 para un comparador de fase de característica senoidal. Haga lineal la característica con la restricción de que el máximo error porcentual permisible de la característica lineal sea 5%.

6.8.1 Demuestre que la ecuación (6.115) se puede escribir como

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{3}{2}\beta^2 \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{banda base}}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

6.8.2 En la derivación de la ecuación (6.115), f_m representaba tanto la frecuencia de la señal moduladora como la frecuencia de corte del filtro pasabajas en la salida del discriminador. Por tanto, este resultado es válido para el caso en el que la señal senoidal moduladora se encuentra a la frecuencia más alta dentro de la banda de paso del LPF. Demuestre que en el caso en el que f_m representa la frecuencia de la señal senoidal moduladora, f_M es la frecuencia de corte del LPF (y el BPF), $f_m \leq f_M$, y entonces el resultado dado en la ecuación (6.115) está multiplicado por el factor $(f_m/f_M)^2$.

6.8.3 Suponga que la salida del discriminador FM de la figura 6.25 se aplicara a un filtro pasabajas con función de transferencia en frecuencia H(ω), en vez del LPF ideal supuesto en la ecuación (6.110). Suponiendo una modulación senoidal en $\omega = \omega_m$, demuestre que la ecuación (6.115) se puede utilizar con la excepción de que N_c se debe reemplazar por N_{eq}:

$$N_{eq} = 3\eta \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |H(\omega)|^2 \, d\omega}{\omega_m^2 |H(\omega_m)|^2}$$

6.8.4 Un sistema de comunicación opera en presencia de ruido blanco con densidad espectral de potencia bilateral $S_n(\omega) = 0.25 \times 10^{-14}$ W/Hz y con pérdida de trayectoria total (incluyendo antenas) de 100 dB. El ancho de banda de entrada es de 10 kHz. Calcule la mínima potencia de portadora necesaria en el transmisor para una entrada senoidal de 10 kHz y una razón *S/N* en la salida de 40 dB si la modulación es

a) AM (DSB-LC), con $m = 0.707$ y $m = 1.0$;

b) FM, con $\Delta f = 10$ kHz y $\Delta f = 30$ kHz;

c) PM, con $\Delta\theta = 1$ rad y $\Delta\theta = 3$ rad.

d) Resuma sus resultados marcando estos puntos en una gráfica de la potencia necesaria (en kW) contra el ancho de banda necesario (en kHz).

6.8.5 El diseño de un sistema de comunicación FM dado utiliza la banda base y las condiciones de transmisión dadas en el problema 6.8.4.

a) Calcule la mínima potencia y el ancho de banda necesario para $\beta = 1$.

b) Suponga que se define un factor de costo para el sistema como el producto de la potencia transmitida por el cubo del ancho de banda. Determine el máximo valor de β tal que este factor de costo se encuentre dentro del de un transmisor que tiene un 20% más de potencia y utiliza el doble del ancho de banda de AM para la misma señal en banda base.

c) Repita la parte (b) para un aumento del 50% en vez del 20%.

6.8.6 Un sistema de multiplexión por división de frecuencia utiliza modulación SSB-SC en la subportadora y FM para la portadora principal. Existen 20 canales de entrada de voz con igual amplitud, cada uno limitado en banda a 3.3 kHz. Se permite una banda de resguardo de 0.7 kHz entre los canales y por debajo del primer canal.

a) Determine el ancho de banda de la transmisión final si la desviación de frecuencia pico es de 400 kHz.

b) Determine la degradación en la señal a ruido de la entrada núm. 20 comparada con la entrada núm. 1 (suponga una densidad espectral de ruido blanco en la entrada del discriminador, y no existe deénfasis.)

c) Repita la parte (b) si se utilizara PM.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

6.9.1 Durante los años cincuenta la Television Allocation Study Organization (TASO) desarrolló la siguiente escala de seis niveles con respecto a la calidad de la imagen.

Nivel TASO	Calidad de la imagen	*S/N*, dB
1	Excelente	>41
2	Buena	33–41
3	Pasable	28–33
4	Marginal	23–28
5	Inferior	17–23
6	Inútil	<17

Esta escala es para la señal de vídeo (luminancia), transmitida usando AM; la señal de audio se transmite en FM. Si una estación dada transmite la portadora de audio a –7 dB con respecto a la portadora de vídeo, estime si el audio o el vídeo se vuelven primero inútiles. Justifique su razonamiento.

★ **6.9.2** Haga una gráfica de la señal de entrada, en dBf (1 dBf = 10^{-15} W), contra el factor de ruido del receptor, en decibeles, necesarios para un silencio total en un receptor diseñado para la banda de radiodifusión FM comercial. Establezca sus suposiciones.

★ **6.9.3** Dos receptores comerciales de FM se anuncian a diferentes precios. Ambos tienen el mismo ancho de banda IF. Del más caro se anuncia que requiere 10 dBf (1 dBf = 10^{-15} W) de señal de entrada para un silencio total, mientras que el otro requiere 13 dBf para silencio total. Al utilizarlos, ambos receptores se conectan a antenas; la temperatura de ruido efectiva en cada caso es de 1400 K. ¿Cuántos decibeles en la ganancia de antena puede sacrificar el propietario del receptor más caro para obtener el mismo desempeño *S/N* en ambos receptores si están sintonizados a la misma estación?

6.10.1 Una señal senoidal de 10 kHz se transmite utilizando FM en la presencia de ruido blanco aditivo. Si se requiere que la mejora en *S/N* en la salida del demodulador sea de 20 dB, determine la desviación de frecuencia pico si a) no se utiliza preénfasis/deénfasis; y b) se utiliza el estándar de preénfasis/deénfasis (véase Fig. 6.33). c) Haga una gráfica de la desviación de frecuencia pico necesaria contra f_m para la condición de la parte (b) en un intervalo de frecuencias de 5 kHz $\leq f_m \leq$ 15 kHz.

6.10.2 Se utiliza un receptor PM para recibir transmisión FM comercial (mono). Describa qué sucedería si a) no se utiliza preénfasis; y b) se utiliza el preénfasis estándar (75 μs) en la transmisión.

6.10.3 En la figura P-6.10.3 se muestra un sistema de preénfasis/deénfasis dado. La densidad espectral de potencia del ruido aditivo es $S_n(\omega) = C|\omega|$, donde C es una constante. La magnitud de la función de transferencia en el filtro de deénfasis se diseña de manera que sea constante para $f <$ 2 kHz y proporcione una densidad espectral de ruido blanco en la salida en el intervalo de frecuencias 2 kHz $< f <$ 15 kHz.

a) ¿Cuál es la magnitud de la función de transferencia $|H_p(\omega)|$ del filtro de preénfasis necesario para que no exista distorsión total neta en la señal sobre este intervalo de frecuencias?

b) Grafique el aumento de la *S/N* cuadrática media contra f_m utilizando este sistema para $0 < f < f_m$ si (1) $|H_d(\omega)| = 1$ para $f_m \leq$ 2 kHz, y (2) $f_m \leq$ 15 kHz.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

c) Suponga que la densidad espectral de potencia de la señal de entrada es de la forma $[1 + (f/f_1)^2]^{-1}$, donde $f_1 = 2$ kHz. Grafique el aumento de la potencia promedio, en decibeles, en la salida del filtro de preénfasis contra f_m en las condiciones de la parte (b). Remita su gráfica a la potencia de salida en $f_m = 2$ kHz.

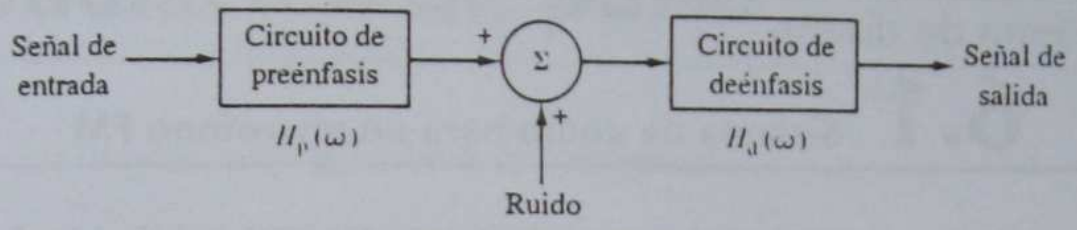


Figura P–6.10.3.

6.10.4 Sea la densidad espectral de potencia deseada después de preénfasis (excepto por una constante)

$$\begin{Bmatrix} 1 & \text{para } f < 2 \text{ kHz} \\ f/(2 \text{ kHz}) & 2 \text{ kHz} \le f < 15 \text{ kHz} \end{Bmatrix}$$

Determine la constante de tiempo de un filtro de preénfasis de primer orden (véase Fig. 6.31) que proporcione la mejor aproximación a la característica deseada.

6.10.5 En los receptores de FM estéreo, los circuitos de deénfasis se colocan luego de la separación de las señales L (izquierda) y R (derecha).

a) Compare la razón S/N resultante con la de un receptor FM mono si en ninguno se utiliza deénfasis.

b) Demuestre que la FM estéreo es 22 dB más ruidosa que la FM monofónica si se utilizan los circuitos estándar de preénfasis. [*Sugerencia*: Utilice la ecuación (5.65).]

http://libreria-universitaria.blogspot.com

PROBLEMAS DE DISEÑO

Problema de diseño

6.1 Sistema de audio para un micrófono FM

Se desea un transmisor pequeño, de baja potencia y cobertura corta para enviar voz de buena calidad (suponga un ancho de banda de 10 kHz) de un micrófono amplificador a un receptor FM de alta calidad para la banda comercial estándar de FM. Se decide que el transmisor utilice un diodo varactor (véase Ej. 6.6.2) con una capacitancia característica dada por $C = 20/\sqrt{1 + 2V}$ pF, con una tensión de polarización inversa recomendada de 4 V. Esto se utiliza en un circuito sintonizado LC simple; el mínimo valor de L permisible en el diseño es 0.25 μH. Suponga que el receptor FM tiene un ancho de banda IF de 200 kHz y un factor de ruido de 4 dB; utilice 1000 K para la temperatura de ruido en la antena (para tomar en cuenta el ruido de interferencia, etc.). Ignore los posibles efectos de ganancia/pérdida de antena y pérdida de trayectoria.

El transmisor consiste en etapas de amplificadores de audio y el amplificador de potencia sintonizado en la salida; el principal consumidor de energía es el amplificador de potencia en la salida. A fin de que sea discreto y de fácil transporte para una persona, debe tener el menor consumo de potencia posible. Los parámetros por definir en este diseño son (1) la tensión pico a pico aplicada al diodo varactor y (2) la cantidad de potencia de salida necesaria para operar por encima del umbral del sistema. Con la ayuda de métodos de cálculo, calcule la distorsión armónica total (THD, *total harmonic distortion*) del sistema para una senoidal de entrada de 1 kHz y estudie los compromisos en términos de la THD. Suponga que la característica del discriminador en el receptor es ideal para estos cálculos.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

CAPÍTULO

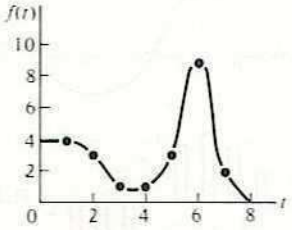
7 Modulación de pulso

En los dos capítulos anteriores se examinaron aplicaciones de la modulación de señal continua (CW, *continuous-wave*). En ésta, los parámetros de una senoidal continua varían en relación con la señal moduladora. En la modulación de amplitud varía la amplitud de la senoidal, mientras que en la de ángulo varían el ángulo y la velocidad angular. Ahora se verá otra categoría de modulación: la modulación de pulso.

Del teorema del muestreo sabemos que para conducir la información contenida en una señal de banda limitada, basta con enviar un número finito de muestras discretas. Una señal moduladora pasabajas de banda limitada a f_m Hz queda definida en su totalidad por sus valores en intervalos no mayores que $(2f_m)^{-1}$ segundos. Se deduce que en lugar de transmitir la señal completa en forma analógica, en realidad necesitamos transmitir un número discreto de muestras.

En la modulación de pulso, estas muestras discretas se usan para variar un parámetro de una señal de pulso. Por ejemplo, puede variarse la amplitud, el ancho o la posición del pulso en proporción a la señal muestreada.

Sea una señal analógica $f(t)$ muestreada a intervalos equidistantes t_i, como se muestra en la figura 7.1(a). La tabla correspondiente de los valores muestreados aparece en la figura 7.1(b).



(a)

i =	1	2	3	4	5	6	7
$f(t_i)$ =	4	3	1	1	3	9	2

(b)

Figura 7.1 Señal muestreada y su tabla de valores muestreados.

Los datos discretos deben transmitirse de manera que al demodular la señal en el receptor, el primer pulso de salida se halle en 4, el segundo en 3, el tercero en 1, etc., hasta que toda la tabla esté reconstruida en forma correcta en el receptor. Por supuesto, no hay razón para que deba usarse la misma escala de tiempo para el tren de pulsos que para la señal moduladora. Por ejemplo, la señal $f(t)$ se podría muestrear tomando 1000 muestras en un periodo de un segundo y después transmitirlas a razón de un pulso por

http://libreria-universitaria.blogspot.com

minuto durante 1000 minutos. Por otra parte, los 1000 valores muestreados también se podrían transmitir en un μs (estas técnicas de aumentar o disminuir la rapidez de los datos se están empleando en experimentos con satélites). Sin embargo, salvo especificaciones contrarias, no alteraremos la escala de tiempo en este análisis de la modulación de pulso y todas las transmisiones de señales se harán en "tiempo real".

Nótese que la señal original $f(t)$ podrá o no reconstruirse exactamente en el receptor. El teorema del muestreo proporciona las condiciones necesarias para recuperar $f(t)$ de los $f(t_i)$. Si el muestreo permite determinar $f(t)$ a partir de la tabla de transmisión, habrá que asegurarse de que puede determinarse en el receptor. Por tanto, el muestreo correcto es un problema que deberá resolverse *a priori* en el transmisor, sin pretender corrección alguna en el receptor debido a una razón de muestreo inadecuada. La primera preocupación será concebir un sistema que no use más ancho de banda que el necesario para permitir la transmisión de una tabla de valores muestreados a través de la modulación de pulso y la mayor reconstrucción de la tabla en el receptor.

7.1 MODULACIÓN DE AMPLITUD DE PULSO (PAM)

En la modulación de amplitud de pulso (PAM, *pulse-amplitude modulation*), la amplitud de un tren de pulsos de ancho constante varía en proporción a los valores muestreados de la señal moduladora. En general, los pulsos se toman en intervalos de tiempo equidistantes. En la figura 7.2 se muestra un ejemplo de señal PAM. Como la generación de PAM tiene similitudes con el muestreo, se hará un repaso rápido antes de proseguir.

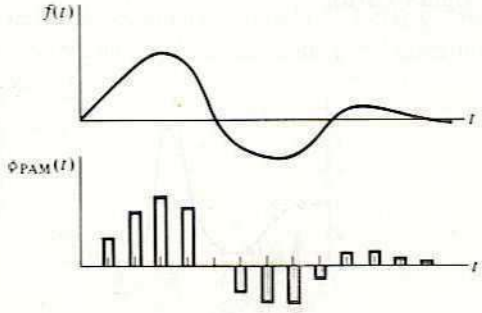


Figura 7.2 Modulación de amplitud de pulso.

Considérese una señal pasabajas $f(t)$ de banda limitada a f_m Hz y multiplicada por un tren periódico de pulsos rectangulares $p_T(t)$, como aparece en la figura 7.3. El intervalo de muestreo T es el intervalo de Nyquist $(2f_m)^{-1}$ segundos. La señal muestreada $f_s(t)$ es el producto de $f(t)$ por $p_T(t)$:

$$f_s(t) = f(t)p_T(t)\,. \tag{7.1}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

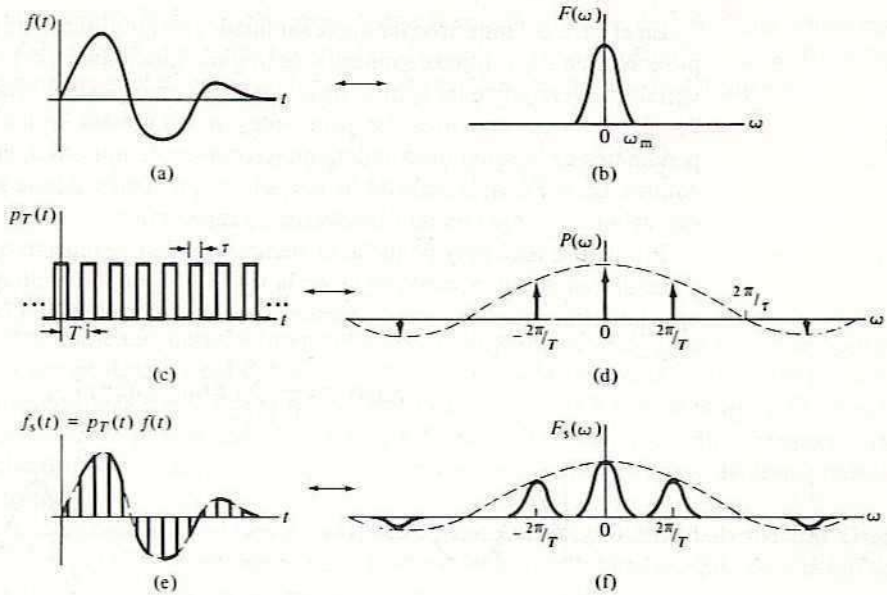


Figura 7.3 Muestreo natural de una señal de banda limitada.

La densidad espectral de la señal muestreada se halla con la transformada de Fourier de la ecuación (7.1):

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) \circledast P(\omega). \tag{7.2}$$

En este caso, la convolución es fácil de realizar debido a las funciones impulso y se muestra en la figura 7.3(f). La expresión analítica equivalente de este resultado es

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) \circledast \frac{\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\,(n\pi\tau/T) 2\pi\,\delta(\omega - n2\pi/T), \tag{7.3}$$

$$F_s(\omega) = \frac{\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\,(n\pi\tau/T) F(\omega - n2\pi/T). \tag{7.4}$$

De este somero repaso se concluye que el muestreo de $f(t)$ produce la generación de réplicas espectrales en múltiplos de la tasa de muestreo periódico. Los pulsos de muestreo no tienen que ser de forma rectangular; la elección de la forma del pulso sólo alterará la forma de la envolvente del espectro de $F_s(\omega)$. Lo importante aquí es que cada réplica espectral generada por el muestreo sea una reproducción exacta de la densidad espectral original $F(\omega)$ desplazada en frecuencia. La señal original $f(t)$ puede recuperarse a partir de la señal muestreada $f_s(t)$ usando un filtro pasabajas ideal.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En el caso del muestreo natural examinado, las amplitudes de los pulsos variaban en proporción a los valores de muestra de la señal moduladora $f(t)$. Sin embargo, también variaban ligeramente las formas de los pulsos, como se ve al comparar las figuras 7.2 y 7.3. De manera específica, las pendientes de las crestas de los pulsos varían con las pendientes de la señal moduladora en los puntos de muestreo, en el caso del muestreo natural. En la PAM, las crestas de los pulsos son planas. Ahora se investigará el efecto que esto puede tener en las características espectrales.

Primero se hará muy pequeño el ancho del pulso de muestreo, por lo que en esencia se tendrá un impulso, como se ve en la figura 7.4. Suponiendo que cada impulso tiene área unitaria, entonces, como un caso especial de la ecuación (7.4),

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n2\pi/T) . \tag{7.5}$$

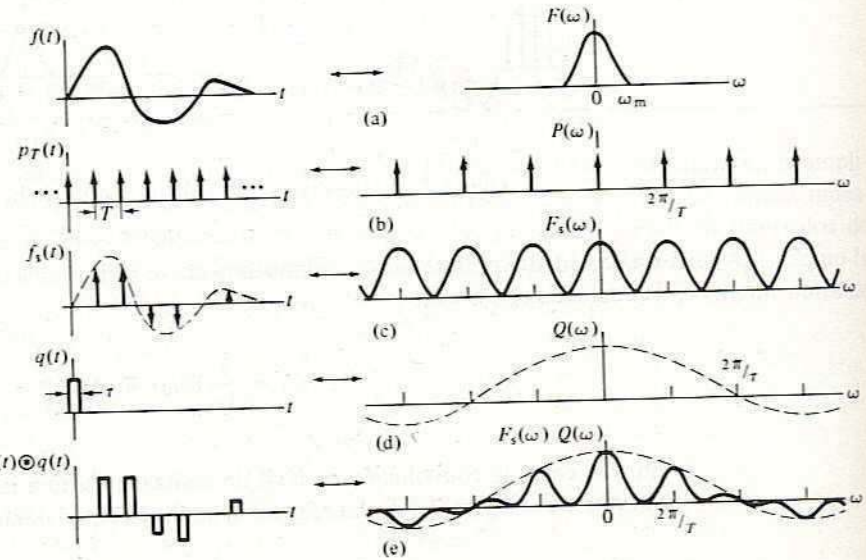


Figura 7.4 Espectro de una señal PAM.

La señal de impulsos de muestreo en el tiempo puede escribirse como

$$p_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) . \tag{7.6}$$

La señal de impulsos muestreados es, usando la ecuación (7.1),

$$f_s(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) ,$$

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\, \delta(t - nT) , \tag{7.7}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

donde los $f(nT)$ son los valores instantáneos de muestra de $f(t)$. Estas muestras de impulso, ponderadas por los valores de muestra de $f(t)$, se aplican a un filtro lineal invariable en el tiempo con respuesta al impulso $q(t)$. La salida del filtro es

$$f_s(t) \circledast q(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\,\delta(t - nT) \circledast q(t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)q(t - nT)\,. \tag{7.8}$$

Por tanto, la respuesta al impulso del filtro, $q(t)$, se puede elegir para que se aproxime a la forma deseada del pulso de salida. Si $q(t)$ es la respuesta rectangular al impulso mostrada en la figura 7.4(d), la ecuación (7.8) representa el tren de pulsos PAM deseado. En el tren de pulsos, todos éstos tienen forma rectangular y amplitud proporcional al valor de muestra de $f(t)$ en los puntos de muestreo. Los pulsos se encuentran igualmente espaciados en el tiempo.

Una vez generado el tren de pulsos PAM, se examinará su densidad espectral. Usando la ecuación (7.5) y recordando que la convolución en el tiempo equivale a la multiplicación de densidades espectrales, tenemos

$$F_s(\omega)Q(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n2\pi/T)Q(\omega)\,. \tag{7.9}$$

Esto se ilustra en la figura 7.4(e). Sin embargo, esta densidad espectral no es la que se obtuvo para las ondas muestreadas de la figura 7.3. En ésta, el espectro consistía en $F(\omega)$ repetida en múltiplos de la frecuencia de muestreo, con sólo una variación de ganancia para cada réplica espectral. Esta variación se determinaba por la forma del pulso muestreador, como se expresa en la ecuación (7.4). Por el contrario, la ecuación (7.9) describe una multiplicación de frecuencias punto a punto de manera que la densidad espectral $F(\omega)$ ha perdido su forma original. Esta distorsión depende de la forma del pulso; a bajas frecuencias no es severa si el ancho del pulso es muy pequeño. Por tanto, se concluye que existe una sutil diferencia entre el muestreo natural con pulsos rectangulares y la generación de PAM con pulsos de cresta plana.

En este punto, suele surgir la pregunta de por qué hay interés en los pulsos de cresta plana. La razón es que no hace falta usar la forma de los pulsos para conducir información, y un pulso de forma rectangular es fácil de generar. Cuando las señales se transmiten a distancias más o menos largas, a menudo se necesitan repetidores para filtrar y amplificar las señales antes de transmitirlas al receptor de la siguiente repetidora. En los sistemas de modulación analógica CW, debido a que las repetidoras deben amplificar las señales con fidelidad, los efectos del ruido aditivo se combinan. En el tipo de sistema de modulación de pulso que se examina aquí, la información se encuentra en las amplitudes de los pulsos sólo en los tiempos de muestra. Como la *forma* del pulso no es importante, los repetidores pueden regenerar los pulsos más que amplificarlos. Por ejemplo, puede regenerarse un nuevo pulso si su amplitud se hace proporcional al área del pulso de entrada detectada en un ancho o intervalo de tiempo fijo. Esta regeneración de pulsos tiene ciertas ventajas en la razón señal a ruido.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Ahora se verá el problema de recobrar $f(t)$ de la señal PAM. Una posibilidad es muestrear la señal PAM con un tren periódico de pulsos muy estrechos (en teoría, impulsos) y después usar un filtro pasabajas para suavizar el resultado. Este tren debe sincronizarse con la señal PAM de entrada.

Otro método de recobrar la señal, el cual se usó en el muestreo, es el filtrado pasabajas. Sin embargo, dado que ahora el espectro de baja frecuencia del PAM está dado por $F(\omega) \times Q(\omega)$, no es posible recobrar $f(t)$ exactamente con sólo ese filtro. La entidad espectral introducida en el proceso de PAM se conoce [esto es, $Q(\omega)$], por lo que existe la posibilidad de eliminar este efecto. Sintetizar un filtro que tenga una función transferente de $Q^{-1}(\omega)$ satisfará este objeto: en general, no es posible construir dicho filtro sobre un intervalo amplio de frecuencias, en particular si $Q(\omega)$ tiende a cero. Sin embargo, como $f(t)$ es de banda limitada, es suficiente sintetizar el filtro inverso sólo en un intervalo de frecuencias muy limitado. Como se muestra en la figura 7.5, el filtro pasabajas puede combinarse con el filtro inverso. La función de transferencia del filtro resultante es

$$H(\omega) = \begin{cases} Q^{-1}(\omega) & |\omega| < \omega_m \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} . \tag{7.10}$$

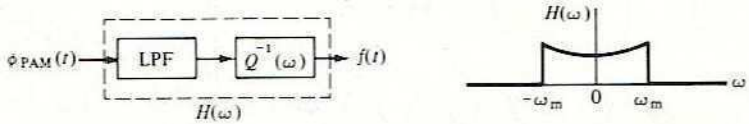


Figura 7.5 Recuperación de $f(t)$ de una señal PAM utilizando igualación.

Esta técnica de corregir la respuesta de frecuencia de un sistema conociendo la distorsión se llama *igualación*. Se emplea a menudo para corregir distorsiones conocidas pero sobre las que se tiene poco control. Por ejemplo, las líneas telefónicas introducen distorsiones tanto de amplitud como de fase, lo que resulta intolerable si las líneas son muy prolongadas. A lo largo de las líneas se usan amplificadores repetidores no sólo para amplificar las señales y compensar las pérdidas, sino también para corregir las distorsiones.

Para una forma rectangular del pulso, la densidad espectral $Q(\omega)$ es un patrón (sen x)/x, como se muestra en la figura 7.6. Como la señal se ha muestreado a la razón de Nyquist, el periodo T se relaciona con la frecuencia máxima f_m por $f_m = 1/(2T)$.

A medida que el ancho del pulso τ se hace menor, los cruces por cero en el patrón (sen x)/x de $Q(\omega)$ se alejan en frecuencia y, por tanto, $Q^{-1}(\omega)$ tiende a aplanarse dentro

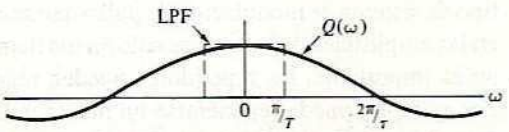


Figura 7.6 Igualación para un pulso de forma rectangular.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

del ancho de banda asignado al filtro pasabajas. Como T no depende de τ, la razón τ/T es una medida de cuán planos son $Q(\omega)$ y $Q^{-1}(\omega)$ en el ancho de banda del filtro pasabajas. Para un pulso rectangular, siempre que $\tau/T \leq 0.1$, la máxima diferencia entre $Q^{-1}(\omega)$ y el filtro pasabajas ideal en el intervalo requerido es inferior al 1%. En la práctica, pues, la igualación para PAM puede despreciarse siempre que $\tau/T \leq 0.1$.

7.2 MULTIPLEXIÓN POR DIVISIÓN DE TIEMPO (TDM)

El uso de pulsos muy estrechos en señales PAM deja suficiente espacio entre muestras para la inserción de pulsos desde otras señales muestreadas. El método de combinar varias señales muestreadas en determinada secuencia de tiempo se llama *multiplexión por división de tiempo* (TDM, *time-division multiplexing*). Aquí se examinarán los principios de la TDM con referencia sobre todo a la PAM, aunque los principios se aplican también a otros tipos de modulación de pulso.

Supóngase que se desea efectuar la multiplexión de dos señales usando PAM. En la figura 7.7 se muestran dos métodos alternos para conseguir esto. A fin de realizar las operaciones temporales de estos diagramas, por lo general se emplean circuitos lógicos digitales. Para llevar a cabo las operaciones de muestreo, es común usar los FET a frecuencias bajas y los muestreadores de diodo en anillo vistos en el capítulo 5 a frecuencias altas. El conmutador determina la sincronización y la secuencia de los ca-

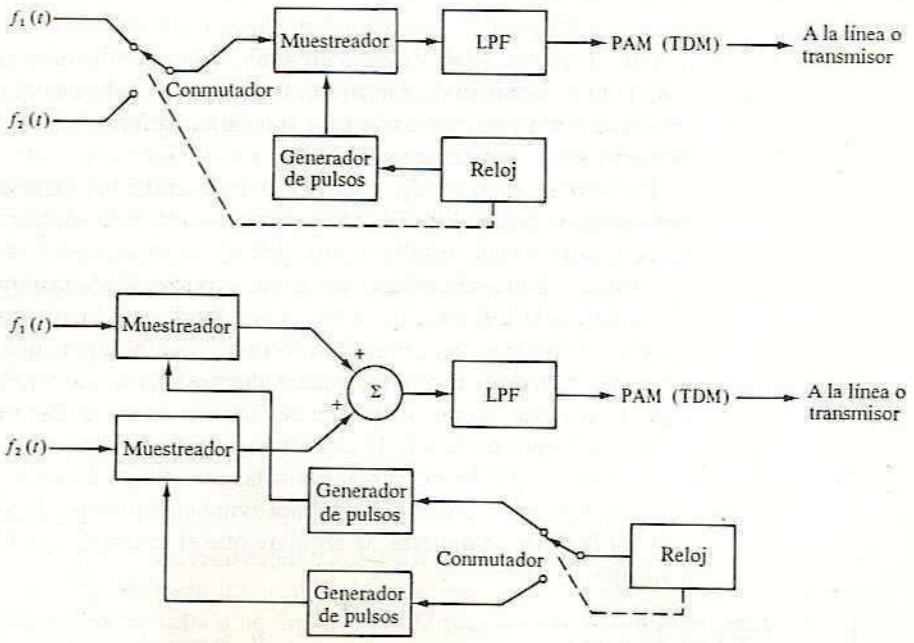


Figura 7.7 Generación de multiplexión en el tiempo PAM.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

nales (señales) que se han de muestrear. El generador de pulsos produce los pulsos estrechos necesarios para accionar el o los muestreadores. El reloj marca el tiempo de todo el sistema.

Los dos métodos de la figura 7.7 difieren sólo en que en el primero el conmutador manipula las señales analógicas antes del muestreo, mientras que en el segundo manipula los pulsos de control del muestreador. El segundo método suele preferirse porque emplea circuitos lógicos digitales, aunque requiere más muestreadores.

Para ilustrar la operación de multiplexión en el tiempo, se verá un ejemplo. Supongamos que ambas señales de entrada $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son pasabajas y de banda limitada a 3 kHz. El teorema del muestreo establece que debe muestrearse a razón no menor que 6 kHz, lo cual requiere una velocidad del reloj mínima de 12 kHz para el sistema de dos canales. La salida multiplexada PAM puede aparecer como en la figura 7.8.

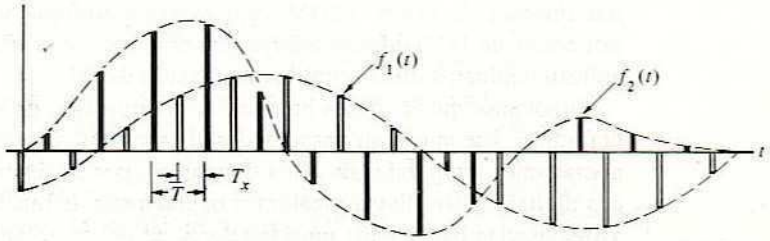


Figura 7.8 Multiplexión en el tiempo de dos señales PAM.

Esta señal podría enviarse por una línea o usarse para modular un transmisor (esto se examinará más adelante en la presente sección). Sin embargo, su ancho de banda es muy grande (teóricamente infinito), por lo que se debe decidir qué tanto del ancho de banda es realmente necesario para transmitir la información y después demodularla correctamente en el receptor.

Primero se definirá T_x, como el tiempo entre muestras adyacentes en la señal multiplexada (véase Fig. 7.8). Si todas las señales de entrada (canales) se muestrean de la misma forma, resulta obvio que $T_x = T/n$, donde n es el número de señales de entrada y T el periodo de muestreo de una señal. Ahora surge una pregunta: si aquí sólo interesa la información sobre la amplitud (no se reproduce la forma del pulso), ¿cuál es el ancho de banda mínimo absoluto necesario para que la información en cada canal muestreado se mantenga independiente de la de los demás canales? Para responderla habrá que apelar a los argumentos del teorema del muestreo. Para un filtro ideal que limita en banda la densidad espectral a B_x Hz, el teorema del muestreo establece que se debe muestrear a una tasa de $(2T_x)^{-1}$ muestras por segundo con el fin de tener muestras independientes. Para evitar cualquier pérdida irreparable de información en la señal compuesta, se requiere que el ancho de banda B_x del filtro pasabajas satisfaga el criterio

$$B_x \geq \frac{1}{2T_x}. \tag{7.11}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Debe destacarse que el uso de esta cota no da formas de pulso semejantes a las generadas en los muestreadores. La identificación de la forma del pulso requiere ancho de banda adicional. Lo que indica la ecuación (7.11) es que, si esta condición se cumple, habrá información de amplitud en el tiempo apropiado. Recuérdese que el teorema del muestreo supuso la existencia de filtros pasabajas ideales para satisfacer la condición limitante.

Puede darse una interpretación física de la ecuación (7.11) de la siguiente manera. Después de que las señales $f_1(t)$ y $f_2(t)$ de la figura 7.8 se han muestreado y combinado, la señal multiplexada resultante puede considerarse como una nueva señal muestreada $f_3(t)$, cuyas muestras se encuentran espaciadas en intervalos de T_x segundos. El teorema del muestreo establece que la frecuencia más alta $f_{máx}$ que puede resolverse sin ambigüedades en $f_3(t)$ es

$$f_{máx} = \frac{1}{2T_x}.$$

Para pasar toda esta posible gama de frecuencias, se necesita un sistema con ancho de banda que satisfaga la ecuación (7.11).

Se ha preferido hallar en el dominio del tiempo el ancho de banda del sistema PAM multiplexado en el tiempo, como se prefirió el dominio de las frecuencias para la multiplexión de frecuencias. En este punto, debe evitarse algún razonamiento engañoso al calcular en el dominio de las frecuencias el ancho de banda mínimo de la señal PAM multiplexada en el tiempo. La línea de razonamiento podría ser algo así: cada entrada al sistema PAM de los dos canales es de banda limitada a 3 kHz. Por tanto, el ancho de banda mínimo para cada canal es de 3 kHz y, si se suman los dos canales, no se generan nuevas frecuencias, por lo que sólo se requerirán 3 kHz. Esto conduce a la absurda conclusión de que no importa cuántas de estas señales se multiplexen, la señal compuesta sólo requiere 3 kHz. *Este razonamiento es erróneo*, pero ¿por qué? Una breve reflexión muestra que tal razonamiento se basa enteramente en consideraciones de magnitud espectral. Sin embargo, *las relaciones de fase son esenciales para la multiplexión en el tiempo y no se pueden ignorar*. En general, es más conveniente trabajar en el dominio del tiempo que con estas relaciones de fase.

Puede generarse algún criterio adicional sobre la elección adecuada del ancho de banda suponiendo que los pulsos de muestra son tan estrechos que pueden aproximarse a impulsos. Además, el filtro se supone pasabajas ideal con función de transferencia (véase Fig. 7.9):

$$H_x(\omega) = \begin{cases} \pi/W & |\omega| < W, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{7.12}$$

La respuesta al impulso de este filtro es

$$h_x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_x(\omega)\} = \text{Sa}(Wt). \tag{7.13}$$

El ancho efectivo de esta respuesta es $2\pi/W = 1/B_x$, como se muestra en la figura 7.9(c).

La llegada de cada impulso de la señal multiplexada en el tiempo producirá una réplica de la respuesta a un impulso del filtro, ponderada y retardada por el área y el tiempo del impulso. Usando la superposición, la respuesta global es una secuencia de términos (sen x)/x, como se ve en la figura 7.9(d). Como se ha elegido el espaciamiento

http://libreria-universitaria.blogspot.com

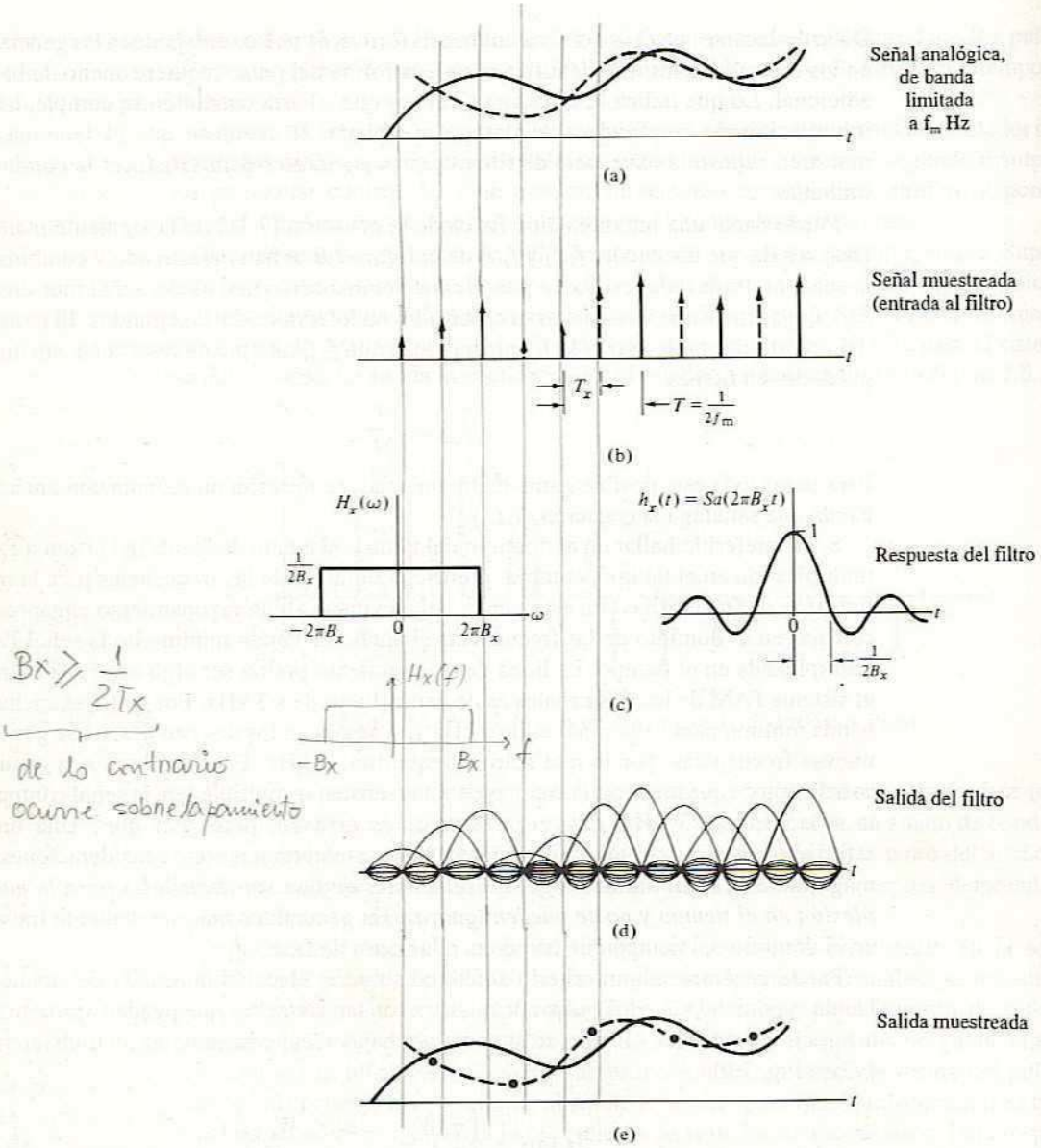


Figura 7.9 Filtrado ideal de dos señales PAM muestreadas por impulsos.

entre muestras $T_x = (2B_x)^{-1}$, las contribuciones de los canales adyacentes son exactamente cero en el preciso instante del muestreo. Por tanto, los valores muestreados pueden reconstruirse con exactitud muestreando la salida en el instante preciso.

El signo de igualdad en la ecuación (7.11) se refiere al caso en que se emplean impulsos de muestra y filtrado ideal. Como ninguna de estas condiciones se cumple en la práctica, los requisitos de ancho de banda deben ser más flexibles. Cuánto deben serlo es un asunto que el ingeniero debe evaluar y que depende de la diafonía permisible entre

http://libreria-universitaria.blogspot.com

canales. La cantidad de señal de un canal adyacente que se sobrepone en una porción de tiempo da lugar a esta *diafonía entre canales*. Ésta puede minimizarse adoptando un ancho de banda mayor que el mínimo necesario y, en menor grado, operando los diferentes canales a niveles de tensión comparables.

Aplicando los resultados de este análisis al ejemplo del PAM de dos canales, cada señal de entrada era de banda limitada a 3 kHz, de manera que $T = (6 \text{ kHz})^{-1} = 166.7$ μs, $n = 2$ y, por tanto, $T_x = 83.3$ μs. Usando la ecuación (7.11), el ancho de banda mínimo necesario para transmitir la señal multiplexada en el tiempo es

$$B_x \geq (166.7 \ \mu\text{s})^{-1} = 6 \text{ kHz}.$$

De este resultado se ve que la PAM es tan eficiente como la SSB para conservar el ancho de banda, ¡al menos cuando todas las señales de entrada tienen el mismo ancho de banda! Esta eficiencia disminuye cuando los anchos de banda difieren. Para conservar el ancho de banda, los sistemas de multiplexión PAM suelen agrupar las señales de entrada de anchos de banda comparables.

En el receptor, la señal compuesta multiplexada y filtrada debe remuestrearse y separarse en los canales apropiados. Una vez separados los pulsos, se aplican las consideraciones normales del muestreo y, con un filtrado pasabajas, puede obtenerse la reconstrucción analógica de las señales. En la figura 7.10 se muestran los diagramas de bloques de dos posibles receptores. La operación del circuito de muestra y retención se analizará de manera breve.

En el receptor de multiplexión es necesaria la sincronización del reloj y el conmutador, que se puede obtener de varias formas. Una de ellas es enviar un pulso periódico cuya altura se sabe mayor que la de cualquier otro en la transmisión. Estos pulsos se pueden identificar en el receptor y usarse para la sincronización. Otra posibilidad es usar un tono piloto desplazado en frecuencia de la transmisión multiplexada. Un esquema más elaborado es reservar una porción de la transmisión multiplexada (p. ej., un canal) para enviar un código preestablecido que, cuando se identifica en el receptor, sirve para la sincronización. Esto se examina en la sección 7.13.

Cuando en un sistema PAM se multiplexan en el tiempo un gran número de señales, los pulsos de muestra deben ser muy estrechos en comparación con el intervalo de muestreo. En estas condiciones, la potencia de la señal al final del filtro pasabajas del receptor se reduce al punto en que se necesitan grandes factores de amplificación. Una alternativa interesante es usar un interruptor de muestreo seguido de un capacitor, conocido como circuito de *muestra y retención*, el cual aparece en la figura 7.11. El interruptor se cierra sólo cuando va a muestrearse un canal en particular. Si la impedancia r de la fuente es pequeña, la tensión del capacitor cambia a la tensión de entrada en el tiempo τ en que el interruptor está cerrado. La impedancia de carga R se ajusta a la altura suficiente como para que el capacitor mantenga el nivel de tensión hasta que el interruptor se cierra de nuevo. Por tanto, el circuito de muestra y retención acepta sólo valores de entrada que aparecen en los tiempos de muestreo y los mantiene hasta el siguiente. Aún se necesita un filtro pasabajas para suavizar la salida, aunque las necesidades de filtrado son menores con el circuito de muestra y retención. El uso de este circuito produce un demodulador PAM muy eficiente, confiable y relativamente silencioso, sin necesidad de gran amplificación. Nótese que este circuito es un ejemplo

http://libreria-universitaria.blogspot.com

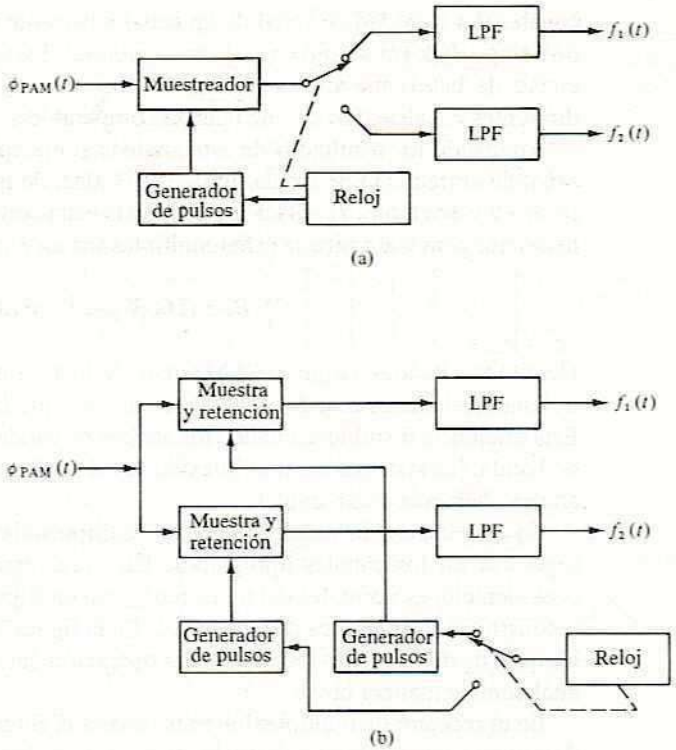


Figura 7.10 Receptores para multiplexión PAM en el tiempo.†

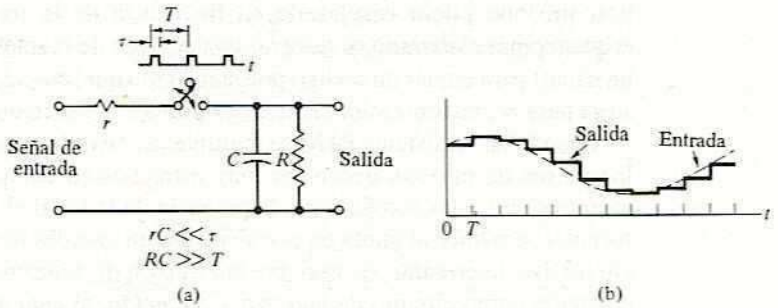


Figura 7.11 El circuito de muestra y retención y su utilización como demodulador PAM.

de sistema lineal variable con el tiempo. Nótese también que, al menos en esta forma, este circuito requiere igualación para proporcionar una buena fidelidad de la señal. Una alternativa para el sencillo circuito de retención es un algoritmo de interpolación que

† En el segundo sistema, los generadores de pulso se pueden conectar para formar un anillo. Cada generador de pulso opera sólo cuando recibe pulsos simultáneos del generador precedente en el anillo y el reloj. Esto elimina la necesidad de un divisor digital separado (conmutador).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

proporcione una estimación suave y precisa de la salida correcta con base en observaciones de muestras pasadas.

Tras la multiplexión en el tiempo y el filtrado, la señal de pulso modulado puede transmitirse directamente a través de un par de alambres. Sin embargo, para transmisión a larga distancia, es más conveniente usar mayores frecuencias y transmitir la señal por radiación electromagnética. El espectro PAM puede trasladarse a estas frecuencias más altas con las técnicas de modulación de CW examinadas en anteriores capítulos. Si se usa modulación de amplitud (DSB), la modulación compuesta se llama PAM/AM. Si se usa modulación de ángulo, el sistema se designa como PAM/FM o PAM/PM. En la figura 7.12 se muestra una representación en diagramas de bloques de un sistema PAM/AM.

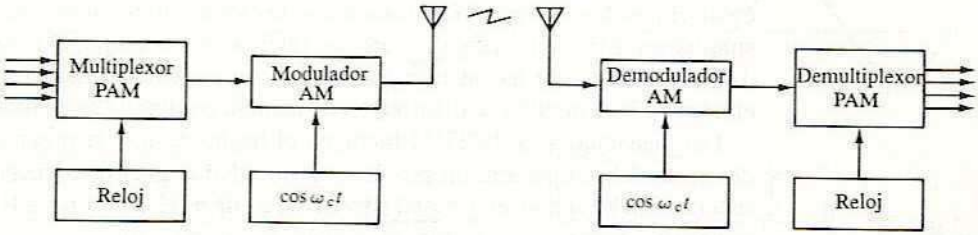


Figura 7.12 Representación en diagrama de bloques de PAM/AM.

Como se vio, la PAM multiplexada en el tiempo es más eficiente cuando todas las señales de entrada son de banda limitada a la misma frecuencia. En los grandes sistemas de multiplexión, donde deben manejarse diferentes secuencias de datos, es una práctica común agrupar los canales de datos de entrada por anchos de banda. Cada grupo se modula en pulso y se multiplexa en tiempo, y después estos grupos se multiplexan en frecuencia usando frecuencias subportadoras. Por último, esta señal compuesta se modula en CW. En la figura 7.13 se muestra un ejemplo de sistema PAM/AM/FM.

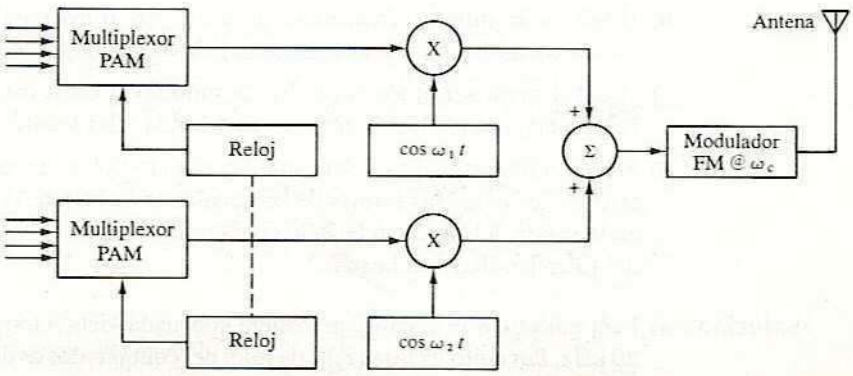


Figura 7.13 Ejemplo de un transmisor PAM/AM/FM.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La multiplexión en el tiempo se ha analizado destacando especialmente el uso de la PAM. Los mismos principios se aplican a los otros tipos de modulación de pulso.

Entre las ventajas de la modulación de pulso con multiplexión por división de tiempo (TDM) está el hecho de que los circuitos necesarios son digitales, proporcionando alta confiabilidad y eficiente operación. Estos circuitos son más simples que los moduladores y demoduladores requeridos en los sistemas de multiplexión por división de frecuencia. La multiplexión de muchos canales de datos a relativamente baja frecuencia se puede llevar a cabo de manera muy eficiente usando TDM si las entradas tienen anchos de banda comparables.

Otra ventaja de los sistemas TDM es la baja diafonía entre canales debida a las no linealidades de los amplificadores que manipulan las señales en el transmisor y el receptor. Estas no linealidades producen armónicos que afectan a los canales de mayor frecuencia en los sistemas FDM. Por tanto, los requisitos de linealidad de fase y amplitud de los amplificadores FDM son más estrictos mientras más canales se agreguen. Por el contrario, en los sistemas TDM las señales de canales diferentes no se manejan en forma simultánea, pero se les asigna diferentes intervalos de tiempo. O sea que los requisitos de linealidad no se hacen más estrictos si se aumenta el número de canales y los efectos de la distorsión se distribuyen de manera equitativa entre todos ellos.

Las desventajas de la TDM incluyen el hecho de que la precisión del pulso y el desajuste del tiempo son un problema primordial a altas frecuencias, por lo cual los sistemas TDM operan en general a frecuencias de reloj inferiores a 100 MHz. Además, se necesita sincronización entre el transmisor y el receptor.

EJEMPLO 7.2.1

El canal 1 de un sistema PAM de dos canales manipula señales de 0-8 kHz; el segundo, de 0-10 kHz. Ambos canales se muestrean a intervalos de tiempo iguales usando pulsos muy estrechos a la menor frecuencia adecuada en teoría. Las señales muestreadas se multiplexan en el tiempo y se pasan por un filtro pasabajas antes de la transmisión. En el receptor, los pulsos de cada canal pasan a través de circuitos de retención apropiados (es decir, de muestra y retención) y filtros pasabajas.

a) ¿Cuál es la mínima frecuencia del reloj del sistema PAM?

b) ¿Cuál es la mínima frecuencia de corte del filtro pasabajas usado antes de la transmisión para preservar la información de amplitud de los pulsos de salida?

c) ¿Cuál debería ser el ancho de banda mínimo si estos canales se multiplexaran en frecuencia, usando las técnicas normales AM y las técnicas SSB?

d) Sea sen $(5000\pi t)$ la señal del canal 1 y sen $(10\,000\pi t)$ la del canal 2. Bosqueje estas señales, así como las formas de las señales en la entrada del primer filtro pasabajas, en la salida del filtro, en la salida del circuito de muestra y retención, y en la salida del filtro pasabajas del canal 2.

Solución a) Para muestrear el canal 2 de manera adecuada, deben tomarse muestras a razón de 20 kHz. Por tanto, la tasa $(T_s)^{-1}$ de reloj del conmutador es de 40 kHz y el conmutador debe reciclar a razón de 20 kHz.

↳ debe volver al canal original

http://libreria-universitaria.blogspot.com

b) Para la señal compuesta (entrelazada), $T_x = 25\ \mu s$, por lo que

$$B_x \geq \frac{1}{2T_x} = 20\ \text{kHz}.$$

c) Para AM, B mín = 2(10 + 8) kHz = 36 kHz.
Para SSB, B mín = (10 + 8) kHz = 18 kHz.
Nótese que la SSB es más eficiente por lo que se refiere al ancho de banda necesario si las señales del sistema PAM no tienen el mismo ancho de banda. Por esta razón, es usual que las señales de tasa de datos baja se multiplexen aparte de las de tasa media.

d) Véase figura 7.14.

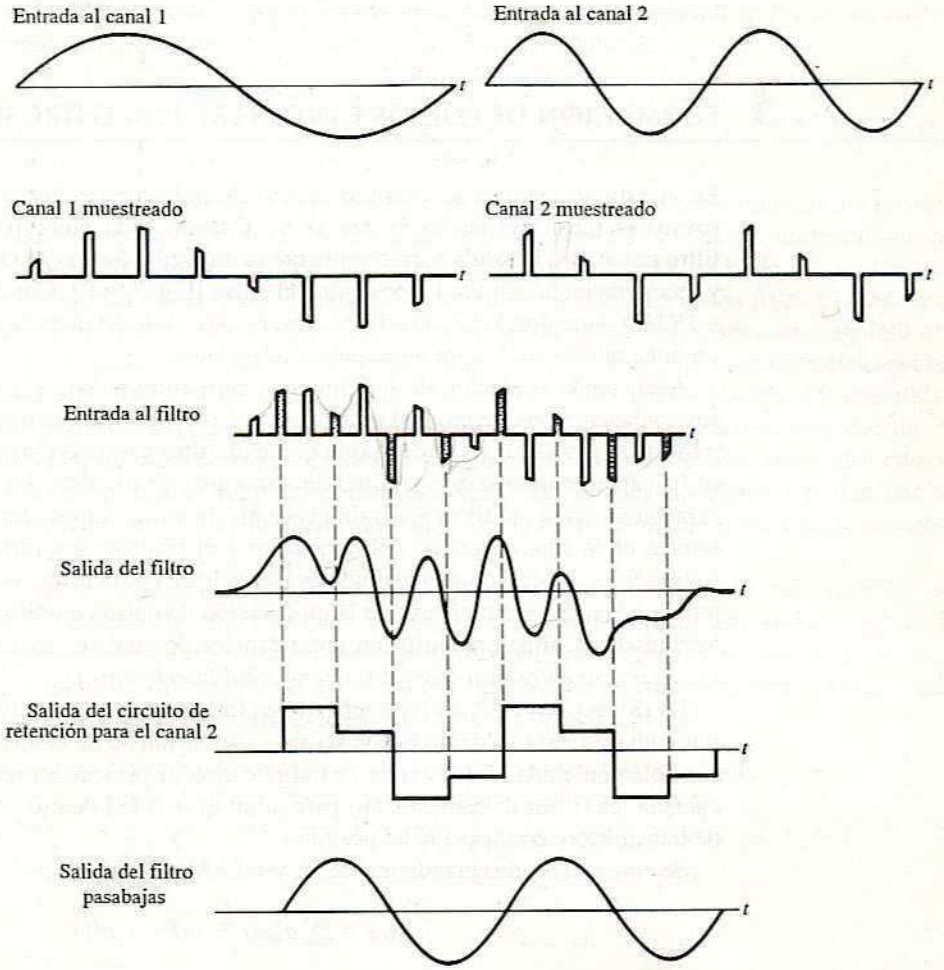


Figura 7.14 Señales correspondientes al sistema PAM de multiplexión en el tiempo del ejemplo 7.2.1.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJERCICIO 7.2.1

Dos señales pasabajas, de banda limitada a 4 kHz, se van a multiplexar en el tiempo en un solo canal usando PAM. Cada señal se muestrea con impulsos a razón de 10 kHz. La señal multiplexada se filtra con un filtro pasabajas ideal (LPF) antes de la transmisión.

a) ¿Cuál es la mínima frecuencia del reloj del sistema?
b) ¿Cuál es la mínima frecuencia de corte del LPF?
c) En el receptor, la señal se muestrea con impulsos y se demultiplexa usando el sistema de la figura 7.10(a). Determine los anchos de banda máximo y mínimo aceptables del LPF usado para recuperar las señales analógicas.

RESPUESTA: (a) 20 kHz; (b) 10 kHz; (c) 4 kHz, 6kHz.

7.3 FORMACIÓN DE PULSOS E INTERFERENCIA ENTRE SÍMBOLOS

En el estudio anterior se examinó el uso de pulsos estrechos y se supuso un filtro pasabajas ideal con ancho de banda B_x. Cuando cada pulso pasa a través de este filtro pasabajas, la salida correspondiente es una señal (sen x)/x, a una escala apropiada y retardada en la amplitud y posición del pulso [Fig. 7.9(d)]. Con pulsos espaciados $T_x = 1/(2B_x)$ segundos, la señal recibida, observada en los instantes de muestreo adecuados, produce interferencia cero entre pulsos adyacentes.

Alcanzar la condición de interferencia cero entre pulsos adyacentes requiere una sincronización precisa entre el transmisor y el receptor. También exige que el medio de transmisión (o el canal) se comporte como un filtro pasabajas ideal. Sin embargo, esto es físicamente irrealizable y difícil de aproximar en los sistemas prácticos. El uso de características de un filtro realizable hace que la última suposición no sea válida, y los errores en la sincronización del transmisor y el receptor son difíciles de eliminar. El resultado es que cada pulso recibido es afectado en cierta forma por la presencia de los pulsos adyacentes. En el caso de la modulación de pulsos multicanal, el traslapo entre los pulsos da origen a confusión entre canales, lo cual se conoce, en general, como *interferencia entre símbolos* (ISI, *intersymbol interference*).

La ISI se puede reducir ensanchando en forma intencional la banda de transmisión. Sin embargo, esta solución puede ser un gasto de ancho de banda innecesario si no se controla con cuidado. Por tanto, se trata de diseñar las señales recibidas (y en consecuencia los filtros de transmisión) para minimizar la ISI dentro de un ancho de banda de transmisión lo más pequeño posible.

Se empieza representando una señal $y(t)$ PAM recibida como [†]

$$y(t) = \sum_m a_m x(t - mT) + n(t), \tag{7.14}$$

[†]Aquí se supone, por conveniencia, el caso del canal sencillo, pero los resultados se pueden ampliar con rapidez al caso TDM multicanal.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

donde m es un entero y T es el periodo de muestreo, $x(t)$ representa la señal de pulso, a_m los valores muestreados de la entrada y $n(t)$ es el ruido aditivo. En un instante dado, $t = kT$, se tiene

$$y(kT) = a_k x(0) + \sum_{m \neq k} a_m x[(k - m)T] + n(kT) . \tag{7.15}$$

En la ecuación (7.15), el primer término representa el k-ésimo valor muestreado de la entrada que se ha transmitido. El segundo término proviene del traslapo de otros pulsos que se agregan al pulso deseado $a_k x(t - kT)$ en el k-ésimo tiempo de muestreo. Por tanto, este término representa la ISI. El último término de la ecuación (7.15) representa el ruido aditivo en el tiempo $t = kT$.

La ISI dada por el segundo término puede eliminarse eligiendo la forma del pulso recibido $x(t)$, de manera que satisfaga la siguiente condición:[†]

$$x[(k - m)T] = \begin{cases} 1 & m = k \\ 0 & m \neq k \end{cases} . \tag{7.16}$$

Nótese que la respuesta al impulso del filtro pasabajas ideal de la sección anterior (véase Fig. 7.9) satisface esta condición. Los ceros espaciados de manera uniforme en la respuesta al impulso en todos los múltiplos distintos de cero de los periodos de muestra dan cero ISI en este caso. Como este filtro no es realizable en forma física e incluso es difícil de aproximar en la práctica, se modifica la aguda característica en magnitud de corte para obtener una atenuación más gradual de la frecuencia que no afecte el deseable espaciado uniforme de los ceros en la repuesta al impulso. Esto es posible si la respuesta de magnitud del filtro ajustado tiene simetría impar con la frecuencia de corte pasabajas.[‡] El cumplimiento de este requisito da origen a una clase de señales conocidas como *señales de Nyquist*. En otras palabras, todas las señales de Nyquist tienen ceros espaciados de manera uniforme en todos los múltiplos de un intervalo básico excepto uno (en el centro).

Un tipo de señal de Nyquist utilizado en el trabajo tanto analítico como práctico es el del coseno elevado. Una característica de coseno elevado consiste en una magnitud plana o constante a frecuencias bajas y una porción de atenuación que tiene forma senoidal con simetría impar alrededor de la frecuencia de corte. Las características del coseno elevado se pueden expresar en forma de ecuación como[§]

$$X(\omega) = \begin{cases} T & 0 \leq |\omega| \leq (1 - \alpha)W \\ \dfrac{T}{2}\left\{1 - \operatorname{sen}\left[\dfrac{\pi}{2\alpha W}(|\omega| - W)\right]\right\} & (1 - \alpha)W \leq |\omega| \leq (1 + \alpha)W \\ 0 & |\omega| > (1 + \alpha)W \end{cases} \tag{7.17}$$

[†] Esto supone la normalización conveniente $x(0) = 1$.

[‡] M. Schwartz, *Information Transmission, Modulation, and Noise*, 3a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1980, pág. 181.

[§] Nótese que esta característica se podría expresar en términos de $\cos^2(\bullet)$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

donde $W = \pi/T$. El parámetro α es el exceso de banda utilizada dividido por el ancho de banda de Nyquist mínimo. Por tanto, el caso de $\alpha = 0$ coincide con el filtro pasabajas ideal utilizado en la sección precedente. La respuesta al impulso correspondiente es

$$x(t) = \left(\frac{\text{sen } Wt}{Wt}\right)\left(\frac{\cos \alpha Wt}{1 - (2\alpha Wt/\pi)^2}\right). \tag{7.18}$$

El primer término a la derecha de esta ecuación es la señal (sen x)/x que se había usado previamente para el filtro pasabajas ideal, y mantiene los cruces por cero originales de esa señal. El segundo término es el resultado de la atenuación gradual espectral.

En la figura 7.15 aparecen gráficas de $x(t)$ y $X(\omega)$ para tres valores de α. El caso de $\alpha = 1$ se conoce como característica de atenuación del coseno completo; su función de transferencia en frecuencia es

$$X(\omega) = \begin{cases} \dfrac{T}{2}\left(1 + \cos\dfrac{\pi\omega}{2W}\right) & |\omega| \le 2W \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \tag{7.19}$$

Nótese que en el caso $\alpha = 1$, $x(t)$ tiene ceros enmedio de los tiempos de muestreo, además de los ceros de muestreo. Las amplitudes de los extremos oscilatorios de $x(t)$ son menores cuando $\alpha = 1$ (es decir, la atenuación más gradual). Por tanto, este tipo de respuesta produce una menor ISI para determinado error en el tiempo de muestreo, aunque esto requiere la transmisión de algunas componentes espectrales que son de hasta el doble de las requeridas en el caso del pasabajas ideal. El parámetro α se llama *factor de atenuación.*

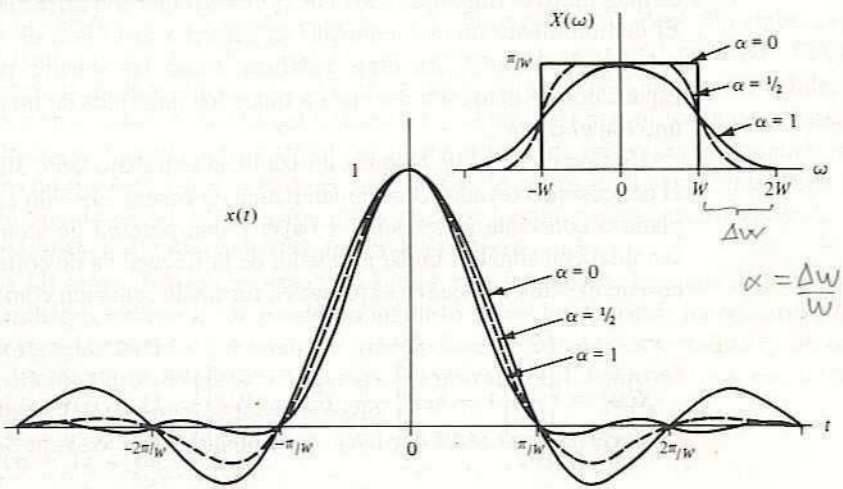


Figura 7.15 Formación del pulso coseno elevado (en frecuencia) y las respuestas resultantes en el tiempo.†

† La razón π/W se puede escribir como $1/(2B)$ para que sea más cercana la congruencia con la figura 7.9(c).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Es instructivo entender por qué las señales coseno elevado son tan efectivas para proporcionar condiciones de cero ISI. Considérese el caso mostrado en la figura 7.16(a). Tomando la derivada con respecto a ω, se obtiene la gráfica mostrada en la figura 7.16(b). Una observación importante es que esta gráfica se puede descomponer en la convolución de un par de funciones impulso dirigidas de manera opuesta en $\omega = \pm W$ y una función de transferencia en frecuencia semicosenoidal (pasabajas), como se muestra en la figura 7.16(c). Utilizando la propiedad de la convolución de que la integral de una función es equivalente a la integral del resultado, se compensa la primera derivación y se llega al resultado final mostrado en la figura 7.16(d). Es fácil demostrar que las dos gráficas de la figura 7.16(d) proporcionan los dos términos, respectivamente, de la respuesta al impulso dada en la ecuación (7.18).

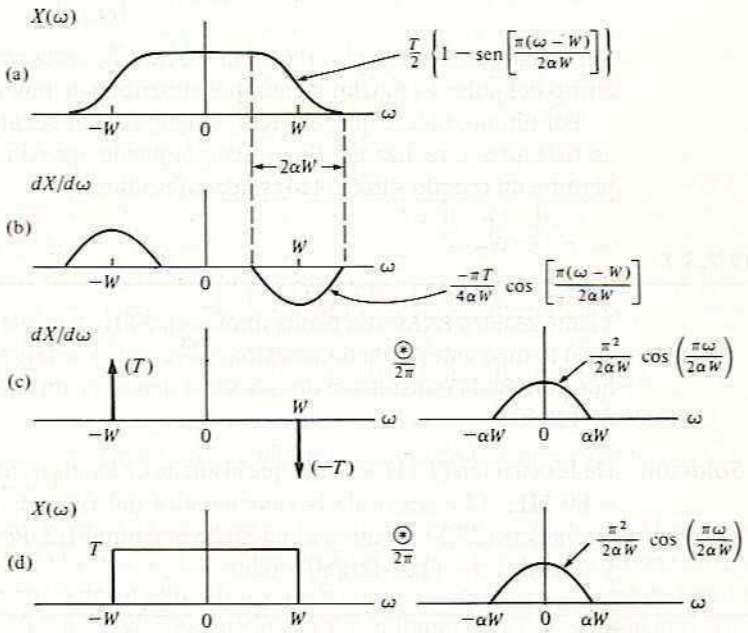


Figura 7.16 Descomposición de la formación del pulso coseno elevado.

Nótese que la descomposición de la derivada de $X(\omega)$ en funciones en las que una es un par de impulsos opuestos en $\omega = \pm W$ garantiza que se satisfagan las características de la ecuación (7.16) (excepto por una constante). Como resultado de la propiedad de simetría de las conjugadas complejas de la transformada de Fourier, la función de transferencia en frecuencia pasabajas debe tener simetría par. Por tanto, el resultado de la convolución tiene simetría impar alrededor de la frecuencia de corte del filtro pasabajas ideal.

En resumen, el ancho de banda ocupado por una característica de transmisión de tipo coseno elevado varía de un mínimo de $B = 1/(2T)$ Hz ($\alpha = 0$) a un máximo de $B = 1/T$ ($\alpha = 1$). Los mayores valores de α conducen a una más rápida disminución de los pulsos, por lo que la sincronización del receptor será menos crítica y los errores de tiempo

http://libreria-universitaria.blogspot.com

moderados no causarán grandes cantidades de ISI, aunque a costa de añadir ancho de banda. Entonces, para controlar la cantidad del ISI tolerable, la ecuación (7.11) debe modificarse a

$$B_x = \frac{(1 + \alpha)}{2T_x}. \tag{7.20}$$

Hasta aquí se han considerado los filtros cuya respuesta al impulso es la forma de pulso necesaria para cero ISI. En la práctica, las entradas no son impulsos sino pulsos de ancho finito. Designando con $Q(\omega)$ la transformada de Fourier de estos pulsos de ancho finito, se halla que la magnitud de la función de la transferencia de frecuencia del filtro formador requerido es

$$|H(\omega)| = \left|\frac{X(\omega)}{Q(\omega)}\right|. \tag{7.21}$$

Sin embargo, como se observó en la sección 7.1, esta corrección no es importante si el ancho del pulso es mucho menor que el periodo de muestra.

Por último, nótese que, en rigor, ninguna de las señales de pulso de coseno elevado es físicamente realizable. Sin embargo, puede aproximarse con filtros causales si se permite un retardo suficiente (es decir, fase lineal).

EJEMPLO 7.3.1

Veinte señales PAM, con banda limitada a 3 kHz y muestreadas a 8 kHz, se multiplexan en el tiempo antes de la transmisión. Elija una característica de filtro de coseno elevado que permita la transmisión de esta señal dentro de un ancho de banda máximo absoluto de 120 kHz.

Solución De la ecuación (7.11), se halla que el ancho de banda mínimo con un LPF ideal es $(2T_x)^{-1}$ = 80 kHz. El examen de la característica del filtro de coseno elevado revela que la frecuencia $(2T_x)^{-1}$ se ajusta al punto de magnitud 1/2. Por tanto, éste se ajusta a 80 kHz y se utiliza $\alpha = (120-80)/80 = 0.50$.

7.4 OTROS TIPOS DE MODULACIÓN DE PULSO ANALÓGICA: PWM Y PPM

Recuérdese que para transmitir una señal $f(t)$ de banda limitada a f_m Hz sólo se necesita transmitir la información sobre sus valores de muestra en intervalos de $(2f_m)^{-1}$ segundos. Se ha visto una forma de conseguir esto usando PAM y haciendo que las magnitudes de un tren de pulsos de ancho constante y equidistantes varíen en proporción a $f(t)$. Un método de modulación alterno es variar algún parámetro en la regulación de cada pulso para conducir la información. La modulación por regulación del pulso puede obtenerse en varias formas, aunque los principios son básicamente los mismos. Aquí sólo se verán dos tipos específicos.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Uno de ellos emplea pulsos de amplitud constante cuyo ancho es proporcional a los valores de $f(t)$ en los instantes de muestreo. Este tipo se designa como *modulación de ancho de pulso* (PWM, *pulse-width modulation*).† Otra posibilidad es mantener constantes la amplitud y el ancho de los pulsos y variar su posición en proporción a los valores de $f(t)$ en los instantes de muestreo. Esto se designa como *modulación de posición de pulso* (PPM, *pulse-position modulation*). En la figura 7.17 se muestran las señales PAM, PWM y PPM para una función $f(t)$ dada.

Los distintos tipos de modulación de regulación de pulso se hallan estrechamente relacionados entre sí y pueden derivarse unos de otros. En general, la relación entre la modulación de regulación de pulso y la modulación de ángulo es análoga a la de PAM entre AM. De hecho, uno de los métodos para generar PM o FM de banda ancha es generar antes PWM o PPM.

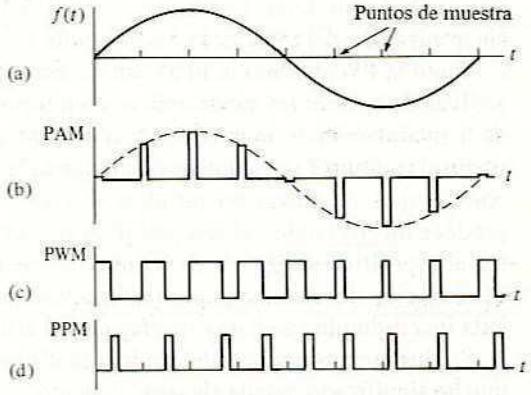


Figura 7.17 Una ilustración de PAM, PWM y PPM.

En PWM, la señal $f(t)$ se muestrea en forma periódica a una tasa bastante rápida como para satisfacer los requisitos del teorema del muestreo. En cada instante de muestreo se genera un pulso de amplitud fija y ancho proporcional a los valores de muestra de $f(t)$, con un ancho mínimo τ_0 asignado al valor mínimo de $f(t)$. La variación del ancho del pulso a partir de τ_0 es proporcional a $f(t)$, definiéndose una constante de proporcionalidad k_1. La duración del pulso debe ser menor que la porción de tiempo asignada a una muestra en particular, dejando por lo general un tiempo de guardia adicional τ_g. En la figura 7.17(c), la modulación se regula con el flanco de subida de cada pulso. Otra versión del PWM es modular ambos flancos de manera simultánea (es decir, en forma simétrica).

La PWM es una elección frecuente cuando se desea el control remoto proporcional de una posición o cierta razón de posición. El valor promedio de una señal PWM varía directamente con la modulación y puede usarse para controlar un motor con operaciones de conmutación eficientes. El control proporcional debe mantenerse relativamente

† También se usa la designación *modulación de duración de pulso* (PDM, *pulse-duration modulation*).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

independiente de la fuerza de la señal sobre un intervalo amplio. La FM también se usa para control remoto de posición, pero los sistemas PWM suelen ser más fáciles de construir y alinear. Entre las desventajas de la PWM se encuentra la necesidad de detectar ambos bordes del pulso y un tiempo de guardia relativamente largo. Los efectos de los transitorios de la señal introducidos en el sistema pueden variar con el ancho del pulso, causando un comportamiento no uniforme.

Sólo los bordes de salida de las señales PWM contienen la información moduladora. Por tanto, la información puede conducirse enviando sólo estas marcas de tiempo. En la PPM, éstas se envían como pulsos de ancho y amplitud constante, como se ve en la figura 7.17(d). El mínimo retardo de pulso se usa para designar el mínimo valor de $f(t)$ y el cambio de retardo es proporcional a la señal moduladora. La constante de proporcionalidad es k_1. Aunque en general la PPM es más eficiente que la PWM para comunicaciones, su uso requiere un método para restaurar la sincronización del reloj. Por el contrario, tanto la PAM como la PWM son "autosincronizables", es decir, la sincronización del reloj está presente en la señal modulada.

Tanto la PWM como la PPM son métodos de modulación no lineales, por lo que el análisis de Fourier no puede aplicarse en forma directa. Sin embargo, como en el caso de la modulación de ángulo, puede obtenerse alguna información útil.

En el capítulo 3 se vio que los sistemas de banda limitada tienen respuestas de tiempo con tiempos de elevación infinitos. En la modulación de regulación de pulso, esto produce incertidumbre al reconstruir la estructura detallada de la señal. La incertidumbre al especificar o reproducir la amplitud de una señal dada es proporcional al tiempo de elevación del sistema y, por tanto, inversamente proporcional a su ancho de banda. Esta incertidumbre se llama *resolución* del sistema.

Sin los efectos nocivos del ruido y la distorsión, el concepto de resolución no tiene mucho significado; puede elegirse un punto en la característica del tiempo de elevación del sistema para indicar la detección de la señal si la respuesta se conoce de manera exacta. Sin embargo, en presencia de ruido se usa en general el siguiente criterio: *la resolución en el tiempo de un sistema de regulación de pulso en presencia de ruido es igual al tiempo de elevación del sistema.*[†]

Como resultado de mediciones de sistemas prácticos en presencia de ruido, la regla de que los pulsos deben espaciarse al menos por el ancho efectivo de la respuesta del sistema a un impulso resulta un criterio bastante bueno. Del conocimiento de los sistemas lineales invariables en el tiempo, se deduce que el tiempo de elevación del sistema es una medida del ancho efectivo de la respuesta al impulso.

Este criterio se puede demostrar de manera sencilla en la práctica aplicando dos pulsos estrechos en la entrada de un filtro pasabajas, como se muestra en la figura 7.18.

[†] Esta regla no es tan arbitraria como podría parecer. El tiempo de elevación de un sistema es la integral indefinida de la respuesta al impulso. La pregunta que en realidad se está planteando es cuán cerca pueden estar dos impulsos de igual magnitud en la entrada de un sistema antes de que no se pueda distinguir que eran dos, y cuál debe ser su separación a juzgar por la salida. Éste es un problema clásico estudiado primero en la separación de imágenes puntuales en los telescopios ópticos. El criterio de Rayleigh, formulado en esos estudios, establece que dos imágenes puntuales son resolubles justamente cuando están separadas por el ancho efectivo de la respuesta al impulso del sistema observador. Lo que se ha establecido aquí es, en esencia, el criterio de Rayleigh.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

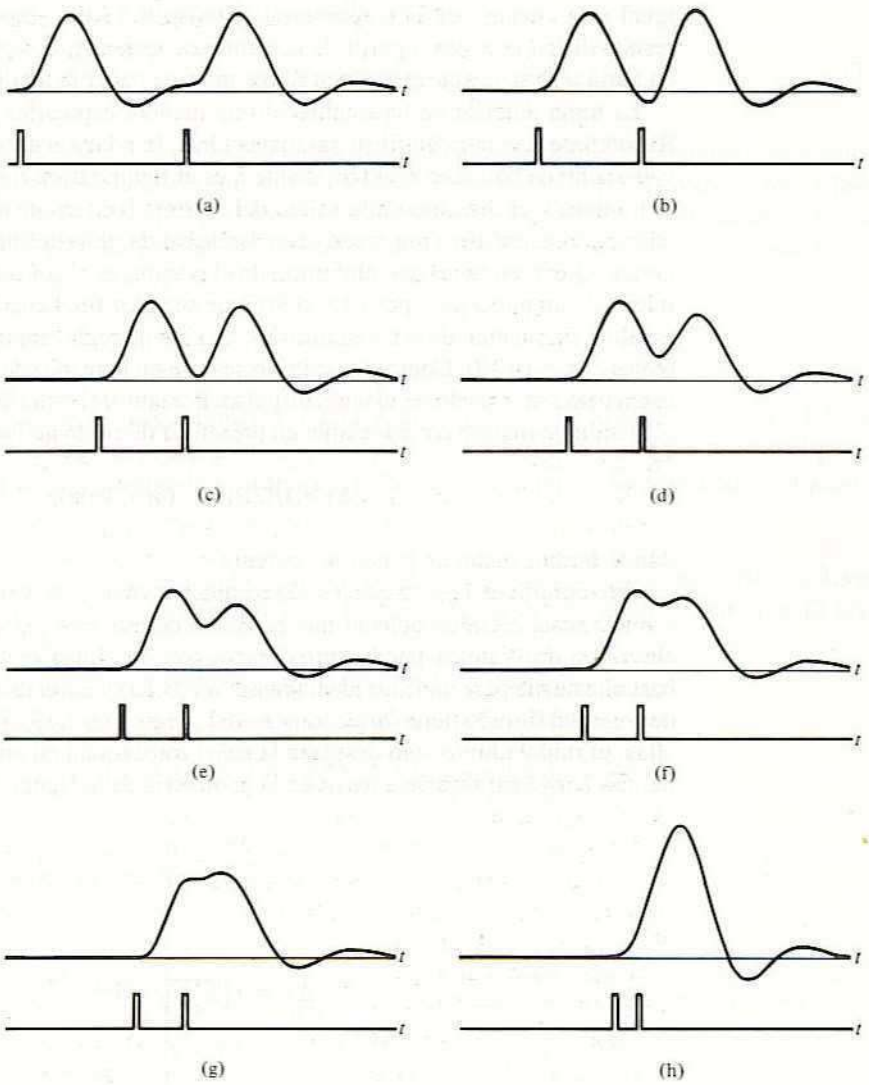


Figura 7.18 Resolución de pulso de un filtro pasabajas.

Aquí se aplican dos pulsos, cada uno de 3 μs de duración, a la entrada de un filtro Butterworth pasabajas de quinto orden con frecuencia de –3dB de 80 kHz (el tiempo de elevación es de alrededor de 6 μs y los pulsos son suficientemente estrechos como para considerarse impulsos). Se muestran las señales de entrada y salida del filtro para varias separaciones de los pulsos. La posición del primero es variable y la del segundo, fija. Se aprecia cierto retardo en la respuesta del filtro.

Empezando con las señales de la figura 7.18(a), se ve que los pulsos y las correspondientes respuestas están bien separados. A medida que los pulsos se acerquen entre sí, se tiende a la condición de la figura 7.18(e), en la cual la separación de los pulsos es

http://libreria-universitaria.blogspot.com

igual a la anchura de la respuesta al impulso del filtro. Para separaciones menores, resulta difícil detectar, a partir de la respuesta, que existen dos pulsos. Esto sería cierto en particular si se agregara algún ruido antes de hacer la medición.

La regla anterior se ha establecido de manera específica para sistemas prácticos. Recuérdese que para un filtro pasabajas ideal, la relación entre el tiempo de elevación y el ancho de banda es $t_r = 1/B$, donde t_r es el tiempo transcurrido (en segundos) entre el mínimo y el máximo de la salida del filtro y B es su ancho de banda (en Hz). Sin embargo, en los filtros prácticos, el ancho de banda suele definirse con base en el criterio de los -3 dB, en tanto que el tiempo de elevación es el transcurrido para que el borde inicial de un pulso pase del 10% al 90% de su valor final cuando se aplica una función escalón. En función de estas cantidades, una buena regla empírica para filtros pasabajas reales es $t_r \approx 1/(2B)$. Como este criterio se basa en la respuesta de sistemas prácticos, se usará para sistemas de regulación de pulso. Por tanto, el criterio empírico para la mínima precisión de tiempo $\Delta\tau$ detectable en presencia de ruido activo es

$$\Delta\tau \approx 1/(2B) \qquad (S/N \text{ baja}), \tag{7.22}$$

donde B es el ancho de banda del sistema.

Este criterio en la ecuación (7.22) resulta pesimista, en particular para razones señal a ruido altas. A fin de obtener una ecuación de este caso, se supone que el tiempo de elevación del sistema puede aproximarse con una línea recta. Esta aproximación es bastante buena para un filtro ideal (véase Sec. 3.13). Con esta aproximación, cada pulso después del filtrado tiene forma trapezoidal (véase Fig. 7.19). Para razones señal a ruido altas, el ruido aditivo sólo desplaza la señal trapezoidal en amplitud, y la precisión de tiempo puede expresarse a partir de la geometría de la figura 7.19:

$$\frac{\Delta\tau}{t_r} = \frac{n}{A},$$

o

$$\Delta\tau = t_r[\overline{n^2(t)}/A^2]^{1/2}.$$

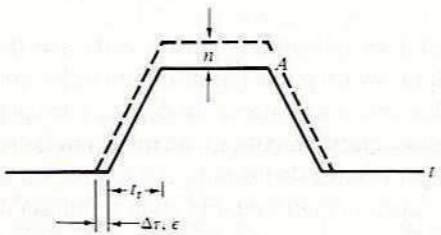


Figura 7.19 Variación de la posición del pulso como resultado del ruido aditivo.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Para el filtro pasabajas ideal, $t_r \approx 1/B$, por lo que

$$\Delta\tau \approx \frac{1}{B\sqrt{[S/N]_{pk}}} \qquad ([S/N]_{pk} \text{ alta}), \tag{7.23}$$

donde $[S/N]_{pk}$ es la relación entre la potencia pico del pulso y la potencia promedio del ruido. Nótese que el resultado "empírico" de la ecuación (7.22) corresponde a $[S/N]_{pk} = 4$ (es decir, 6 dB). Este valor se toma a menudo como umbral de detección para la modulación de regulación de pulso. Salvo especificaciones contrarias, este valor de umbral se usará en los cálculos de los sistemas.

EJEMPLO 7.4.1

Una señal de banda limitada a 1 kHz con intervalo de amplitud de −1 a +1 V debe enviarse con una resolución de ±0.5 mV usando PWM. El ancho mínimo del pulso es de 1 μs y el tiempo de guardia es igual al ancho mínimo del pulso. Estime el ancho de banda necesario para que $[S/N]_{pk} = 20$ dB.†

Solución En la figura 7.20 se ilustra un diagrama de tiempo-amplitud para este sistema. Usando este diagrama como guía, se tiene lo siguiente. El tiempo de muestreo es de $(2 \text{ kHz})^{-1} = 500$ μs.

Tiempo disponible para la modulación: $500 - 2 = 498$ μs.

Constante de modulación: $k_1 = 498/2 = 249$ μs/V.

Precisión de tiempo requerida: $\Delta\tau = k_1 \times$ (resolución de la señal)
$= (249)(10^{-3}) = 0.249$ μs.

Ancho de banda: $B \approx 1/(10\,\Delta\tau) = 402$ kHz.

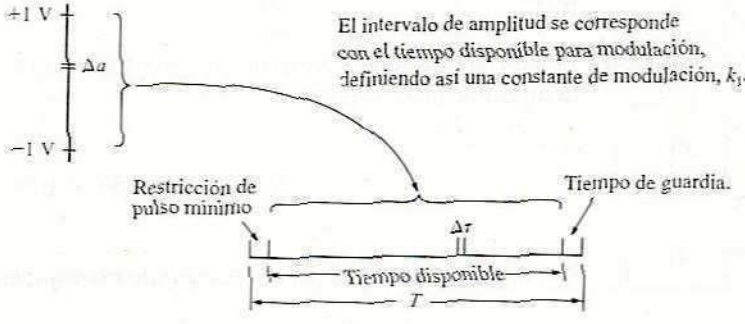


Figura 7.20 Diagrama de tiempo-amplitud para el sistema PWM del ejemplo 7.4.1.

† El lector quizá desee investigar aquí el compromiso ancho de banda-S/N para una $\Delta\tau$ dada [véase Ec. (7.23)].

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJERCICIO 7.4.1

Un sistema de telemetría de cinco canales controlado por radio usa PPM.† El tiempo entre muestras consecutivas del canal 1 es de 100 ms; la mitad de este tiempo se usa en la sincronización (véase Fig. 7.21). El ancho del pulso y el tiempo de guardia son de 1 ms. (a) ¿Qué ancho de banda mínimo del receptor recomendaría usted si la resolución (de los servos) debe ser de ± 2% del máximo para $[S/N]_{pk}$ = 15 dB? (b) ¿Cuál es la respuesta de máxima frecuencia para cada canal?

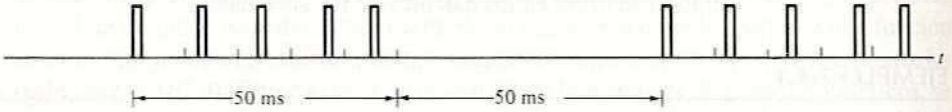


Figura 7.21 El sistema PPM del ejercicio 7.4.1.

RESPUESTA: (a) 556 Hz; (b) 5 Hz.

EJEMPLO 7.4.2

Un radar usa regulación de pulsos para determinar la distancia. Desde la antena se radia una pequeña emisión de energía electromagnética de alta frecuencia. El receptor amplifica y detecta la energía reflejada por los objetos. La medida del retardo entre la emisión y la recepción indica la distancia al objeto reflejante. Si éste es relativamente pequeño, la señal reflejada es una réplica retardada de la señal transmitida. Deduzca expresiones para la distancia R y la resolución ΔR si el tiempo de retraso medido es de τ segundos y el ancho de banda del receptor (pasabajas) es B Hz.

Solución El pulso transmitido viaja al objeto reflejante y regresa a la velocidad de la luz, c, en el tiempo τ de manera que

$$R = c\tau/2 = 150 \times 10^6\tau \quad \text{m}.$$

Por tanto, un retardo de un microsegundo corresponde a 150 metros de distancia.

† Este tipo de sistema se usa comúnmente para modelos controlados por radio. Para simplificar el diseño del receptor y evitar derivar una señal del reloj para la sincronización del canal, cada referencia de canal es accionada, a menudo, por la precedente. Esto requiere la transmisión de seis pulsos para cinco canales pero, por lo demás, todos los principios de operación son iguales que los de la PPM convencional.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La resolución de la distancia se relaciona con la sincronización del pulso por $\Delta R = (\Delta\tau)c/2$. La exactitud de la sincronización está limitada por el tiempo de elevación del receptor y $B \approx 1/(2t_r)$, por lo que

$$\Delta R \approx c/(4B) \qquad \text{m}.$$

En consecuencia, se necesita un ancho de banda del receptor del orden de 75 MHZ para alcanzar una resolución de 1 metro.

Para generar la modulación de regulación de pulso suelen emplearse diversas combinaciones de un circuito de muestra y retención, un generador de tensión en rampa de precisión y un comparador. En la figura 7.22(a) se muestra un diagrama de bloques de un circuito típico para generar PWM y PPM. La operación del circuito de muestra y retención ya se examinó en una sección previa. El generador de rampa produce una tensión en rampa de precisión cuya amplitud pico a pico es ligeramente mayor que el máximo intervalo de amplitud de las señales de entrada. Esta tensión en rampa es la base de la conversión de amplitud a sincronización y, por tanto, debe conocerse con precisión. Puede reajustarse por medio del reloj. El comparador es un amplificador de alta ganancia que opera entre dos valores. Si la señal de entrada es mayor que el nivel de referencia, la salida se mantiene en un estado (es decir, un nivel

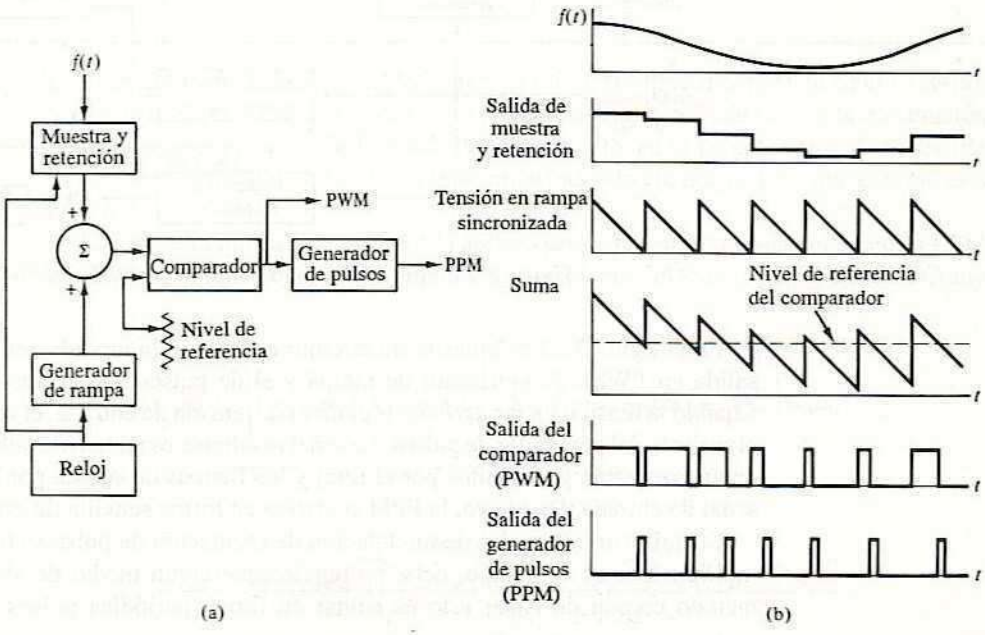


Figura 7.22 Método para generar PWM y PPM.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

de tensión dado). Si es menor, la salida se mantiene en el otro estado (nivel de tensión). Qué estado exista en la salida depende de que la entrada esté por encima o por debajo del umbral (nivel de referencia) del comparador. La transición entre ambos estados ocurre de manera muy abrupta si el comparador está bien diseñado.

En la figura 7.22(b) se muestran las señales de la generación de PWM y PPM usando este sistema. El nivel de tensión de referencia del comparador se ajusta de manera que siempre se interseca con la suma del circuito de muestra y retención y la tensión en rampa. En este sistema, el primer cruce del nivel de referencia indica la sincronización del reloj y el segundo genera el borde de salida variable. La amplitud constante de los pulsos de salida se determina por los niveles de tensión de salida del comparador. Si la tensión en rampa es lineal, el tren de pulsos de salida es PWM.

Una forma conveniente de generar PPM es usar la señal PWM generada y entonces accionar un generador de pulsos de ancho constante en los flancos de la señal PWM con pendiente negativa, como se ilustra en la figura 7.22(b). Este generador produce pulsos de ancho y amplitud fijos cuyo tiempo de ocurrencia, con relación al reloj, se relaciona en forma lineal con los valores muestreados de la señal de entrada.

En la práctica se usan diferentes versiones de estos circuitos. En ocasiones, si la razón de muestreo es alta, la operación de muestra y retención se suprime. Nótese que la modulación del borde delantero de la señal PWM puede efectuarse invirtiendo la pendiente de la tensión rampa. Si se usa una tensión en rampa simétrica, ambos flancos del pulso se modulan de manera simétrica.

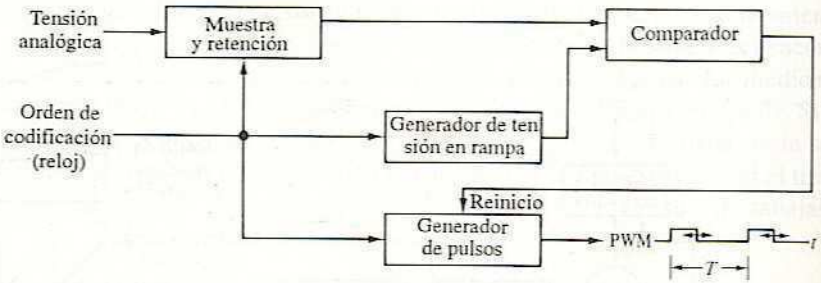


Figura 7.23 Método común de generación de PWM.†

En la figura 7.23 se muestra un circuito usual para la modulación de los bordes de salida en PWM. El generador de rampa y el de pulsos son accionados por el reloj. Cuando la tensión en rampa excede el nivel de tensión de entrada, el comparador indica el reajuste del generador de pulsos. La señal resultante es un tren de pulsos cuyos flancos delanteros están gobernados por el reloj y los flancos de subida por la amplitud de la señal de entrada. De nuevo, la PPM se deriva en forma sencilla de esta señal PWM.

Cuando varios canales de modulación de regulación de pulso se transmiten usando multiplexión en el tiempo, debe proporcionarse algún medio de sincronización. Un método común de hacer esto es enviar en forma periódica pulsos más anchos que

† En realidad, el generador de pulso no es necesario, pero se utiliza como una etapa de amplificación.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

cualquiera de los usados en la modulación. Estos pulsos pueden detectarse con un integrador y un comparador en el receptor y usarse para sincronizar los conmutadores. Este esquema es muy útil en particular cuando se usa PPM porque el cambio en el ancho del pulso puede hacerse grande para distinguir de manera sencilla los pulsos de sincronización.

7.5 RAZONES SEÑAL A RUIDO EN LA MODULACIÓN DE PULSO ANALÓGICA

Las modulaciones de pulso que se han examinado en secciones anteriores emplean la variación de algún parámetro (p. ej., amplitud, posición, ancho, etc.) de un tren de pulsos en respuesta a la amplitud de una señal de entrada. Esta variación es analógica (es decir, de amplitud continua) aunque la información se envíe en intervalos de tiempo discretos. Por ello, en general se clasifica como *modulación de pulso analógica*.

Aquí se investigará el comportamiento de los sistemas de modulación de pulso analógica en presencia de ruido aditivo. En muchos aspectos, el comportamiento de modulación de la PAM es análogo al de la AM, mientras que de la PWM y la PPM lo es en relación con los de FM y PM. No debe sorprender, pues, que el comportamiento señal a ruido de la PAM sea igual al de la SSB-SC y que los de la PWM y PPM estén relacionados en forma estrecha con los de FM y PM.

5.1 PAM

En la transmisión de la señal PAM se agrega ruido, como se ilustra en la figura 7.24(a). Sin embargo, el ruido que aparece entre pulsos añade potencia de ruido a la transmisión sin aumentar la potencia de la señal. Para evitar esto, en el receptor se usa un circuito sensibilizador sincronizado para aceptar muestras sólo cuando se sabe que la señal está presente.

Se supondrá que la señal y el ruido aditivo presentes en la entrada del receptor PAM son de banda limitada y que se cumplen las condiciones del teorema del muestreo. Como

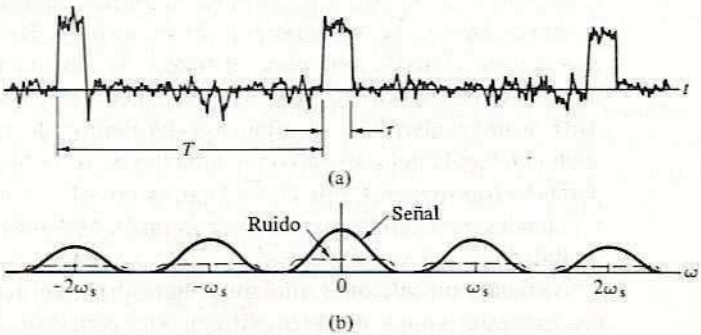


Figura 7.24 (a) Señal PAM en el tiempo con ruido de transmisión aditivo; (b) espectro de PAM con señal de entrada y ruido de banda limitada.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

el receptor PAM es lineal, pueden aplicarse por separado la señal y el ruido, medir sus potencias y después combinarlas. El muestreo y el filtrado pasabajas en el receptor reproducen los espectros de la señal y el ruido de banda limitada, excepto por una constante, como se muestra en la figura 7.24(b). De ahí puede escribirse

$$\overline{s_o^2(t)} = k\overline{s_i^2(t)},$$
$$\overline{n_o^2(t)} = k\overline{n_i^2(t)},$$

por lo que

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{S_i}{N_i}. \tag{7.24}$$

Esto puede ampliarse al PAM multiplexado en el tiempo siempre que las muestras de canales adyacentes sean independientes; es decir, si se satisface la ecuación (7.11). Nótese que la ecuación (7.24) es la misma que se obtuvo para sistemas SSB-SC [véase Ec. (5.80)]. Estos resultados se basan en la potencia promedio. En la sección 7.11 se examinará el problema de maximizar la razón señal pico a raíz cuadrática media del ruido para cada pulso.

7.5.2 Modulación de regulación de pulsos

En esta modulación (como en la PWM o la PPM), la información está contenida en la posición relativa de los flancos del pulso. Aunque aquí el análisis se restringe a sistemas PAM, las conclusiones generales son válidas para otros sistemas de regulación de pulsos.

Para conducir la información los pulsos deben generarse con tiempos de elevación bastante cortos (rápidos), aunque, después de pasar por un sistema de banda limitada, sus tiempos de elevación están regulados por el ancho de banda del sistema. Este tiempo de elevación se aproximará con una rampa lineal como en la figura 7.19, de manera que el pulso adopte una forma trapezoidal.

La posición del pulso trapezoidal es sensible al ruido aditivo. Si se supone que la tensión de ruido varía en forma lenta con relación al tiempo de elevación del pulso, la variación de la amplitud n del pulso se puede representar por un desplazamiento ϵ en su posición, como se muestra en la figura 7.19. De hecho, en esta figura se ve que el error posicional ϵ del pulso debido a la tensión de ruido agregado n se puede reducir aumentando la pendiente del flanco del pulso. Para una potencia de ruido dada, esto requiere una disminución del tiempo de elevación t_r (aumentando así el ancho de banda del sistema) o un aumento de la amplitud del pulso A (aumentando la potencia transmisora). Por tanto, aquí es posible un intercambio de ancho de banda y potencia transmitida para mejorar la razón S/N, más que en los sistemas de ángulo modulado.

Haciendo suposiciones similares a las hechas en el análisis de la FM, puede obtenerse una expresión simple que ejemplifique estas conclusiones. En particular, se supone que la potencia media de ruido de salida se mide sin modulación y para una razón señal a ruido grande. Además, la potencia de la señal de salida se mide sin ruido.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

De la geometría de la figura 7.19, se tiene

$$\frac{\epsilon}{t_r} = \frac{n}{A},$$

o

$$\overline{\epsilon^2} = (t_r/A)^2 \overline{n^2}. \tag{7.25}$$

La amplitud de la señal de salida es proporcional a la señal moduladora $f(t)$ por medio de una constante k, por lo que

$$s_o(t) = kf(t),$$

o

$$\overline{s_o^2(t)} = k^2 \overline{f^2(t)}. \tag{7.26}$$

El ruido de salida, de la ecuación (7.25), es

$$\overline{n_o^2(t)} = \overline{\epsilon^2} = (t_r/A)^2 \overline{n_i^2(t)}. \tag{7.27}$$

Además, se tiene

$$\overline{s_i^2(t)} = A^2(\tau/T), \tag{7.28}$$

y para el filtro ideal (con un tiempo de elevación casi lineal),

$$B \approx 1/t_r. \tag{7.29}$$

Combinando las ecuaciones (7.26) a (7.29), se tiene

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{k^2 \overline{f^2(t)}}{\tau/T} B^2 \frac{S_i}{N_i}, \tag{7.30}$$

o

$$\frac{S_o}{N_o} \propto B^2 \frac{S_i}{N_i}. \tag{7.31}$$

Por tanto, la mejora en S/N en un sistema PPM es proporcional al cuadrado del ancho de banda, como en los sistemas de modulación de ángulo.

Sin embargo, como en el caso de la modulación de ángulo, la razón señal a ruido de salida no puede mejorarse en forma indefinida en los sistemas de regulación de pulsos. La potencia de ruido aceptada por el receptor aumenta con el ancho de banda, haciéndose finalmente comparable al nivel de la señal, violando la suposición de una razón señal a ruido grande y saturando el sistema. Este efecto de umbral se produce para razones señal a ruido del orden de 6 dB.

Es instructivo comparar las expresiones de S/N para FM y PPM. Recuérdese que para FM se obtuvo [véase Ec. (6.115)]

$$\frac{S_o}{N_o} = 3\beta^2 \frac{S_c}{N_c}.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Para la condición de FM de banda ancha $\beta \approx B/(2f_m)$, por lo que

$$\frac{S_o}{N_o} \propto \left(\frac{B}{f_m}\right)^2 \frac{S_c}{N_c} \quad \text{para FM de banda ancha.} \tag{7.32}$$

Para PPM, la constante de modulación k es proporcional al tiempo entre pulsos, que a su vez está gobernado por el teorema del muestreo. Por tanto, $k \propto 1/f_m$ y la ecuación (7.30) puede reescribirse como

$$\frac{S_o}{N_o} \propto \left(\frac{B}{f_m}\right)^2 \frac{S_i}{N_i} \quad \text{PPM}. \tag{7.33}$$

En ambos casos, la razón señal a ruido de la tensión de salida es proporcional a la relación entre el ancho de banda de transmisión B y el de la señal f_m. A mayor razón B/f_m, mayor es la mejora en la S/N siempre que la operación se encuentre por encima del nivel de umbral. Tanto la FM como la PPM son ejemplos de métodos de transmisión analógica de señales en los que la mejora de la raíz cuadrática media de ruido es linealmente proporcional a la razón B/f_m.

7.6 MODULACIÓN DE CÓDIGO DE PULSOS (PCM)

Los tipos anteriores de modulación de pulso hacían uso de muestras discretas en el tiempo de señales analógicas. En esos casos, la transmisión está compuesta de información analógica enviada en tiempos discretos. La variación de la amplitud o la regulación del pulso puede variar en forma continua sobre todos los valores. Un refinamiento adicional es cuantificar la señal analógica muestreada en cierto número de niveles discretos. Esto se hace a veces en los sistemas PAM y se llama "PAM M-ario", donde M designa el número de niveles empleados. Ahora no sólo se cuantifica la señal, sino que se usa un código para designar cada nivel en cada tiempo de muestra. Este tipo de modulación se llama *modulación de código de pulsos* (PCM, *pulse-code modulation*).

Supóngase, por ejemplo, que se desea cuantificar medio ciclo de una senoidal de un volt (pico) usando ocho niveles discretos, como se muestra en la figura 7.25. En cada tiempo de muestra debe decidirse cuál de los ocho niveles es la mejor aproximación a la senoidal. Eligiendo el valor más cercano (puede seguirse algún otro criterio, dependiendo del circuito en particular), se mantiene hasta el siguiente tiempo de muestra, etcétera. Obviamente, este proceso de *cuantificación* introduce algunas fluctuaciones con respecto al valor real; éstas pueden tomarse como ruido. El aumento de los niveles de cuantificación tenderá a reducir ese ruido. La cuantificación puede ser lineal (es decir, con niveles igualmente espaciados), como en la figura 7.25(a) o no lineal (es decir, con niveles no espaciados de manera uniforme). En la figura 7.25(b) se ilustra el caso en que la semisenoidal se cuantifica usando una ley de dependencia cuadrática en el espaciamiento de los niveles. Este tipo de cuantificación resulta provechoso, por ejemplo en sistemas en que los niveles bajos son menos importantes que los altos. Salvo indicación en contrario, aquí se usarán incrementos iguales (es decir, lineales) de nivel de cuantificación.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

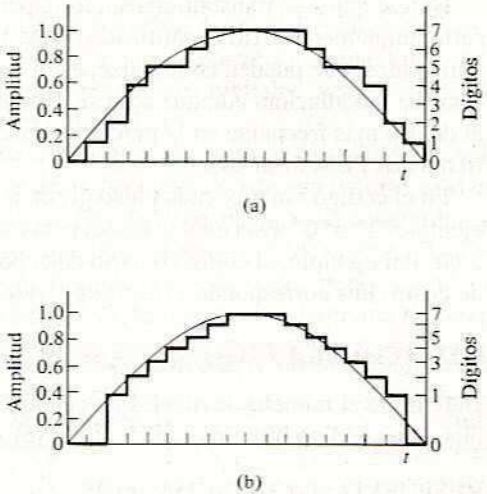


Figura 7.25 Cuantificación de una semisenoidal: (a) lineal; (b) no lineal.

El siguiente paso es asignar un dígito a cada nivel de manera que exista correspondencia uno a uno entre los niveles y el conjunto de los enteros reales. Esto se llama *digitalización* de la señal. Este proceso reduce la señal a un conjunto de dígitos en los sucesivos tiempos de muestra, originando un sistema de modulación completamente digital. Los dígitos se expresan en forma codificada. El código más común para este propósito es el binario (es decir, un código que usa sólo dos posibles niveles de pulso). En la figura 7.26 se ilustra el uso del código binario para un sistema de ocho niveles.

Así, en lugar de enviar las muestras individuales en los tiempos de muestra, se envía un código o patrón de pulsos para conducir la información en forma cuantificada. Los sistemas que hacen uso de la transmisión de señales digitalizadas (es decir, cuantificadas y codificadas) se llaman sistemas de modulación de código de pulsos (PCM).

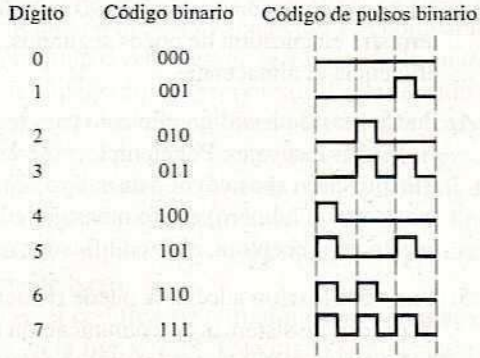


Figura 7.26 Código de pulsos binario.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Nótese que si se transmitieran en forma directa las muestras cuantificadas, el sistema sería simplemente PAM cuantificado (PAM M-ario). La asignación de niveles de la señal numerados, que pueden codificarse, es lo que da al PCM una clara ventaja sobre otros tipos de modulación. Aunque aquí se centrará la atención en el código binario (que es el de uso más frecuente en la práctica), pueden usarse códigos con más de dos niveles (llamados PCM M-arios).

En el código binario, cada pulso puede representar uno de dos posibles estados, por ejemplo "1" o "0". Esta unidad básica para conducir información se llama unidad binaria o *bit*. Por ejemplo, el código binario de ocho niveles anterior es de tres bits. Un código de cuatro bits corresponde a dieciséis niveles de cuantificación, etc.

EJERCICIO 7.6.1

Determine el número de niveles de cuantificación que pueden usarse si el número de bits en un código binario es (a) 5; (b) 8; (c) x.

RESPUESTA: (a) 32; (b) 256; (c) 2^x.

Los sistemas PCM se están haciendo cada vez más importantes debido a ciertas ventajas inherentes sobre otros tipos de sistemas de modulación. Algunas de estas ventajas son las siguientes:

1. En comunicación a larga distancia, las señales PCM pueden regenerarse por completo en estaciones repetidoras intermedias porque toda la información está contenida en el código. En cada repetidora se transmite una señal esencialmente libre de ruido. Los efectos del ruido no se acumulan y sólo hay que preocuparse por el ruido de la transmisión entre repetidoras adyacentes.
2. Los circuitos de modulación y demodulación son todos digitales, alcanzando por ello gran confiabilidad y estabilidad, y se adaptan con rapidez al diseño lógico de circuitos integrados.
3. Las señales pueden almacenarse y ponerse a escala en el tiempo de manera eficiente. Por ejemplo, los datos de PCM se pueden generar en un satélite orbital una vez por minuto durante una órbita de 90 minutos y después retransmitirse a una estación terrestre en cuestión de pocos segundos. Las memorias digitales realizan con mucha eficiencia el almacenaje.
4. Puede usarse un código eficiente para reducir la repetición innecesaria (la redundancia) en los mensajes. Por ejemplo, si se desea enviar por telegrama "Una feliz navidad y un próspero año nuevo" a un amigo distante, es mucho más eficaz asignar un código (es decir, un número) a este mensaje redundante y enviar el código (el número). En la estación receptora, el decodificador reconoce el código y escribe el mensaje.
5. Una codificación adecuada puede reducir los efectos del ruido y la interferencia. El diseñador de sistemas de comunicación tiene, pues, mayor flexibilidad en el diseño de un sistema PCM para satisfacer determinados criterios de funcionamiento.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Ahora se dedicará alguna atención a las cuestiones prácticas de la generación de PCM. La operación central es la del convertidor analógico-digital (A/D), es decir, codificar señales analógicas en códigos digitales. Se describirán en forma somera dos técnicas para efectuar esta operación.

La primera se llama codificador de rampa y usa el mismo principio básico que la generación de PWM, es decir, la generación de una rampa lineal que se compara con el nivel de la señal de entrada. No obstante, en lugar de generar un pulso cuyo ancho está controlado por el tiempo que tarda la rampa en alcanzar el nivel de la señal de entrada como en la PWM, ahora, durante ese tiempo, se opera un contador binario y se lee la cuenta digital. En la figura 7.27 se muestra un diagrama de bloques simplificado del codificador de rampa.

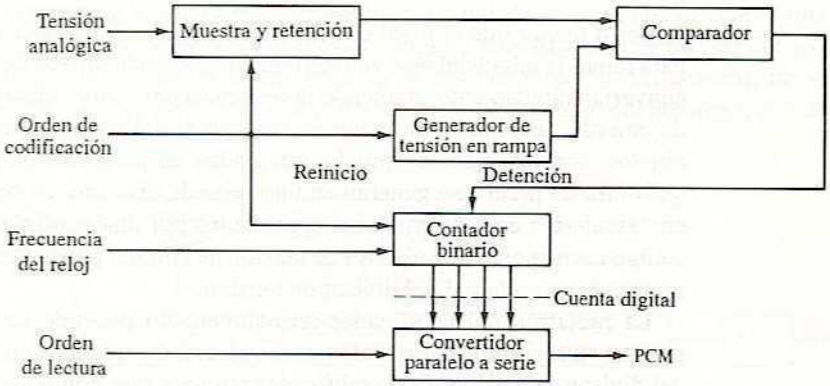


Figura 7.27 Diagrama simplificado del codificador de rampa para la generación de PCM.

Este codificador usa relativamente pocos componentes de precisión y su empleo es amplio. Su principal limitación es la linealidad necesaria en la tensión en rampa generada. La velocidad de operación está limitada en general por la rapidez del contador binario.

Una versión utilizada en los sistemas de instrumentación del codificador de rampa es el de doble pendiente (doble rampa). En el codificador de doble pendiente, se inserta un integrador entre el circuito de muestra y retención y el comparador. No hace falta el generador de tensión en rampa. Al integrar la salida de la muestra y retención, la pendiente en la salida del integrador es proporcional a la tensión de entrada. Cuando la salida del integrador alcanza un umbral preestablecido, la entrada del integrador se conmuta de la muestra y retención a una fuente de tensión de precisión con polaridad opuesta a la de la señal. La conversión se completa cuando la salida del integrador vuelve a su nivel inicial. Las ventajas de este método incluyen buena linealidad y precisión, excelente rechazo del ruido, simplicidad y economía. Su mayor desventaja es el tiempo de conversión relativamente largo.

Un segundo método es el codificador retroalimentado, que aparece en el diagrama de bloques simplificado en la figura 7.28. Éste opera comparando de manera sucesiva la entrada analógica de tensión con una serie de tensiones de prueba. Los ensayos sucesivos están regidos por decisiones previas, por ejemplo si la tensión de prueba es

http://libreria-universitaria.blogspot.com

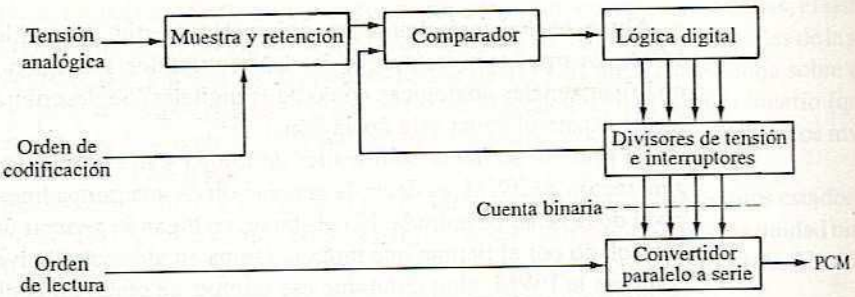


Figura 7.28 Diagrama simplificado del codificador retroalimentado para la generación de PCM.

mayor o menor que el nivel de entrada analógico. Por lo general, la rutina se concibe para tomar la mitad del intervalo de tensión para cada prueba de manera que los ensayos converjan rápidamente, siguiendo la secuencia del código binario para describir el nivel de entrada. (Este procedimiento es análogo al del balance analítico usado para pesar objetos, con los pesos de prueba arreglados en potencias de dos, en este caso.) Las tensiones de prueba se generan en una serie de divisores de tensión (es decir, una red en "escalera") con interruptores controlados por una configuración lógico-digital. El código correspondiente al nivel de tensión de entrada puede leerse de la posición de los interruptores en la red del divisor de tensión.

La precisión del codificador retroalimentado depende de la de las tensiones de prueba; su rapidez está limitada por la velocidad a que pueden operar los interruptores del divisor de tensión. Este codificador requiere más componentes de precisión que el de rampa, pero permite una codificación más exacta.

Un método para reducir el tiempo de conversión es aplicar la salida de una muestra y retención a muchos comparadores que operan en paralelo, como se ilustra en la figura 7.29. Cada comparador tiene su propia referencia. Las salidas de todos los comparadores se comparan en circuitos digitales lógicos para determinar la salida en código binario de cada valor de muestra. Este codificador paralelo o *flash* puede operarse a velocidades muy altas a costa de que hayan $n - 1 = 2^m - 1$ comparadores para una cuantificación de m bits. El conteo de las partes altas puede reducirse en alguna medida usando un codificador *flash* de $(m/2)$ bits que alimente un convertidor de alta velocidad D/A (DAC, *di-*

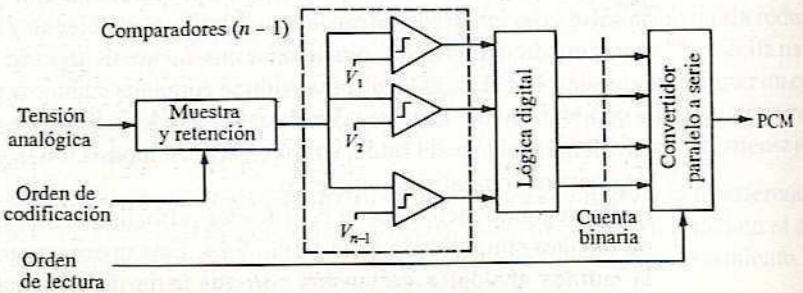


Figura 7.29 Codificador paralelo o *flash* para la generación de PCM.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

gital-to-analog converter). La salida del DAC se resta de la tensión de entrada y la diferencia se convierte en un segundo codificador *flash* de $(m/2)$ bits. Esta disposición de retroalimentación aumenta un poco el tiempo de conversión, lo que puede ser una decisión razonable si no se necesitan velocidades muy altas. Un cuarto método de conversión A/D se verá en el capítulo 9, donde se estudian los métodos de modulación delta.

El análisis de la recepción óptima de PCM en presencia de ruido se hará más adelante. Si el ruido de transmisión no es un problema, o si la complejidad del sistema de recepción no permite un receptor óptimo, puede usarse un diseño subóptimo. El diagrama de bloques de un receptor PCM subóptimo se muestra en la figura 7.30 (véase también Prob. 7.6.3). Éste emplea alguna de las ideas del codificador retroalimentado sin necesidad de retroalimentación. Los divisores resistivos se operan por medio de interruptores controlados por el código binario. Ponderando los niveles de tensión resultantes en la misma proporción que los pulsos del código, se genera una tensión compuesta que reproduce la tensión original cuantificada. El diseño del receptor es simple y muy empleado en sistemas de instrumentación. En general, no se usa en sistemas de comunicación a larga distancia que intenten mantener una razón de error lo más baja posible.

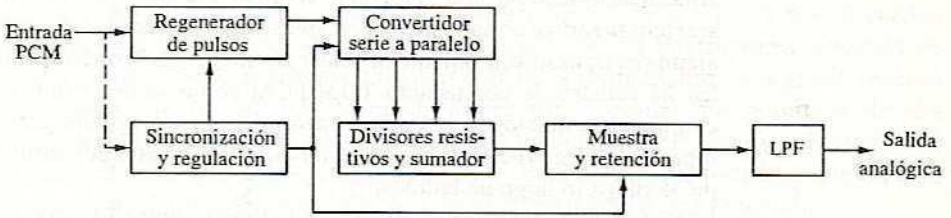


Figura 7.30 Decodificador PCM subóptimo.

Hay otros niveles necesarios de sincronización en los sistemas PCM. El primero es la tasa del reloj, que puede enviarse como un tono separado de frecuencia única y multiplexada o usando un PLL con una constante grande, en la PCM de entrada. Se necesita sincronización de cuadro para establecer cuándo empieza cada código de pulso. Esto se consigue a menudo enviando de manera periódica un código preestablecido que no puede ser duplicado por ningún nivel de entrada. Cuando se detecta, se establece el inicio del cuadro. Un divisor en la frecuencia del reloj ayuda a mantener la sincronización de cuadro hasta la llegada de la próxima sincronización. Se necesita una tercera sincronización para identificar qué canal se está enviando cuando se multiplexan en tiempo varios canales de información. Ésta se combina a menudo con la sincronización de cuadro.

En los sistemas telefónicos PCM de Estados Unidos se multiplexan 24 canales de voz de 8 bits para dar 192 bits por cuadro.[†] Para la sincronización de cuadro se añade un bit, para un total de 193 bits/cuadro. Cada canal de entrada se muestrea a razón de 8 kHz, para un intervalo de cuadro de $(8\text{ kHz})^{-1} = 125\ \mu\text{s}$ y una tasa de reloj de $(193)(8\text{ kHz}) = 1.544 \times 10^6$ bits/s. Los bits de señal (como los pulsos indicadores) se

[†] Véase, por ejemplo, S.D. Personick, "Digital Transmission Building Blocks", *IEEE Communications Magazine*, vol. 18, enero de 1980, págs. 27-36.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

pueden transmitir a una tasa mucho más lenta usando un bit de cada canal cada sexto cuadro (lo cual da una operación efectiva de canal de $7\frac{5}{6}$ bits) o bien un solo canal de datos (lo que da un sistema efectivo de 23 canales). En la figura 7.31 se muestra un diagrama del formato TDM para un cuadro de este sistema.

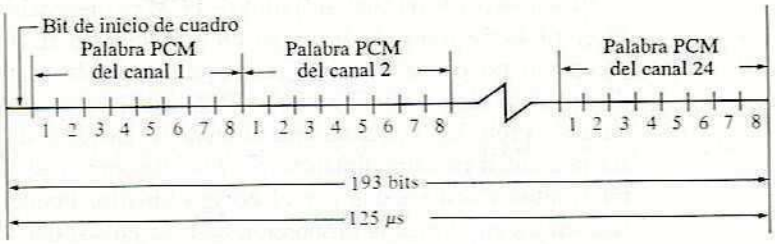

Bit de inicio de cuadro
Palabra PCM del canal 1
Palabra PCM del canal 2
Palabra PCM del canal 24
1 2 3 4 5 6 7 8 1 2 3 4 5 6 7 8
1 2 3 4 5 6 7 8
193 bits
125 μs

Figura 7.31 Formato del cuadro TDM para el sistema T1.

Este multiplexor de 24 canales se usa a manera de sistema básico, conocido como T1, en el sistema telefónico modular de portadora T TDM/PCM diseñado por la American Telephone and Telegraph Company. El sistema T1 se diseña en especial para servicio pesado a corta distancia en áreas metropolitanas. En este sistema, dos pares de alambres trenzados terminan en cada extremo de un "banco de canales" que combinan los 24 canales de voz usando TDM/PCM como se describió. Cada par de alambres conduce transmisiones de datos a razón de 1.544 megabits por segundo (Mbps). Los repetidores digitales se sitúan en intervalos cercanos a una milla (espacios de pérdida de 35 dB) a lo largo de la línea.

La longitud máxima del sistema T1 se limita a entre 50 y 100 millas debido a la fluctuación de la sincronización. Se diseña para ser compatible con los sistemas telefónicos PAM existentes. Las transmisiones digitales (p. ej., los enlaces por computadores digitales) se pueden manejar reemplazando el banco de canales por una terminal de datos.

El sistema portadora T global consta de varias combinaciones de subsistemas portadora T de orden inferior para acomodarse a las necesidades de los canales de voz, el servicio de imagen telefónica y la programación de la red comercial de televisión. En

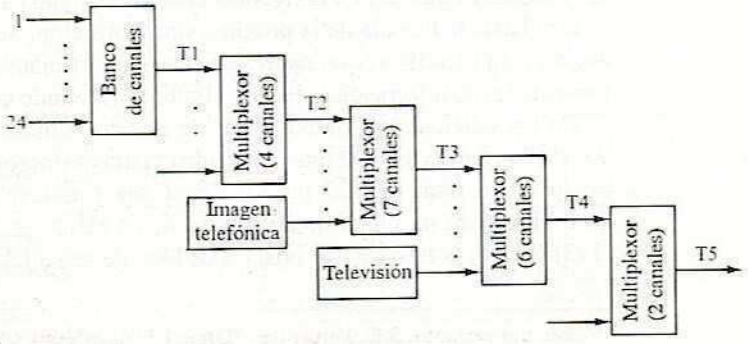


Figura 7.32 Sistema telefónico de portadora T TDM/PCM.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

TABLA 7.1 Especificaciones para el sistema telefónico de portadora T TDM/PCM

Sistema[a]	Tasa (Mbps)	MUX[b]	Capacidad del sistema: Canales de voz	Imagen telefónica	TV	Medio	Espaciamiento entre repetidores (millas)	Longitud máxima del sistema (millas)	Tasa de error del sistema
T1	1.544	T1	24	—	—	Par de alambres	1	50	10^{-6}
T2	6.312	4(T1)	96	1	—	Cable coaxial	2.5	500	10^{-7}
T3	44.736	7(T2)	672	7	1	Cable coaxial	[c]	[c]	[c]
T4	274.176	6(T3)	4032	42	6	Cable coaxial	1	500	10^{-6}
T5	560.160	2(T4)	8064	84	12	Cable coaxial	1	500	4×10^{-7}
WT4	18 500.0	58(T4)	233 000	2436	348	Guía de onda de 60 mm de circ.	25	4000	10^{-8}

[a] La designación del banco de canales correspondiente utiliza "D" en vez de "T".

[b] Abreviatura comúnmente utilizada para multiplexor.

[c] Sólo para niveles de multiplexión; no para la transmisión.

la figura 7.32 se muestra un diagrama de bloques del sistema portadora T global y en la tabla 7.1 aparecen las especificaciones de operación en varios niveles.

Como en otros tipos de modulación de pulso, las máximas razones que se pueden alcanzar para PCM están limitadas por la rapidez de los interruptores. Después de codificar los datos, la transmisión final se obtiene, a menudo, tras un segundo proceso de modulación. La señal PCM puede usarse para modular una portadora de alta frecuencia usando técnicas AM, FM o PM. Es también posible tener un sistema PCM multicanal en el que cada secuencia de pulsos modula una subportadora que es, a su vez, multiplexada en frecuencia y luego usada para modular una portadora.

Antes de aplicar la señal PCM a un modulador, pueden elegirse diferentes formas de conducir la información de código binario dependiendo del tipo de modulación y demodulación empleado y otras restricciones de ancho de banda, complejidad del receptor, etcétera. En la figura 7.33 se ilustran algunas de las representaciones PCM más comunes. Se describirá de manera breve cada una de ellas.

El método de regreso a cero (RZ, *return-to-zero*) representa el 1 por un cambio al nivel 1 durante la mitad del intervalo del bit, después de lo cual la señal regresa al nivel de referencia en la mitad restante. Se indica un 0, dejando a la señal sin cambio en el nivel de referencia. Ésta es la representación usada en la figura 7.26.

En el método de regreso a la polaridad (RB, *return-to-bias*) se usan tres niveles: 0, 1 y un nivel de polarización. Este nivel de polarización puede elegirse por debajo de los dos niveles o entre ellos (puede ser una referencia cero, como se muestra en la figura 7.33). La señal regresa al nivel de polarización durante la última mitad de cada intervalo de bit. El método RB tiene la ventaja de ser autosincronizable, es decir, la frecuencia del reloj se halla con facilidad de la magnitud del código de pulsos. Sin embargo, el valor promedio de la señal depende de la proporción de unos y ceros presente. La representación RB también ocupa más ancho de banda que el necesario y usa tres niveles. Las representaciones que siguen están diseñadas para superar algunos de estos inconvenientes, a expensas de una mayor complejidad.

En la inversión alternada de marca (AMI, *Alternate Mark Inversion*), el primer uno binario se representa con +1, el segundo con −1, el tercero con +1, etcétera.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

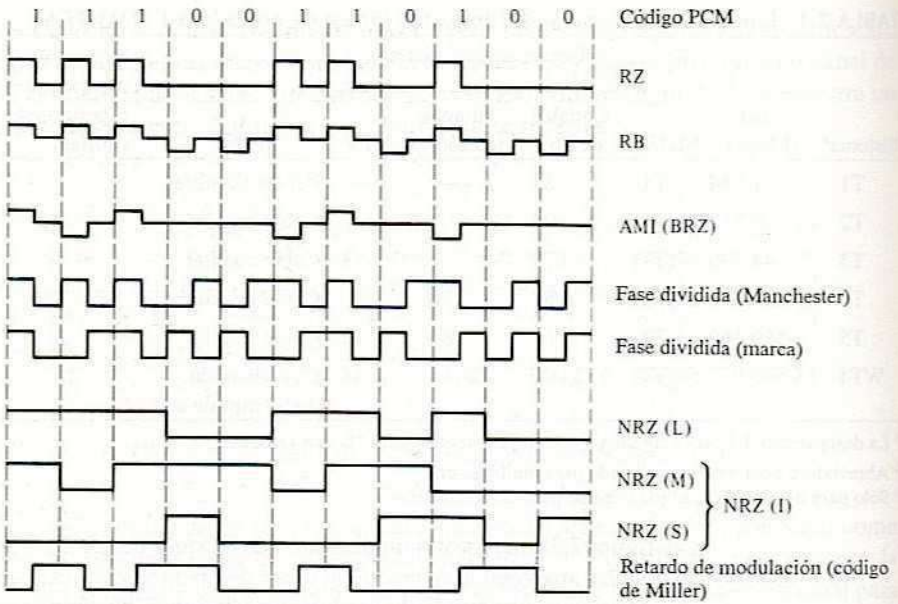


Figura 7.33 Algunos métodos para representar datos binarios.

La representación AMI se deriva con facilidad del código binario RZ (y viceversa) invirtiendo en forma alterna los unos. Tiene valor promedio cero y es muy usada en sistemas telefónicos PCM. También se conoce como representación bipolar con regreso a cero (BRZ, *bipolar return-to-zero*).

Las representaciones binarias de fase dividida eliminan la variación del valor medio por medio de la simetría. En el método de la fase dividida de Manchester, el 1 se representa con el nivel 1 durante la primera mitad del intervalo del bit, y luego se desplaza al nivel 0 durante la mitad restante; el 0 se indica con la representación inversa. En el método de fase dividida (marca), se usa una representación simétrica similar excepto en que la inversión de fase con relación a la fase previa indica un 1 (es decir, una marca); para indicar un 0 no hay cambio de fase.

La representación de no regreso a cero (NRZ) reduce el ancho de banda necesario para enviar el código PCM. En la representación NRZ(L), el pulso del bit se mantiene en uno de los dos niveles durante el intervalo completo. En el método NRZ(M) se usa un cambio de nivel para indicar una marca (es decir, un 1) y ningún cambio de nivel para un 0; el método NRZ(S) usa el mismo esquema excepto que el cambio de nivel se emplea para indicar un espacio (es decir, un 0). Ambos son ejemplos de la clasificación más general NRZ(I), en la que se usa un cambio de nivel (una inversión) para indicar una clase de dígito binario y un nivel constante para la otra. Las representaciones NRZ son eficientes en términos del ancho de banda y su uso es amplio. Nótese que el empleo de las representaciones de fase partida y NRZ requieren cierta complejidad adicional del receptor para determinar la frecuencia del reloj.

En la modulación de retardo (código de Miller), un 1 se representa con una transición de señal en el centro del intervalo de un bit. Un 0 no se representa con ninguna transición, a menos que esté seguido por otro cero, en cuyo caso la transición de señal

http://libreria-universitaria.blogspot.com

ocurre al final del intervalo del bit. En este método, una sucesión de unos y una sucesión de ceros se representan con una señal cuadrada, a la tasa de bits, pero uno está retardado medio intervalo de bit con respecto al otro. La modulación de retardo es insensible a la ambigüedad inicial de 180° que aparece en las representaciones NRZ y de Manchester. Es eficiente en términos del ancho de banda necesario sin requerir de una buena respuesta de baja frecuencia.

En la figura 7.34 se muestran senoidales a la frecuencia fundamental para niveles alternos de una corriente de bits PCM. La secuencia de niveles alternos representa el esquema con la variación más rápida posible de una corriente de código binario. En estos diagramas, T_b representa el intervalo del bit. Nótese que los códigos NRZ transmiten un bit por cambio de nivel, mientras que los RZ lo transmiten cada par de cambios de nivel. Se deduce que los códigos NRZ (y el código de Miller) pueden transmitir dos bits por segundo por Hz (bps/Hz). Por el contrario, el límite para las otras representaciones ilustradas en la figura 7.33 es de un bps/Hz. El número de bits por segundo por Hz se llama *eficiencia del ancho de banda*. Por tanto, la eficiencia del ancho de banda potencial de un código binario PCM es de 2 bps/Hz usando una representación en código NRZ (o de Miller).

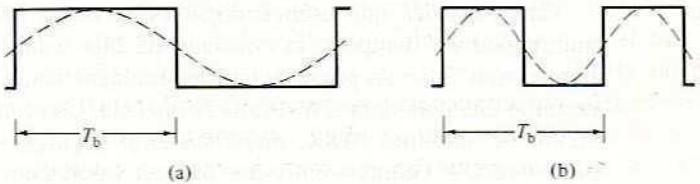


Figura 7.34 Tasas máximas PCM de los códigos (a) NRZ y (b) RZ.

Considérese ahora el ancho de banda mínimo requerido para un sistema binario PCM que utiliza n niveles de cuantificación. Desígnese con $[\log_2 n]$ el número de bits por muestra, donde el uso de corchetes indica el siguiente entero mayor que debe tomarse. Además, sea la razón de muestreo $1/T$; entonces, $[\log_2 n]/T$ es el número de bits por segundo que se envían.

En este análisis puede verse que la eficiencia del ancho de banda de la representación en código NRZ es de 2 bps/Hz, por lo que el ancho de banda mínimo es

$$B \geq \frac{1}{2}\left(\frac{[\log_2 n]}{T}\right). \tag{7.34}$$

Aplicando este resultado al caso multiplexado en tiempo, se tiene, para el ancho de banda NRZ,

$$B_x \geq \frac{[\log_2 n]}{2T_x} \quad \text{(NRZ)}. \tag{7.35}$$

Como la eficiencia del ancho de banda de la representación en código RZ es de 1 bps/Hz, el ancho de banda mínimo necesario para RZ es

$$B_x \geq \frac{[\log_2 n]}{T_x} \quad \text{(RZ)}. \tag{7.36}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La comparación de las ecuaciones (7.35) y (7.36) con la (7.11) revela la siguiente regla útil: el ancho de banda mínimo requerido por una representación en código binario NRZ es $[\log_2 n]$ veces el necesario para un sistema PAM que opera con la misma razón de muestreo y el mismo número de canales. El ancho de banda mínimo requerido para un código binario RZ es el doble de esta cantidad. Estos resultados pueden extenderse con facilidad a los sistemas que usan más de dos niveles permisibles en la representación de códigos. Un logaritmo con diferente base toma en cuenta el cambio, como se muestra en el ejercicio siguiente.

EJERCICIO 7.6.2

Determine el mínimo aumento de ancho de banda sobre el requerido por una señal PAM en la transmisión de una señal PCM que se ha cuantificado en 64 niveles. Suponga que cada pulso del código puede tener el siguiente número de niveles: (a) 2; (b) 3; (c) x.

RESPUESTA: (a) 6; (b) 4; (c) $\log_x 64$.

Varios canales que usen códigos PCM como los de la figura 7.33 se pueden multiplexar en tiempo y la corriente de bits resultante enviarse por una línea de transmisión. Si se usa propagación electromagnética, la corriente de bits se emplea para modular una portadora CW de alta frecuencia. Una forma de modulación es la conmutación de amplitud (ASK, *amplitude-shift keying*), en la cual la amplitud de una portadora CW conmuta entre dos (o tres) valores en respuesta al código PCM. Otra forma es desplazar la frecuencia de la portadora CW, lo cual se llama conmutación de frecuencia (FSK, *frequency-shift keying*). Una tercera posibilidad, llamada conmutación de fase (PSK, *phase-shift keying*), consiste en desplazar la fase de la portadora CW en respuesta a la amplitud del código PCM. En la figura 7.35 se ilustran estas formas para

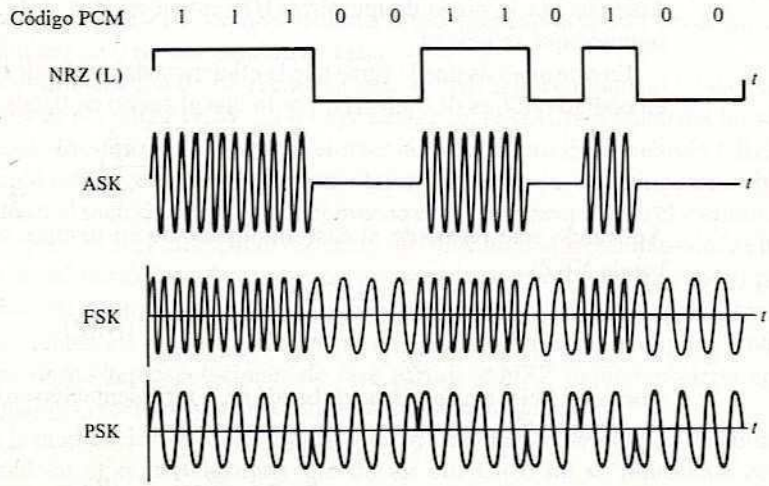


Figura 7.35 Señales ASK, FSK y PSK ideales.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

el código PCM de la figura 7.33. El comportamiento *S/N* de estos métodos de modulación se examinará en el capítulo 10.

7.7 SISTEMAS DE COMUNICACIÓN POR FIBRA ÓPTICA

Aunque en el capítulo 10 se examinarán sistemas de modulación en los que una señal portadora se conmuta como respuesta a un código binario, aquí describiremos en forma breve la aplicación específica de la fibra óptica para este fin. La utilización de la fibra óptica en sistemas de comunicación ha tenido una creciente importancia en la transmisión de datos digitales.

El espectro óptico ocupa la porción del espectro electromagnético desde una longitud de onda de 50 nm (ultravioleta) hasta cerca de 100 μm (infrarrojo lejano). (Esto corresponde a frecuencias de 6×10^{15} Hz a 3×10^{12} Hz, respectivamente; en la parte óptica del espectro es común especificar la banda de interés en términos de la longitud de onda en vez de la frecuencia.) Como el ancho de banda para la información de utilidad de un sistema de comunicación de banda de paso suele estar limitado a una fracción de la frecuencia portadora, los sistemas ópticos ofrecen la ventaja de anchos de banda potenciales muy amplios. Por ejemplo, un sistema en el cual $B/f_c = 0.1\%$ operando a $f_c = 1$ GHz ofrece un ancho de banda potencial de 1 MHz, mientras que a la frecuencia óptica de 10^{14} Hz dicho porcentaje proporciona ¡100 GHz de ancho de banda! Además, como las fibras ópticas son dieléctricas, la transmisión a través de las fibras es inmune a interferencia electromagnética y a diferencias en potenciales eléctricos. Los primeros sistemas sufrían altas pérdidas de transmisión debido a impurezas en el material, pero estos problemas ya se han superado.

En la figura 7.36 se muestra el diagrama de bloques de un sistema básico de comunicación por fibra óptica. El transmisor consiste en una fuente de luz y circuitos de alimentación eléctrica asociados. La trayectoria de transmisión consiste en una fibra óptica con su blindaje y su protección contra el medio ambiente, y conectores y acopladores de luz. El receptor consiste en un fotodetector, más los circuitos necesarios para la amplificación y restauración de la señal.

La fibra óptica es la parte central del sistema de comunicaciones ópticas. Se puede obtener una imagen intuitiva de la propagación en una fibra óptica utilizando los conceptos de rayos ópticos (geométricos) de la reflexión y la refracción de la luz. Sin embargo, para comprender con mayor profundidad los mecanismos de propagación de una señal óptica, debe recurrirse a conceptos de la teoría electromagnética.

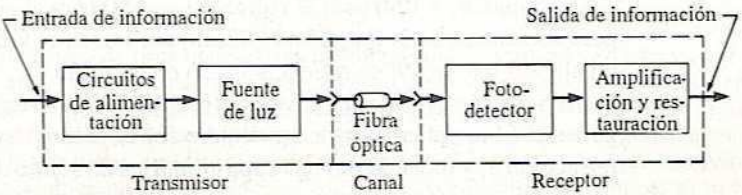


Figura 7.36 Diagrama de bloques de un sistema de comunicación por fibra óptica.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En el espacio libre, la luz viaja a una velocidad $c = 3 \times 10^8$ m/s. Una vez en el dieléctrico viaja a una velocidad v, que es una característica del material (y es menor que c). La razón de la velocidad en el espacio libre a la de dentro del material se llama índice de refracción, $n = c/v$.

En general, cuando un rayo de luz se propaga hacia la frontera que separa dos medios diferentes, parte del rayo se refleja y parte se refracta (se desvía) al entrar al segundo material. La refracción de la luz en la interfaz es resultado de la diferencia en la velocidad de la luz (índices de refracción) en los dos materiales. La relación en la interfaz, conocida como ley de Snell, es (véase Fig. 7.37):

$$n_2 \cos \theta_2 = n_1 \cos \theta_1 \qquad \text{(refracción)}, \tag{7.37}$$

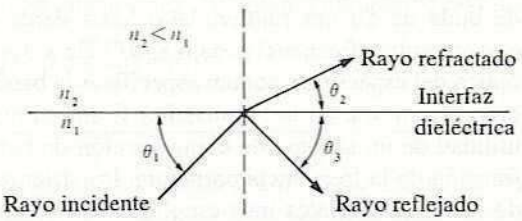


Figura 7.37 Refracción y reflexión de un rayo de luz en la interfaz entre dos materiales.

donde θ_1, θ_2 son los ángulos de incidencia respectivos. En contraste, el rayo reflejado regresa con el mismo ángulo que el incidente, o

$$\theta_3 = \theta_1 \qquad \text{(refracción)}, \tag{7.38}$$

Pero conforme θ_1 aumenta, y $n_1 > n_2$, es posible alcanzar una condición en la que $\theta_2 = 0$, $\theta_1 \neq 0$. Más allá de este punto no es posible la refracción y todos los rayos de luz se reflejan en el interior del medio con mayor índice de refracción. El ángulo de incidencia en el cual esto empieza a suceder se llama ángulo crítico, θ_c. Utilizando $\theta_2 = 0$ en la ecuación (7.37), el ángulo crítico está dado por

$$\theta_c = \cos^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \tag{7.39}$$

Por ejemplo, $n_1 = 1.50$ para el vidrio y $n_2 = 1.00$ para el aire, por lo que el ángulo crítico para esta interfaz es: $\theta_c = 48.19°$. Cualquier luz en el vidrio incidente en la interfaz en un ángulo $\theta < 48.19°$ se refleja del todo en el vidrio.

Aunque son posibles muchas configuraciones diferentes, la estructura más utilizada para una fibra óptica es la de un cilindro sólido dieléctrico, llamado núcleo de índice de refracción n_1 y rodeado por una capa cilíndrica de sólido dieléctrico que se conoce como coraza de índice de refracción n_2 ($n_2 < n_1$). Esta configuración se denomina fibra de

http://libreria-universitaria.blogspot.com

índice escalonado, y se ilustra en la figura 7.38(a).† La coraza sirve para agregar resistencia mecánica y protección al núcleo, al igual que para funcionar como frontera dieléctrica. Una función importante de la coraza, para n_1 y n_2 más o menos iguales, es que el ángulo crítico es muy pequeño (es decir, todos los rayos son casi paralelos al eje de la fibra). Esto hace que la diferencia en la longitud de las trayectorias del rayo central y los más oblicuos sea muy pequeña. El resultado es una reducción en la disparidad de los retardos entre rayos diferentes, y por tanto una reducción en la dispersión de los pulsos transmitidos. Otro factor importante es que la luz, que de acuerdo con la óptica se supone confinada a la fibra, en realidad se propaga tanto en el núcleo como en la coraza, de acuerdo con la teoría electromagnética. Por tanto, el material de la coraza debe ser de baja pérdida y de calidad comparable a la del núcleo. La facilidad con la que la luz se puede acoplar en la fibra para transmisión se relaciona a la apertura numérica, la cual para una fibra de índice escalonado, se define como

$$\operatorname{sen} \theta_0 = n_1 \operatorname{sen} \theta_c = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}, \tag{7.40}$$

donde θ_0 es el ángulo de aceptación de la fibra. Esto se ilustra en la figura 7.38(a).

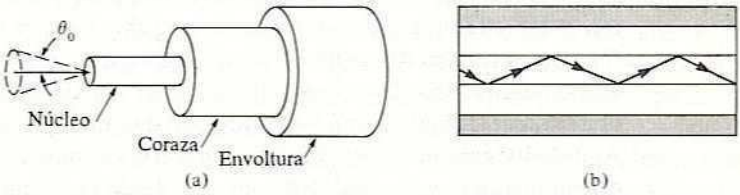


Figura 7.38 (a) Construcción básica y (b) propagación en un cable de fibra óptica de índice escalonado (no está a escala).

Con esta breve introducción, se ve que la luz se puede guiar a través de una fibra óptica por medio de fronteras dieléctricas que tienen índices de refracción menores que el núcleo. Esto se ilustra en la figura 7.38(b). Las pérdidas en una fibra bien diseñada son en primer lugar el resultado de impurezas, y la constante investigación sobre materiales está proporcionando fibras con pérdidas bastante inferiores a 1 db/km en algunas longitudes de onda.

Mientras que los rayos ópticos proporcionan una imagen intuitiva de la propagación en la fibra óptica, la teoría electromagnética de las guías de onda muestra que son posibles diferentes modos de propagación, dependiendo de la geometría y las dimensiones relativas de la fibra. Las fibras ópticas multimodales tienen dimensiones lo bastante grandes para que sea posible tener varios modos diferentes. La luz se refleja en la frontera núcleo-coraza para producir múltiples trayectorias de diferente longitud,

† En un segundo tipo de fibra óptica, llamada fibra de índice graduado, se hace que el índice de refracción varíe como función de la distancia radial desde el centro de la fibra. Esta graduación en el índice de refracción es efectiva para reducir la dispersión de luz dentro de la fibra. El rayo central viaja una distancia más corta con una velocidad menor (porque n es grande), mientras que los rayos oblicuos viajan una distancia mayor a una velocidad mayor (porque n es pequeña). De esta manera, las diferencias en distancia se compensan por las diferencias opuestas en velocidad, y los dos rayos llegan (aproximadamente) al mismo tiempo.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

y por tanto retardos un poco diferentes. Esto provoca una dispersión o expansión del pulso transmitido, lo cual limita la máxima tasa de transmisión que se puede alcanzar. Por el contrario, una fibra unimodal tiene un diámetro de la coraza bastante pequeño y permite un solo modo de propagación. En consecuencia, hay una menor dispersión de luz y son posibles tasas de transmisión más altas.

Las fuentes utilizadas para sistemas de comunicación por fibra óptica son diodos emisores de luz (LED, *light-emitting diodes*), que producen luz no coherente, y diodos láser semiconductores, que son coherentes (es decir, sumamente monocromáticos). El LED es una elección muy común por su resistencia y bajo costo, pero tiene la característica de emitir menor potencia y no se puede conmutar con tanta rapidez como el diodo láser. Los diodos láser tienen mejores características de acoplamiento de luz y se prefieren para aplicaciones de anchos de banda amplios.

Después de que una señal óptica se ha enviado a la fibra, se atenúa y distorsiona con la distancia como resultado de efectos de reflexión, absorciones y dispersión. Un factor significativo en la operación de un sistema de fibra óptica es la pérdida debida a la interconexión de fibras. La eficiencia del acoplamiento fibra a fibra es proporcional a la apertura numérica de las fibras y a su alineación.

El receptor en el sistema de comunicación por fibra óptica consiste en un fotodetector, y los circuitos asociados para la amplificación y restauración de la señal. Los fotodetectores son dispositivos de ley cuadrática que convierten la potencia óptica en corriente eléctrica. Dos tipos utilizados en los sistemas de comunicación por fibra óptica son el fotodiodo *pin* y el fotodiodo de avalancha (ADP, *avalanche photodiode*). Ambos tipos son eficientes y responden con gran rapidez, pero el fotodiodo de avalancha ofrece una mayor sensibilidad como resultado de su mecanismo interno de ganancia (efecto de avalancha).

Después de que una señal óptica ha viajado una distancia en la fibra, se atenúa y distorsiona de tal forma que se necesita un repetidor para amplificar y reconfigurar la señal. El repetidor óptico consiste en un receptor y un transmisor. Estos repetidores se colocan a intervalos a lo largo del sistema, de acuerdo con las pérdidas esperadas. En la tabla 7.2 se muestra la estimación de un enlace de potencia para un ejemplo de sistema

TABLA 7.2 Estimación de un enlace de potencia para el sistema de comunicación por fibra óptica LaserNet de 1.3 μm.[a]

Potencia de transmisión efectiva promedio	-3.5 dBm
Sensitividad del receptor	-36.0 dBm
Margen disponible	32.5 Db
Pérdidas	20.0 dB
Atenuación de la fibra (40 km × 0.5 dB/km)	1.5 dB
Dispersión/reflexión cromática	1.5 dB
Conexiones, 15 @ 0.1 dB/conexión	3.0 dB
Pérdidas en conectores	3.0 dB
Margen de diseño del sistema	5.0 dB
Exceso de margen	1.5 dB

[a] De: C.M. Siperko, "LaserNet—A Fiber Optic Interstate Network (Planning and Engineering Considerations)", *IEEE Communications Magazine*, vol. 23, mayo de 1985, págs. 31-45.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

de comunicación por fibra óptica que opera a 417.792 Mbps. En este sistema, se requieren repetidores cada 40 km (25 millas) para estar dentro de los márgenes del diseño.

Los sistemas de fibra óptica están ganando una aceptación muy rápida para sistemas de comunicación terrestre. Se espera que sean muy empleados en los nuevos diseños de sistemas para comunicación de datos.

7.8 USO DE LA PARIDAD Y LA REDUNDANCIA EN PCM

En la modulación de código de pulso binario, cada muestra de la señal se representa con una palabra de código de, digamos, k bits. Después de transmitir estos bits, el receptor debe reconocer cada palabra para reconstruir las muestras. Sin embargo, como resultado del ruido, pueden ocurrir errores en la transmisión. Una forma de aumentar la fidelidad de la comunicación es agregar bits adicionales, a expensas de mayor tiempo de transmisión o ancho de banda, para detectar y, posiblemente, corregir los errores. Aquí se consideran dos formas simples y efectivas de conseguir mayor fidelidad; en el capítulo 9 se verán métodos más avanzados.

Puede formarse un código receptor de errores simple y efectivo añadiendo un dígito binario al final de cada palabra de código. Este bit adicional se llama de *verificación de paridad*. En un código binario, a menudo el bit de verificación se elige de manera que el número de unos en cada palabra sea par (si el número de unos ya es par, se añade un 0 para denotar ese hecho). Se dice que tal código tiene paridad *par*. De igual forma, en la paridad *impar* el bit de paridad agregado se elige para que el número total de unos en la palabra (incluyendo el bit de paridad) sea impar. Supóngase que se utiliza paridad par: en una palabra de siete bits (es decir, $k = 7$), el mensaje 0100110 se convierte en 01001101, y 0101101 en 01011010.

Se dice que el bit agregado a cada palabra es redundante porque no conduce información concerniente al valor de la señal muestreada. Sólo se utiliza como protección contra posibles errores mediante la verificación del número par o impar de unos. La eficiencia de la razón del código de un sistema se define como el cociente de dividir el número de bits empleados para conducir información de la señal entre el número total de bits enviados. Por tanto, la eficiencia de la razón del código disminuye a medida que se añade más redundancia.

El código de verificación de paridad simple tiene una eficiencia de $k/(k + 1)$ y su utilización es amplia en computación digital y en grabación. Ofrece un método simple y efectivo de detección de errores cuando la posibilidad de cometer un error de bit es pequeña. Cuando se detecta un error, puede pedirse una retransmisión. En otros casos, las palabras en que se detecte error pueden simplemente descartarse. Nótese que un error en dos bits de una palabra no se puede detectar con un código de verificación de paridad simple.

Podría desearse agregar redundancia suficiente no sólo para detectar los errores simples sino también para corregirlos. Como ejemplo de un código corrector de errores, supóngase que al transmitir PCM binaria se transmite una secuencia de tres 0 por cada 0 y de tres 1 por cada 1. Como los dos dígitos añadidos son completamente redundantes, este código de repetición tiene una eficiencia de razón de código de $\frac{1}{3}$.

Si la posibilidad de cometer error en más de un bit en una palabra es pequeña, puede usarse una regla de "decisión mayoritaria" para decodificar la corriente de bits recibida.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Entonces, si se recibe 001, 010 o 100, el mensaje se decodifica como 000; y si se recibe 011, 101 o 110, se decodifica como 111. Sin embargo, si ocurrieran dos errores en una palabra, se podría tomar una decisión errada. Por tanto, el código de corrección de un solo bit es más útil cuando la posibilidad de cometer un error de un bit es pequeña. Los códigos de repetición tienen capacidad para detectar errores, a expensas de transmitir muchos símbolos redundantes. El uso intencional de la redundancia, sea para corrección o para detección de errores, se conoce como *codificación para control de errores*.

Para comprender algunos de los principios subyacentes en la codificación para control de errores, se incluye el concepto de separación o distancia de palabras de código. Para hacerlo, se define el *peso de Hamming* $w(s_i)$ de una palabra de código s_i como el número de unos que tiene. La *distancia de Hamming* $d_{ij} = d(s_i, s_j)$ entre las palabras de código s_i, s_j se define como el número de posiciones en las que difieren s_i y s_j. Una ecuación para la distancia de Hamming es

$$d_{ij} = w(s_i \oplus s_j) \tag{7.41}$$

donde $\oplus$ denota suma módulo 2. Por ejemplo, la distancia de Hamming entre las dos palabras del anterior código de repetición es 3, y la regla del decodificador podría haberse establecido como "elegir la palabra de código con la mínima distancia de Hamming de la palabra recibida".

Es obvio que un código con todas las palabras distintas debe tener al menos una con una distancia de Hamming mínima. No es tan obvio el hecho de que un código que permita la detección de hasta e errores por palabra o la corrección de hasta e errores por palabra debe consistir en palabras de código para las cuales

$$d_m = \begin{cases} e + 1 & \text{detección del error} \\ 2e + 1 & \text{detección del error} \end{cases} \tag{7.42}$$

donde d_m es la mínima distancia de Hamming entre palabras.

EJERCICIO 7.8.1

Determinado código consiste en las palabras: 0000000, 0011110, 0101101, 0111000, 1001100, 1011001, 1101010, 1110100. Si se recibe 1011011, ¿cuál es la palabra decodificada basándose en la mínima distancia de Hamming?

RESPUESTA: 1011001.

EJERCICIO 7.8.2

Un código de verificación de paridad simple utilizado en las listas de computador de números de registro, etc., se halla duplicando dígitos alternos, a partir del lado derecho, y sumando los dígitos módulo 10 (los números mayores que 10 se cuentan como dos dígitos). El dígito de verificación de paridad se halla tomando los dieces de complemento de la suma (¿por qué?). (a) Determine el dígito de verificación de paridad de los números 837412 y 834712. (b) Además de la detección del error simple, ¿qué tipo de error se está detectando?

RESPUESTA: (a) 6, 2; (b) El intercambio de dos dígitos adyacentes.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

7.9 MULTIPLEXIÓN POR DIVISIÓN DE TIEMPO DE SEÑALES PCM

En el caso de la multiplexión por división de tiempo de las señales PAM, se combinan en secuencia varias señales analógicas a una tasa de muestreo común y se transmite la corriente de pulsos compuesta. Este procedimiento puede extenderse para incluir las señales PWM y PPM. La multiplexión de las señales PCM presenta algunos problemas diferentes que investigaremos en esta sección. Salvo que se indique lo contrario, se supondrá PCM binario.

Se conocen dos tipos básicos de transmisión de datos digitales: *síncrona* y *asíncrona*. En la transmisión síncrona, la tasa de bits en la entrada de cada multiplexor es fija y está sincronizada con un reloj central. Por tanto, dentro de cualquier periodo de tiempo habrá siempre un número específico discreto de bits, que siguen una progresión predeterminada muy regular. El multiplexor opera a una tasa múltiplo de la del reloj central para formar de manera secuencial todos los datos y después transmitir el bloque de éstos. La eficiencia es alta porque una palabra binaria sigue a la anterior sin necesidad de designadores especiales para separar las palabras.

En la transmisión asíncrona, las palabras se envían una por una sin tener la necesidad de una relación temporal fija entre una palabra y la siguiente. Muchas terminales de datos —como los teletipos y otras terminales de teclado— transmiten símbolos alfanuméricos (es decir, letras del alfabeto, números decimales y varios símbolos de control) en forma asíncrona, y las palabras de datos resultantes se denominan *caracteres*. En la transmisión asíncrona, el receptor tiene que restablecer la sincronización de cada carácter. Esto se consigue empezando cada carácter con un pulso inicial. Entonces, el reloj del receptor se resincroniza al principio de cada carácter y pueden permitirse pequeñas variaciones en la tasa entre los relojes del transmisor y el receptor. Al final de cada carácter se transmite un pulso de detención.

Aunque podría usarse varios códigos, la mayoría de los sistemas de transmisión de datos utilizan uno de los códigos internacionales normalizados, quizá con alguna variación menor. Estos dos códigos fueron establecidos por el Consultative Committee on International Telegraphy and Telephony (CCITT), un comité que opera con la Unión Internacional de Telecomunicaciones, con sede en Ginebra. El primero de éstos es el Alfabeto internacional núm. 2 del CCITT. Este código de 5 bits, conocido también como código de Baudot, es muy utilizado para transmisiones de télex en todo el mundo. El segundo es el Alfabeto internacional núm. 5 del CCITT. El código estadounidense ASCII (American Standard Code for Information Interchange) es una modificación de este código de 7 bits (Ref. 1).

Las más modernas terminales de datos y dispositivos asociados en Estados Unidos han normalizado una palabra de 10 bits para cada carácter, consistente cada una en un bit inicial (representado siempre por 0), 7 bits de datos usando el código ASCII, un bit de verificación de paridad y un bit de detención (representado por 1). En la figura 7.39 se muestra un ejemplo de carácter asíncrono típico. Como los bits de inicio y detención no hacen falta en la transmisión síncrona, representan un costo adicional para la asíncrona.

El propósito del multiplexor (a menudo abreviado MUX) es dividir la capacidad de manejar información del sistema de comunicación entre varias terminales. En este sentido es "transparente", es decir, un MUX no hace nada que altere los datos cuando se maneja.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

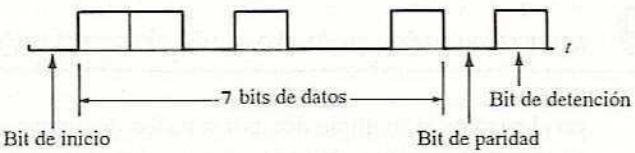


Figura 7.39 Carácter típico de 10 bits en una terminal asíncrona utilizando el código ASCII.

El *concentrador* es un dispositivo basado en el computador con algunas similitudes con el multiplexor en el sentido de que combina los datos de cierto número de terminales en una línea de alta velocidad para la transmisión. Sin embargo, puede alterar las formas de las corrientes de datos antes de fusionarlas. El concentrador, actuando como terminal inteligente, con frecuencia es capaz de ensamblar mensajes completos o bloques de mensajes antes de la transmisión; realizar conversiones de código, de rapidez y de formato, y mejorar la utilización de la línea promediando en forma estadística el tráfico de las salidas en una línea de alta velocidad. También puede comprimir los datos de manera que requieran menos bits para conducir la información deseada y detectar y corregir errores de manera automática. Recientemente se han diseñado algunos multiplexores inteligentes, controlados en general por un microprocesador, para asumir algunas de las funciones de los concentradores (p. ej., multiplexión estadística, corrección de errores, etc.). Aquí sólo se considerará el multiplexor no inteligente.

Hay en uso tres clases principales de multiplexores no inteligentes. El primero se utiliza en transmisiones completamente síncronas. El objeto de tales multiplexores es combinar un número de entradas síncronas y entregar la corriente combinada de bits en secuencia a una tasa más alta (síncrona). Las tasas de bits de todas las entradas y la tasa de multiplexión deben estar gobernadas por un reloj central. La eficiencia de tales sistemas de multiplexión es alta, pero deben tomarse medidas para suministrar una señal del reloj central a todas las porciones de la red a la que se sirve. Los planes de gran alcance para el servicio telefónico en Estados Unidos incluyen un sistema completamente síncrono con un reloj central situado en Hillsboro, Missouri.

Una segunda clase incluye multiplexores diseñados para sistemas casi síncronos (cuasisíncronos) en los que las tasas de reloj son, de manera nominal, iguales para todas las entradas, pero en los que pueden existir pequeñas variaciones con respecto a las frecuencias del reloj. En general, los multiplexores diseñados para este tipo de servicio operan a altas tasas de bits y son parte integrante de servicios de transmisión de datos mayores. Multiplexan sobre la base de bit por bit y, por tanto, se les llama multiplexores por intercalación de bits. Para mantener altas eficiencias de transmisión sin recurrir a elaborados procedimientos de control, estos multiplexores usan métodos de cronometraje síncrono que funcionan con un poco de mayor rapidez y, cuando es necesario, insertan bits (proceso conocido como *relleno de bits*) para mantener las tasas de entrada en el valor deseado.

Una tercera clase importante de multiplexores incluye los diseñados para combinar transmisiones asíncronas de baja velocidad en una señal multiplexada de mayor velocidad. En general, estos multiplexores se diseñan para manejar las salidas de las terminales de datos y transmitir los datos por líneas de nivel de voz de un sistema telefónico comercial. Cuando se usan con modem para conectarse con las líneas,

http://libreria-universitaria.blogspot.com

transmiten a una tasa de salida de 1200, 2400, 3600, 4800, 7200 o 9600 bits por segundo. La elección de la tasa de salida depende de la complejidad del modem y de si la línea de voz ha sido rentada por particulares y acondicionada especialmente, o marcada como en una llamada telefónica ordinaria.† Los multiplexores de esta clase suelen multiplexar sobre la base de carácter por carácter; las tasas de entrada pueden ser muy bajas, hasta de 75 bps por dispositivo.

Aunque los multiplexores se han agrupado en tres grandes categorías, no siempre es cierto que uno asíncrono sea lento y que uno síncrono sea rápido. Hay terminales que operan a corta distancia a razones asíncronas bastante altas. Hay también en uso algunas terminales que operan en forma síncrona a 1200 bps.

Otro método de multiplexión de importancia creciente en las redes de comunicación por satélite es la de acceso múltiple por división de tiempo (TDMA, *time-division multiple access*). En los sistemas TDMA, cada terminal muestrea y almacena de manera temporal la información del usuario y luego la transmite en pequeños paquetes a altas tasas de bits. Todas las terminales de la red transmiten usando la misma frecuencia portadora (por lo general alrededor de 6 GHz en el enlace de ascenso y de 4 GHz en el de descenso en los satélites de comunicaciones). Los paquetes de cada terminal se transmiten de manera síncrona en tiempos asignados relativos a las transmisiones de otras terminales de la red. Estos paquetes llegan al satélite uno por uno en una secuencia espaciada muy estrecha que nunca se traslapa. Los paquetes son amplificados por el transpondedor del satélite, desplazados a una frecuencia portadora diferente y luego retransmitidos a las estaciones terrestres. Un receptor acepta el paquete, almacena de modo temporal los bits y luego los interpreta a una tasa más lenta y distribuye la información a los usuarios.

El establecimiento de las terminales TDMA suele utilizar un enfoque de procesamiento distribuido. El muestreo relativamente lento y las operaciones de almacenaje regulador están bajo el control de un microprocesador común (conocido como procesador de fondo). Un procesador de alta velocidad (conocido como de primer plano) controla los paquetes de alta velocidad. Cada procesador tiene funciones asignadas. Ambos comparten algunas funciones para permitir que el procesador de fondo cargue y lea datos seleccionados en el procesador de primer plano y provenientes de él, y para proporcionar la propia sincronización y cronometraje.

Los sistemas TDMA poseen mayor flexibilidad para el manejo y la multiplexión de datos digitales provenientes de fuentes con tasas de datos muy variables. Su empleo se está haciendo más atractivo a medida que se va disponiendo de métodos de almacenaje y control digitales más económicos y confiables.

7.9.1 ★ Multiplexión por intercalación de bits y relleno de bits

En los multiplexores por intercalación de bits, los canales de entrada se muestrean bit por bit en forma sucesiva. Los bits de sincronización se agregan, en un formato predeterminado, a la corriente de datos de salida resultante. Después de haber servido todas las entradas al menos una vez y haberse agregado los bits de sincronización

† En el apéndice E se proporcionan algunas características típicas de las líneas telefónicas, básicas y condicionadas. Los principios de los modem se analizan en el capítulo 10.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

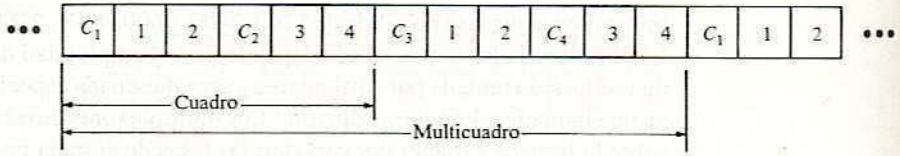


Figura 7.40 Formato de encuadre para cuatro canales.

necesarios, el multiplexor está listo para comenzar el siguiente ciclo. Dicho formato se ilustra en la figura 7.40 para un multiplexor con cuatro entradas.

El menor periodo de tiempo en que se sirve a todas las entradas del multiplexor al menos una vez se llama *cuadro*. La información de la posición de los canales se llama información de encuadre. Los bits añadidos para el encuadre y la sincronización se conocen, en conjunto, como bits de control. El menor periodo de tiempo en que todas las entradas que se van a multiplexar y todos los bits de control se han sumado al cuadro, se llama *multicuadro o supercuadro*. En el formato de encuadre simplificado de la figura 7.40 hay cuatro canales de entrada más dos bits de control por cuadro y dos cuadros por multicuadro. Los bits de control son un mero gasto que reduce la capacidad de manejo de información del multiplexor. En este caso particular, la eficiencia global del multiplexor es de $\frac{4}{6} = 67\%$.

Se supone que todas las entradas del multiplexor tienen la misma tasa nominal de bits, R_i. Sin embargo, a menos que todas las entradas sean completamente síncronas, pueden esperarse pequeñas fluctuaciones. Si no se toman medidas para acomodar estas fluctuaciones, puede perderse alguna información en el proceso de multiplexión. Para evitar esto, el multiplexor se opera a una tasa un poco mayor que la suma de las máximas razones esperadas de las entradas. Como la tasa de multiplexión crecerá en forma gradual, se toman medidas para agregar de manera ocasional un bit arbitrario (0 o 1) a la corriente de bits a fin de mantener la tasa del multiplexor. Esta operación se conoce como *relleno de bits* y se ilustra en la figura 7.41. Los bits de relleno no conducen información y se añaden sólo para mantener la mayor tasa de bits del multiplexor.

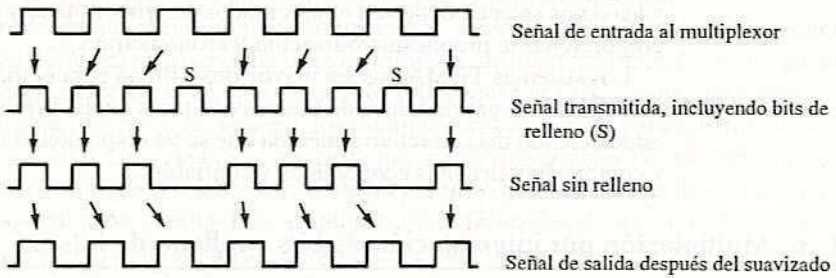


Figura 7.41 Entradas y salidas de un multiplexor/demultiplexor con bits de relleno.†

Para amortiguar las fluctuaciones de corto plazo de la tasa de bits de entrada y señalar la necesidad de un bit de relleno, cada entrada se aplica a una memoria de paso o *almacén*

† De J.J. Spilker, Jr., *Digital Communications by Satellite*, © 1977, pág. 118. Reimpreso con autorización de Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

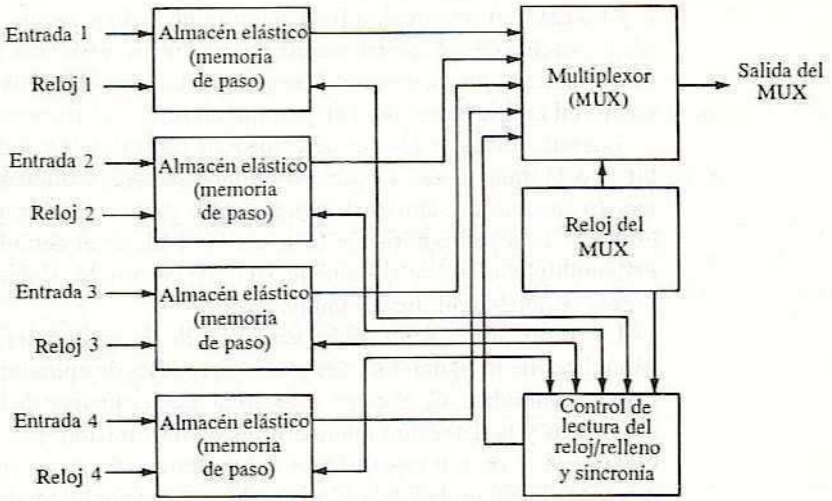


Figura 7.42 Multiplexor por intercalación de bits que utiliza relleno de bits.

elástico, como se muestra en la figura 7.42. Ésta actúa como un recipiente cuya capacidad es vigilada por el control. En cuanto el contenido de la memoria de paso cae por debajo de un umbral dado, se inserta un bit de relleno en la corriente de datos, bajo el mando del sincronizador.

Al otro extremo de la línea, una función importante del demultiplexor es eliminar los bits de relleno de la corriente de datos. Esto requiere que la identificación de los bits de relleno se haga de la manera más confiable posible y sin sobrecargar en forma excesiva el formato. Se utilizan varias técnicas.

Considérese el multiplexor Bell System M12 como ejemplo de los métodos de encuadre y sincronización para el relleno de bits.† Este multiplexor está diseñado para combinar cuatro portadoras T1 de entrada en una portadora de salida T2 (véanse Fig. 7.32 y Tabla 7.1). El formato del cuadro del multiplexor M12 se muestra en la figura 7.43. Este multiplexor intercala, bit por bit, las cuatro portadoras T1 de entrada hasta haber tomado un total de 48 bits, 12 de cada entrada. Entonces se inserta un bit de control y se repite la secuencia. Se utilizan tres tipos de bits de control: las series M,

Orden de transmisión $\longrightarrow$

M_0	(48)	C_{I}	(48)	F_0	(48)	C_{I}	(48)	C_{I}	(48)	F_1	(48)
M_1	(48)	C_{II}	(48)	F_0	(48)	C_{II}	(48)	C_{II}	(48)	F_1	(48)
M_1	(48)	C_{III}	(48)	F_0	(48)	C_{III}	(48)	C_{III}	(48)	F_1	(48)
M_1	(48)	C_{IV}	(48)	F_0	(48)	C_{IV}	(48)	C_{IV}	(48)	F_1	(48)

Figura 7.43 Formato de cuadro para el multiplexor Bell System M12.

† Bell Telephone Laboratories, *Transmission Systems for Communications*, 4a. ed., 1970, pág. 612.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

F y C. Esto proporciona la indicación multicuadro, la sincronización del cuadro y la identificación de cuál de las cuatro entradas se ha rellenado. La primera fila del formato se transmite primero, después la segunda, etcétera. Cada fila representa un cuadro y las cuatro un multicuadro. Sólo se permite un bit de relleno en cada multicuadro.

Los subíndices de los bits de control de las series M y F de la figura 7.43 denotan el bit (0 o 1) transmitido. La serie F usa una secuencia alterna de 0 y 1 que proporciona una frecuencia fundamental cuyos cruces por cero sincronizan el cuadro. Como el esquema es repetitivo, puede formarse un PLL en el demultiplexor. Después de esto, el demultiplexor busca el esquema 0111 de la serie M. Habiéndolo hallado, el demultiplexor también identifica el multicuadro.

La información sobre el relleno de bits es proporcionada por la serie C y los subíndices de la figura 7.43 designan los canales de entrada; por tanto, C_{I} representa el canal de entrada 1, C_{II} el canal 2, etcétera. Los esquemas de bits de las series M y F son periódicos y la detección tolera errores de transmisión. Por el contrario, los esquemas de la serie C no son repetitivos y deben transmitirse con suficiente redundancia para mantener la integridad de los bits, es decir, sin dejar un bit de relleno ni quitar un bit de dato válido, o sea desplazando toda la subsiguiente corriente de datos un bit hacia adelante o hacia atrás en el tiempo. La pérdida de integridad de los bits causaría que los demás bits del cuadro se leyeran de manera errónea, tal vez a un puerto de salida equivocado del demultiplexor. Por tanto, éste es un error mucho más serio que el cometido en un bit de datos.

Para proteger la integridad de los bits, se emplea un código de repetición ×3 en el multiplexor M12. La inserción de un bit de relleno en cualquier cuadro se denota haciendo 1 las tres C de ese cuadro; así mismo, tres 0 denotan que no hay relleno. Se utiliza una lógica de decodificación por mayoría, de manera que si dos de las tres se detectan como 1, se decide que ha habido una inserción de un bit de relleno. Por el contrario, si dos de las tres se detectan como 0, se decide que no se ha insertado ningún bit de relleno.

Cada multicuadro contiene $12 \times 6 \times 4 = 288$ bits para cada uno de los canales de entrada. Como sólo se permite un bit de relleno por canal de entrada en cada multicuadro, el máximo cambio fraccional en la tasa de entrada de bits que puede caber es 1/288, o 0.35%. Los buenos relojes pueden mantenerse en 60 ppm (partes por millón) o 0.006%, lo cual se ajusta bien a las capacidades de este multiplexor. Nótese que este cambio fraccional máximo representa el cambio entre ningún bit de relleno y todos los bits de relleno. Todas las situaciones prácticas se hallan entre estos extremos. Si se designa como s el número promedio de bits de relleno por canal por multicuadro, entonces $0 \leq s \leq 1$. Para permitir desviaciones en ambos sentidos de una tasa nominal del reloj R_{i}, debe elegirse s cerca de $\frac{1}{2}$ de manera que el relleno de bits ocurra, en promedio, 50% del tiempo.[†] Por ejemplo, en el multiplexor M12 se tienen cuatro canales de entrada con una tasa nominal R_{i} cada uno. Admitiendo un exceso de un bit de control cada 48 bits de datos y notando que hay 288 bits de datos en cada multicuadro, se halla que la tasa de salida R_{o} del multiplexor es

[†] Podría pensarse que uno siempre debería utilizar $s = \frac{1}{2}$, lo cual daría la mayor tolerancia en frecuencia a cada lado de la tasa nominal. Sin embargo, la tasa a la cual la memoria necesita relleno puede variar, causando una variación en el flujo de los bits demultiplexados. Esta variación tiene un valor pico a pico igual a s, y por esto es deseable mantener pequeño el valor de s.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

$$R_o = 4R_i\left(\frac{49}{48}\right)\left(1 + \frac{s}{288}\right)$$

Usando R_o = 6.312 Mbps y R_i = 1.544 Mbps (véase Tabla 7.1), se tiene s = 0.335.

EJERCICIO 7.9.1

Calcule el número promedio de bits rellenos por canal en el multiplexor Bell System M12 si la precisión tanto en la corriente de datos de entrada como en el reloj del multiplexor es de ±90 ppm y (a) la tasa de entrada (R_i) es lenta pero la de salida (R_o) es rápida; (b) la tasa de entrada es rápida pero la de salida es lenta.

RESPUESTA: (a) 0.387; (b) 0.283.

EJEMPLO 7.9.1

Un multiplexor por intercalación de bits opera a una tasa de salida de 224 Mbps y 145 bits por cuadro: 143 bits de datos y dos bits de control, marcados como series F y S.[†] El formato del cuadro se muestra en la figura 7.44(a). El bit de sincronización de cuadro (serie F) alterna simplemente entre 0, 1. El bit de sincronización (serie S) ocupa el espacio de tiempo que suele usarse para el canal 73, y el formato de bits S se muestra en la figura 7.44(b). El marcador M es la palabra de 16 bits 0110101001011010. Cada palabra C de relleno de canal usa una redundancia de tres a uno: 000 sin relleno, 111 con relleno. La tasa nominal de bits de entrada por canal es la tasa de la portadora T1 de 1.544 Mbps. Para este multiplexor, calcule (a) la eficiencia global; (b) el número de cuadros del multicuadro; (c) el máximo cambio fraccional de la tasa de entrada que puede acomodarse; (d) el número promedio de bits de relleno por canal cuando la entrada se encuentra a una tasa nominal de la portadora T1.

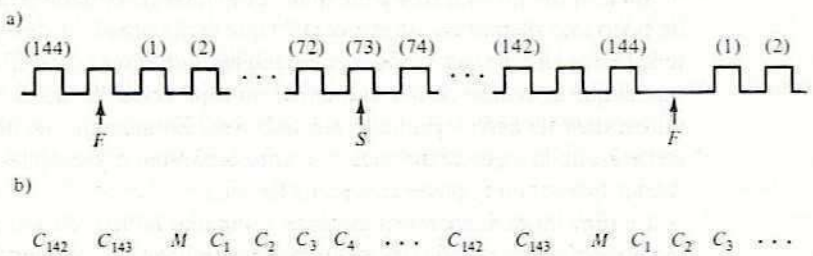


Figura 7.44 (a) Formato del cuadro y (b) formato de bits S para el multiplexor del ejemplo 7.9.1.

Solución a) Se utilizan dos bits de 145 como exceso, por lo que la eficiencia global es de (143/145) × 100 = 98.6%.

[†] Ésta es una versión simplificada del multiplexor descrito en F.J. Witt, "An experimental 223 Mb/s Digital Multiplexer-Demultiplexer Using Pulse Stuffing Synchronization", *Bell System Technical Journal*, noviembre de 1965, págs. 1843-1885; véase también J.J. Spilker, *Digital Communications by Satellite*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, Inc., 1977, pág. 122.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

b) Como dos canales (F y S) no requieren bits de relleno, la transmisión de una secuencia completa de bits S necesita $M = 3(143) + 16 = 445$ cuadros.

c) La tasa nominal multiplexada de 145 canales de señales portadoras T1 es de 145(1.544 Mbps) = 233.88 Mbps. Por tanto, la tasa de 244 Mbps permite un cambio fraccional de 0.05%.

d) Para este sistema, $R_o = 145R_i(1 + \delta)$, donde δ es el máximo aumento fraccional de R_i. Como la secuencia de bits S contiene 445 bits, el máximo cambio fraccional permitido es de un bit en cada 445. Sin embargo, esto requeriría de un bit de relleno en cada multicuadro. Si s es el número promedio de bits de relleno por canal por multicuadro, se tiene

$$R_o = 145R_i\left(1 + \frac{s}{445}\right).$$

Usando $R_o = 224$ Mbps y $R_i = 1.544$ Mbps, se halla que $s = 0.239$.

7.9.2 ★ Multiplexión por intercalación de caracteres y relleno de palabras

Por lo general es más simple efectuar la multiplexión por división de tiempo de un número de terminales asíncronas carácter por carácter en vez de bit por bit. Esto es cierto en particular si se desea flexibilidad para acomodar terminales con diferentes tamaños de caracteres. Por tanto, los multiplexores por intercalación de caracteres se han adoptado ampliamente para la multiplexión de dispositivos asíncronos de baja velocidad, como las terminales de datos. Cada carácter, en general con verificación de paridad y tal vez con un código de posición, se envía intacto como una palabra y se intercala en la corriente de bits. A menudo, las corrientes de datos síncronos, que se transmiten en general a velocidad alta, se multiplexan junto con los datos asíncronos.

La tasa del multiplexor para cada compuerta de entrada se ajusta para que adquiera un poco más de rapidez (digamos 3%) que la máxima tasa de caracteres esperada de las terminales asíncronas. Como los caracteres individuales se envían a una tasa más alta que la que se recibe de la terminal, el multiplexor debe ser capaz de guardar al menos un carácter de cada terminal conectada a él. En general, los bits de inicio y detención se sacan de cada carácter antes del almacenamiento y después son reinsertados por el demultiplexor en el otro extremo de la línea.

Se registra cada memoria de paso y, cuando no hay caracteres que transmitir desde una determinada compuerta de entrada, se transmite un carácter de control predeterminado. Este procedimiento se llama *relleno de palabras* y es similar al relleno de bits excepto que los datos se manejan carácter por carácter. El relleno de palabras es más tolerante a los cambios en la tasa de bits que el relleno de bits y puede acomodar variaciones de la tasa de bits en todo el intervalo, desde la tasa de entrada cero hasta la máxima tasa de bits del multiplexor. Sin embargo, la eficiencia global es, en general, menor que en los multiplexores que utilizan relleno de bits.

En el relleno de palabras se asigna una palabra predeterminada para indicar un relleno de palabra. Esta palabra debe tener, al menos, una distancia de Hamming de uno (es preferible más) respecto a cualquier otra palabra del alfabeto utilizado. Por lo común,

http://libreria-universitaria.blogspot.com

esta distancia se consigue agregando un bit de paridad en el multiplexor. Son posibles varias técnicas; la que sigue es una descripción relativamente simple, y otra se incluye en el problema 7.9.3.

Para comenzar nuestro ejemplo del procedimiento de relleno de palabras, se supone que una terminal asíncrona transmite caracteres de 10 bits en la compuerta de entrada de un multiplexor. En éste, se sacan los bits de inicio y detención y se añaden bits de verificación de paridad par. Entonces, cada carácter de 10 bits se transmite como una palabra de 9 bits. Suponiendo que se necesita un carácter de cada 10 para la sincronización, la eficiencia global del multiplexor es entonces de $(\frac{8}{9})(\frac{9}{10}) = 80\%$. La palabra de relleno se asigna a uno de los caracteres permisibles del alfabeto, pero para distinguirla de una palabra de dato, en la de relleno se usa paridad impar. Esto basta para mantener una distancia de Hamming mínima de uno entre la palabra de relleno y otras palabras del alfabeto. El demultiplexor busca esta palabra particular con paridad impar para detectar la palabra de relleno. Por supuesto, una equivocación es suficiente para causar un error en el carácter de salida.

Una mejor protección contra errores en palabras de relleno requiere una mayor distancia entre estas y otras palabras del alfabeto. Por tanto, un esquema más elaborado es notar que al agregar un bit de verificación de paridad a una palabra de m bits se han agregado $2^{m+1} - 2^m$ nuevas palabras, de las cuales sólo una es la de relleno. El objetivo es elegir nuevas palabras de datos entre este conjunto mayor de manera que se maximice la distancia de la palabra de relleno.

Hasta aquí, se ha supuesto que el formato de datos constituye un cuadro cuando el multiplexor —por intercalación ya sea de bits o de caracteres— ha servido a todas las compuertas de entrada al menos una vez. Esto es lo que hace un multiplexor convencional. En éste, cada compuerta de entrada tiene su propio espacio de cuadro que repite de manera regular, haciendo disponible una capacidad de transmisión constante y garantizada. Sin embargo, en un momento dado algunas compuertas de entrada quizá no tengan datos que enviar, y el multiplexor convencional no es suficiente para reservar espacios de tiempo cuando no hay datos por enviar. Para remediar esto, una versión de la multiplexión por división de tiempo, conocida como *multiplexión por demanda*, adjudica tiempo disponible de acuerdo con la demanda de entrada, conservando todos los espacios llenos de datos mientras haya datos en espera de ser enviados y, si es necesario, intercambiando asignaciones de espacio para conseguirlo.

En la multiplexión por demanda, cada entrada se aplica a una memoria de paso cuya capacidad es lo bastante grande para almacenar al menos varios caracteres. Así, el control de las memorias de paso verifica cuán llenas están éstas e instruye al multiplexor para que obtenga muestras de las memorias más llenas.[†] Cada carácter o bloque de caracteres por transmitir se define como una dirección adjudicada por el multiplexor.

[†] Hay una versión de la multiplexión por demanda usando líneas extensas (p. ej., cables submarinos) o satélites que se llama TASI (*Time Assignment Speech Interpolation*, asignación de tiempo de interpolación de voz). En los sistemas telefónicos se ha encontrado que, en promedio, los suscriptores sólo hablan el 40% del tiempo en las conversaciones normales. Por tanto, se pueden hacer ahorros detectando las palabras del usuario para asignarle un canal que no esté en uso. El canal permanece asignado al usuario hasta que éste calle y otro usuario necesite el canal. Durante los periodos de poca demanda el usuario mantiene su línea, mientras que si hay mucha demanda cada palabra sucesiva puede ir por diferentes rutas.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La multiplexión por demanda puede aumentar la eficiencia de un sistema de transmisión a expensas de un exceso de bits más notable, algunos retardos variables introducidos en la corriente de datos y el riesgo de una congestión si todas las terminales servidas necesitaran la transmisión al mismo tiempo. Si ocurriera esta última situación, debe asignarse un conjunto de reglas o procedimientos, con cierta jerarquía o prioridad, para manejar la situación en forma organizada.

En los modernos multiplexores por división de tiempo se tiende a hacer uso de dispositivos como los multiplexores por demanda, los multiplexores inteligentes y los concentradores. De hecho, estos dispositivos pueden verse como terminales inteligentes de un sistema de comunicación global que no sólo puede multiplexar y demultiplexar datos sino también usuarios de datos. A medida que aumenta la complejidad, con características adicionales de control bajo la supervisión de minicomputadores o microprocesadores, aumentan los requisitos para el desarrollo de una serie de detallados procedimientos de operación. Esta serie de reglas y procedimientos, que suelen implicar un conjunto jerárquico de instrucciones y prioridades, se llama *protocolo*.

Los detalles de un protocolo diferirán de un sistema a otro y dependerán en cierta forma del minicomputador o microprocesador utilizado, pero hay algunos rasgos básicos que en general se pueden identificar. Éstos se designan para resolver problemas operativos tales como[†]

1. Encuadre. Determinación de qué grupos de bits constituyen caracteres y qué grupos de caracteres constituyen mensajes.
2. Control de errores. Detección de errores, aceptación de mensajes correctos y peticiones de retransmisión de mensajes erróneos.
3. Control de secuencia. Identificación de mensajes retransmitidos por el control de errores para evitar pérdida o duplicación de mensajes.
4. Control de línea. Determinación, en el caso de una línea semidúplex o multipunto, de cuál estación va a transmitir y cuál o cuáles van a recibir.
5. Control de tiempo muerto. Solución del problema de qué hacer si súbitamente cesa por completo el flujo de mensajes.
6. Control de inicio. Solución del problema de qué procedimiento debe seguirse para iniciar las transmisiones en un sistema de comunicación que ha estado ocioso.

Varios de estos aspectos se han presentado anteriormente en relación con los multiplexores. Sin embargo, escapa a los propósitos de este libro proseguir con el tema.[‡]

EJERCICIO 7.9.2

Cierto multiplexor por intercalación de caracteres utiliza una palabra de entrada de 10 bits que consiste en un bit de inicio (0), 7 bits de datos que usan el código ASCII, un bit de verificación de paridad (paridad par) y un bit de detención (1). En el multiplexor se añade un bit de verificación de paridad derivado de la palabra de dato de 8 bits,

[†] J.E. McNamara, *Technical Aspects of Data Communication.* Maynard, Mass., Digital Equipment Corporation, 1977, pág. 191.

[‡] Véase, por ejemplo, D.W. Davies, D.L.A. Barber, W.L. Price y C.M. Solomonides, *Computer Networks and their Protocols.* Nueva York, John Wiley & Sons, 1977.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

utilizando paridad par, lo cual produce una palabra de 11 bits. La palabra de relleno usa uno de los caracteres permisibles del alfabeto de entrada, invierte los bits de inicio y detención y emplea paridad impar para el bit de verificación de paridad del multiplexor. (a) ¿Cuál es la mínima distancia de Hamming entre la palabra de relleno y otras palabras del alfabeto? (b) Suponiendo que se necesita uno de 10 caracteres para la sincronización, determine la eficiencia global del multiplexor. (c) Establezca una regla de decisión para el bit de relleno.

RESPUESTA: (a) 3; (b) 65%; (c) La regla de decisión de dos de tres de los bits de inicio y detención (invertidos) y el bit de verificación de paridad (impar).

7.10 RED DIGITAL DE SERVICIOS INTEGRADOS (ISDN)[†]

Como resultado del rápido aumento de las aplicaciones de los computadores y equipo digital relacionado, y la necesidad de comunicación entre dichos dispositivos, los conceptos de redes que en principio se desarrollaron para el servicio telefónico se han reformulado para proporcionar una transmisión más eficiente de datos digitales. Estas redes de comunicación no sólo deben ser capaces de manejar y dirigir datos digitales con eficiencia sino que también deben incluir facilidades para el servicio de teléfono digital. En esta sección se describen en forma breve algunos avances recientes en este campo.

Los tres modos básicos para la operación de redes de comunicación son la conmutación de circuitos (líneas), la conmutación de mensajes y la conmutación de paquetes. En la conmutación de circuitos, la comunicación se lleva a cabo por medio de una conexión que se dedica al par de comunicación durante el tiempo que dure la transmisión del mensaje. Durante este tiempo la línea está dedicada del todo y ningún otro usuario tiene acceso a la trayectoria de transmisión, incluso durante aquellos intervalos en los que es posible que no se estén transmitiendo datos. La conmutación de circuitos es más eficiente cuando existe una tasa de transmisión de información relativamente constante; se vuelve ineficiente cuando la transmisión se sucede en pequeñas ráfagas separadas por largos intervalos sin transmisión. La conmutación de circuitos se puede utilizar tanto para sistemas analógicos como digitales, y por lo tanto fue el primer desarrollo para sistemas telefónicos. Los otros dos tipos citados son más específicos para la transmisión de datos digitales.

En el segundo tipo, llamado conmutación de mensajes, un mensaje completo se acumula en una memoria de paso y luego se envía a la red cuando está disponible alguna trayectoria. En ese momento, la transmisión sólo puede ser hacia la siguiente oficina de conmutación de la red, donde el mensaje se almacena de nuevo hasta que otra trayectoria esté disponible para enviar el mensaje hacia su destino, y así sucesivamente. La conmutación de mensajes proporciona una transmisión de información más eficiente, en comparación con la conmutación de circuitos, cuando los datos se presentan en pequeñas ráfagas con intervalos en los que no existen datos. La trayectoria sólo se necesita durante

[†] R. T. Roca, "ISDN Architecture", *AT&T Technical Journal*, vol. 65, enero-febrero de 1986, págs. 5-17.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

la transmisión de datos, y no hay necesidad de asignar toda la trayectoria en un tiempo dado. Sin embargo, cada mensaje debe llevar la identificación con respecto a la fuente, el destino, el usuario (para servicio pagado) y la información de inicio y detención. Estos datos auxiliares constituyen un costo extra para el sistema. Por tanto, la conmutación de mensajes tiene el potencial de aumentar la eficiencia de la red de comunicación para transmitir datos de computador, aunque deben realizarse gastos extra.

Conforme aumenta la longitud del mensaje, también aumenta la capacidad de la memoria necesaria para conmutar mensajes en cada oficina de conmutación. Como cada oficina debe esperar a que se reciba el mensaje completo antes de retransmitirlo, el retardo neto en la transmisión se puede volver significativo para mensajes extensos. Además, los mensajes cortos tienden a sufrir retardos provocados por los mensajes extensos en dicho sistema. Un tercer tipo de red, llamado red de conmutación de paquetes, se diseñó para evitar estas desventajas subdividiendo los mensajes en paquetes de menor longitud. Cada paquete se maneja en la red como una entidad separada, de manera similar a la utilizada en la conmutación de mensajes. Sin embargo, cada paquete tiene ahora un tamaño modesto y puede ser manejado en forma más eficiente por las operaciones de almacenamiento y retransmisión de la red. En algunos sistemas de conmutación de paquetes, los diferentes paquetes de un mensaje dado pueden llegar a su destino por diferentes rutas, con distintos retardos, e inclusive en desorden. Se concluye entonces que en las redes de conmutación de paquetes cada paquete debe estar acompañado por bits adicionales que no sólo son similares a los de la conmutación de mensajes sino que además sirven para ordenar el mensaje en forma correcta. Por tanto, si bien la conmutación de paquetes proporciona una mayor flexibilidad y una tasa de transmisión de información eficiente para información en ráfagas, lo hace a expensas de un gasto mayor.

En los antiguos sistemas telefónicos, la transmisión de información digital se llevaba a cabo convirtiendo los datos digitales en señales analógicas por medio de modem y luego manejando éstas como si fueran voz. Los trabajos recientes se han enfocado a redes de comunicación que no sólo proporcionen servicio telefónico sino que además brinden una amplia variedad de servicios de datos digitales. La red digital de servicios integrados (ISDN) es una red de comunicaciones punto a punto de ese tipo que proporciona una amplia variedad de servicios a los que se puede acceder por medio de interfaces usuario-red de propósito múltiple estándar. La ISDN está evolucionando de una red que se orienta principalmente hacia el uso telefónico, y se intenta hacer pequeñas correcciones en el sistema para la transmisión de datos digitales. Las demandas de servicios de hoy en día se caracterizan por el acceso a servicios no sólo de voz sino también de conexión de usuarios para la transmisión de datos digitales con bancos, aerolíneas, compañías de mercados de acciones y otros negocios. El concepto ISDN utiliza una sola interfaz usuario-red y está diseñada para integrar voz, datos e imagen en dicha interfaz. En consecuencia, una sola interfaz puede proporcionar acceso integrado a todos los servicios. Para lograrlo, la interfaz de acceso es digital y separa las funciones de transferencia de información (voz, datos, imagen) de las funciones de señalización y administración (llamadas, registro de cuentas, mantenimiento de línea). El CCITT estableció un conjunto de estándares generales para el ambiente de trabajo ISDN y los servicios, para proporcionar alguna compatibilidad entre los sistemas.

ISDN acepta dos interfaces estándar para conectar el equipo del cliente a la red: la interfaz de tasa primaria (PRI, *primary-rate interface*) y la interfaz de tasa básica (BRI,

http://libreria-universitaria.blogspot.com

basic-rate interface). La arquitectura ISDN proporciona varios tipos de canales de información en estas dos interfaces. El canal de información básico, llamado canal B, conduce voz o datos y opera a 64 kbps para ambas interfaces. El canal D lleva información de señalización acerca de las transacciones o llamadas en los canales B que asiste. También puede llevar paquetes de datos del cliente. La tasa de transmisión del canal D es de 16 kbps para el BRI y 64 kbps para el PRI. Antes era común que la información de señalización en las redes telefónicas se transportara "en banda", en el mismo canal en que se controla la voz o la comunicación de datos. Sin embargo, esta señalización en banda utiliza hasta 8 kbps del canal de 64 kbps, limitando al cliente a una tasa de transmisión efectiva de 56 kbps. El nuevo canal de señalización utiliza señalización orientada al mensaje que no sólo es muy eficiente sino que deja libres los 64 kbps del canal B. Por tanto, el canal B puede dar acceso libre a tasas de transmisión de 64 kbps. Hay también canales adicionales, etiquetados como H0 y H11, que proporcionan acceso libre a tasas de transmisión elevadas de 384 y 1536 kps, respectivamente.

La estructura del canal PRI de Norteamérica está compuesta de 24 segmentos de tiempo. El arreglo más comun es 23B + D, en donde los canales B y D se proporcionan a 64 kbps. El PRI también puede contener cualquier combinación de canales B y H0, así como un solo canal H11. La máxima tasa de transferencia de información en el PRI es de 1536 kbps, con una tasa del reloj de muestreo de 1544 kbps. El canal D no necesita estar en la misma interfaz que los canales B que controla. Un canal D tiene la suficiente capacidad para controlar los canales B de 20 o más interfaces, dependiendo de las características de tráfico del cliente. Se espera la utilización de PRI para las fuentes de mayor tráfico, como la telefónica —incluyendo ramas de intercambio digital privado (PBX, *private branch exchanges*)— y otras aplicaciones de transferencia de información digital intensa, como redes locales (LAN, *local area networks*) y computadores anfitriones.

La estructura BRI utiliza el arreglo 2B + D, donde los canales B se proporcionan a 64 kbps y el D a 16 kbps. Se espera que BRI se utilice sobre todo entre la red o los dispositivos de conmutación y las terminales. Por tanto, un canal D puede llevar información de control entre el equipo del cliente y la red, y entre dos localidades. En los estándares del CCITT se especifican servicios para los canales B y D tanto en modo de circuito como en modo de paquete.

Se han hecho esfuerzos para mantener una compatibilidad actualizada en los cambios que se realizan en las redes telefónicas. Por tanto, el nuevo sistema debe ser compatible con aquellos clientes que aún no tienen los servicios ISDN. Sin embargo, la funcionalidad de los equipos terminales que no son para ISDN limitan las capacidades globales del ISDN en esos lugares.

7.11 FILTRO ACOPLADO

En los sistemas PAM y PCM nos interesa maximizar el pico de la señal de pulso en presencia de ruido aditivo. Nos interesa en particular el caso en que la señal más el ruido se pasan por un filtro lineal invariable en el tiempo. De todos los filtros que podrían elegirse, ¿cuál dará una salida máxima?

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Sea $[f(t) + n(t)]$ la entrada al filtro, donde $f(t)$ es la señal y $n(t)$ el ruido aditivo. La salida del filtro es $[f_o(t) + n_o(t)]$ y se desea maximizar la razón $|f_o(t_m)|/\sqrt{\overline{n_o^2(t)}}$, donde $t = t_m$ es el mejor tiempo de observación (que se debe prefijar). En realidad, como se verá, resulta más conveniente maximizar el cuadrado de esta relación.

Sea $F(\omega)$ la transformada de Fourier de $f(t)$ y $H(\omega)$ la función de transferencia en frecuencia del filtro óptimo. Entonces puede escribirse

$$f_o(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)H(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\,,$$

$$f_o(t_m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)H(\omega)e^{j\omega t_m}\,d\omega\,. \tag{7.43}$$

La densidad espectral de potencia del ruido es $S_n(\omega)$, por lo que†

$$\overline{n_o^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega)\,|H(\omega)|^2\,d\omega\,. \tag{7.44}$$

Dividiendo la magnitud al cuadrado de la ecuación (7.43) entre la (7.44), se obtiene

$$\frac{|f_o(t_m)|^2}{\overline{n_o^2(t)}} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)F(\omega)e^{j\omega t_m}\,d\omega\right|^2}{2\pi\int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega)\,|H(\omega)|^2\,d\omega}\,. \tag{7.45}$$

En este punto se hace uso de la desigualdad de Schwartz (véase Ej. 2.5.2):

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(x)\,dx\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty}|f_1(x)|^2\,dx\int_{-\infty}^{\infty}|f_2(x)|^2\,dx\,. \tag{7.46}$$

La igualdad rige si, y sólo si,

$$f_1(x) = kf_2^*(x)\,, \tag{7.47}$$

donde k es una constante arbitraria.

Ahora, las dos funciones de la ecuación (7.46) se identificarán, repectivamente, con $H(\omega)\sqrt{S_n(\omega)}$ y $F(\omega)e^{j\omega t_m}/\sqrt{S_n(\omega)}$ y la ecuación (7.46) se convierte en

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)F(\omega)\,d\omega\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2\,d\omega\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega\,. \tag{7.48}$$

La sustitución de este resultado en la ecuación (7.45) da

$$\frac{|f_o(t_m)|^2}{\overline{n_o^2(t)}} \le \frac{\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2\,d\omega\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega}{2\pi\int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega)\,|H(\omega)|^2\,d\omega}\,. \tag{7.49}$$

† Nótese que el valor cuadrático medio de $n_o(t)$ es independiente de t.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Para el caso especial en el que el ruido es blanco, $S_n(\omega) = \eta/2$, y se tiene

$$\frac{|f_o(t_m)|^2}{\overline{n_o^2(t)}} \leq \frac{1}{\pi\eta}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega = \frac{E}{\eta/2}, \tag{7.50}$$

donde E es la energía de $f(t)$ para una carga de un ohm. La igualdad en la ecuación (7.50) se cumple sólo si [véase Ec. (7.47)]

$$H_m(\omega) = kF^*(\omega)e^{-j\omega t_m}, \tag{7.51}$$

o

$$\begin{aligned} h_m(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{kF^*(\omega)e^{-j\omega t_m}\} \\ &= kf^*(t_m - t)\,. \end{aligned} \tag{7.52}$$

La constante k es arbitraria y se supone que $k = 1$ por conveniencia.

De este resultado se deduce que la respuesta al impulso del sistema óptimo es la imagen especular de la señal de entrada deseada $f(t)$, retardada por un intervalo t_m. Por tanto, el filtro se acopla a una señal particular, como lo indica el término *filtro acoplado*.

De manera intuitiva, el resultado de la ecuación (7.51) tiene sentido cuando se aplica a la característica de magnitud de un filtro, de modo que $|H(\omega)| = |F(\omega)|$ (recuérdese que este resultado se obtuvo para el caso de ruido aditivo blanco). Esto establece que debe filtrarse de manera que se atenúen en gran medida las componentes de frecuencia en los intervalos de frecuencia con poca energía relativa de la señal, y se atenúen muy poco las componentes en que la energía sea alta. Recuérdese también que se filtra para reconocer la señal en presencia de ruido y no para tener fidelidad en la señal (para lo cual suele desearse una respuesta de frecuencia "plana").

La respuesta de fase es también muy importante, y la ecuación (7.51) establece que los desfasamientos de $f(t)$ deben anularse de manera que todas las componentes de frecuencia se sumen *en fase* exactamente en $t = t_m$. Por el contrario, las componentes espectrales del ruido se suman con fases aleatorias, por lo que la razón señal pico a raíz cuadrática media de ruido se maximiza.

Se supone que la señal $f(t)$ tiene duración finita $(0, T)$. La respuesta al impulso del filtro acoplado $f(t_m - t)$ se puede obtener reflejando $f(t)$ alrededor del eje vertical y desplazándola a la derecha t_m segundos. Restringiendo la consideración al caso físicamente realizable con mínimo retardo, se elige $t_m = T$. Esto se ilustra en la figura 7.45.

En el punto $t = t_m$, la señal de salida del filtro acoplado está dada por la sustitución de la ecuación (7.51) en la (7.44) con $k = 1$:

$$f_o(t_m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega = E\,. \tag{7.53}$$

Por tanto, la salida del filtro acoplado en $t = t_m$ es independiente de la señal que se elija y ¡sólo depende de su energía! La salida de ruido cuadrática media del filtro es [sustituyendo la Ec. (7.53) en la (7.50)]

$$\overline{n_o^2(t)} = E\frac{\eta}{2}. \tag{7.54}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

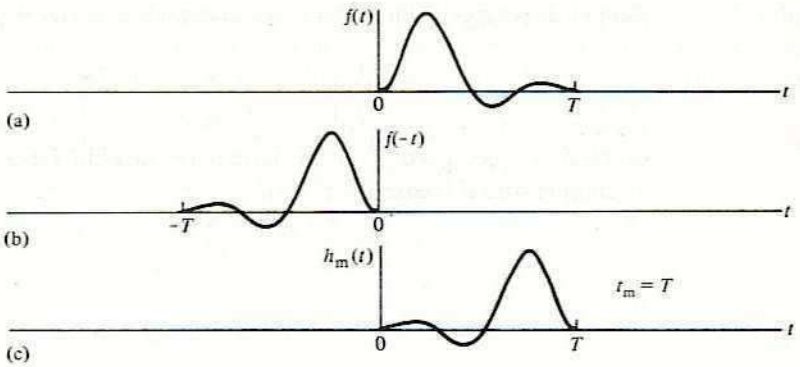


Figura 7.45 Filtro acoplado para un sistema físicamente realizable, con retardo mínimo.

El filtro acoplado debe ajustarse a la señal para obtener la máxima razón señal a ruido. Una forma de hacer esto en el caso general es notando que la respuesta al impulso de un filtro lineal invariable en el tiempo puede aproximarse con una línea de retardo con derivaciones en varios puntos y ponderada por un conjunto de ganancias fijas (véase Sec. 3.10). Este sistema se muestra en la figura 7.46, donde la línea de retardo tiene derivaciones en los retrasos $k\,\Delta\tau$. Para una línea de N retardos la respuesta $g(t)$ se puede escribir como

$$g(t) = \sum_{k=0}^{N} f(t - k\,\Delta\tau)h(k\,\Delta\tau)\,\Delta\tau\,, \tag{7.55}$$

donde la salida de cada derivación se multiplica por el peso prefijado $h(k\,\Delta\tau)\Delta\tau$.

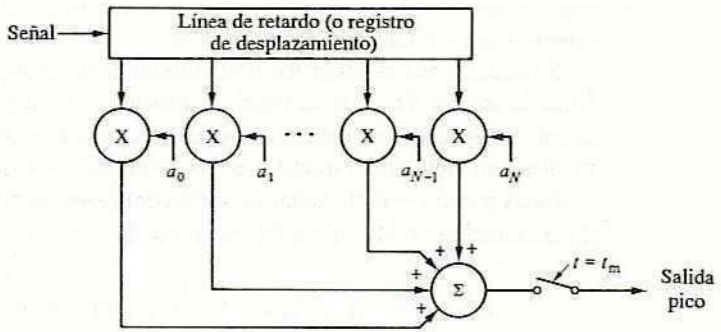


Figura 7.46 Realización del filtro acoplado con una línea de retardo.

Para el caso específico de un filtro acoplado (de valor real), se tiene también [véase la ecuación (7.52)]

$$h(t) = f(t_m - t)\,,$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

por lo que las ganancias de las derivaciones de la figura 7.46 están dadas por

$$a_k = f(t_m - k\Delta\tau)\,\Delta\tau\,. \tag{7.56}$$

O sea que una vez conocidas la señal $f(t)$ y el tiempo t_m, las ganancias de las derivaciones se pueden ajustar para aproximar la característica del filtro acoplado deseada.

Una realización alterna del filtro acoplado es la siguiente. Sea $y(t) = f(t) + n(t)$ la entrada del filtro acoplado; la salida correspondiente es

$$\begin{aligned} g(t) &= y(t) \circledast f^*(t_m - t) = f^*(t_m - t) \circledast y(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t_m - \xi) y(t - \xi)\, d\xi\,. \end{aligned} \tag{7.57}$$

Haciendo $\zeta = t_m - \xi$, para que la ecuación (7.57) se convierta en

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\zeta) y(\zeta + t - t_m)\, d\zeta \\ &= r_{fy}(t - t_m)\,, \end{aligned} \tag{7.58}$$

donde

$$r_{fy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\zeta) y(\zeta + \tau)\, d\zeta$$

es la correlación cruzada en el tiempo para señales de energía (véase Cap. 4). Observando que $y(t) = f(t) + n(t)$, encontramos

$$g(t) = r_f(t - t_m) + r_{fn}(t - t_m)\,, \tag{7.59}$$

donde

$$r_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\zeta) f(\zeta + \tau)\, d\zeta$$

es la función de autocorrelación en el tiempo para señales de energía. Si la correlación cruzada entre $f(t)$ y $n(t)$ es cero, la salida pico $g(t_m)$ está dada por $r_f(0)$.

En la figura 7.47 se muestra un diagrama de bloques del correlacionador cruzado. La señal de entrada $y(t)$ se multiplica por $f(t)$. Esto requiere que $f(t)$ se conozca *a priori* ya sea almacenada en la memoria o suministrada por otra fuente. La salida del multiplicador se integra para formar $r_{fy}(\tau)$ en la ecuación (7.58). Para completar la operación, el interruptor se cierra en $t = t_m$ para dar la salida $r_{fy}(0)$. Nótese que la detección del filtro acoplado es, en esencia, síncrona (es decir, coherente).

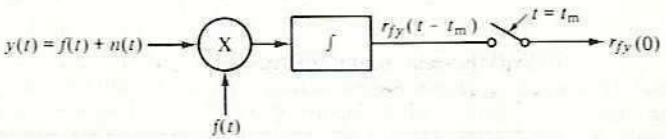


Figura 7.47 Correlacionador en el tiempo.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En ciertos casos, la realización de un filtro acoplado puede ser mucho más fácil de conseguir que lo que indican los métodos anteriores. Por ejemplo, considerese el filtro acoplado para la señal de pulso rectangular de la figura 7.48(a). La respuesta al impulso del filtro es $h(t) = f(T - t) = f(t)$, por lo que la figura 7.48(a) también describe $h(t)$. La convolución de estas señales rectangulares da la señal triangular de la figura 7.48(b).

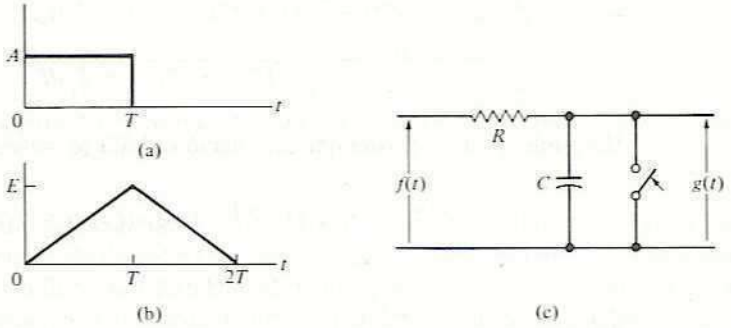


Figura 7.48 Filtrado acoplado de una señal de pulso rectangular: (a) entrada; (b) salida; (c) aproximación por un circuito de integración y descarga.

En $t = T$, la salida del filtro acoplado es máxima. Se toma una muestra de salida y la porción de subida de la señal triangular para $t > T$ no se usa. La porción linealmente creciente de la señal para $t < T$ puede obtenerse integrando un pulso rectangular de entrada. La salida se toma en $t = T$ y entonces se reconecta (descarga) el integrador, repitiéndose el procedimiento. En la figura 7.48(c) se muestra un circuito relativamente simple para conseguir este filtrado de *integración y descarga*. En $RC \gg T$, el circuito actúa como integrador del pulso de entrada. La salida $g(t)$ se muestrea en $t = T$ y el capacitor se coloca en cortocircuito por un momento para reconectar el integrador. Este filtro constituye un diseño relativamente simple de un filtro acoplado para pulsos rectangulares. Nótese que se requiere sincronización para las operaciones de reconexión y muestreo.

EJERCICIO 7.11.1

Calcule la salida del filtro acoplado (físicamente realizable, de retardo mínimo) en $(0, T)$ para la señal de pulso

$$f(t) = \begin{cases} \exp(-t) & 0 < t < T, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

RESPUESTA: $\exp(-T)\ \text{senh}\ t$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

7.12 DETECCIÓN DE PALABRAS DE CÓDIGO CON EL FILTRO ACOPLADO

En la sección anterior se examinó la detección por el filtro acoplado de señales de pulsos con una base pulso a pulso. Estos conceptos pueden extenderse con facilidad al siguiente nivel de detección: el de las palabras de código. Esto es aplicable al problema del detector óptimo de PCM en presencia de ruido blanco.

Nuestro interés en el empleo del filtro acoplado para PCM se centra en el diseño de un filtro que dé una salida máxima sólo para una palabra de código en particular. Si puede diseñarse, entonces pueden usarse n de tales filtros, cada uno ajustado para una de las n palabras de código que contenga el código. Estos filtros pueden preceder a una decisión sobre cuál es la máxima salida. El adecuado nivel de la señal asociado a una palabra de código dada se genera haciendo que el receptor efectúe su papel de detección en un punto de muestra particular.

Las versiones de línea de retardo con derivaciones y de correlacionador de tiempo del filtro acoplado pueden ampliarse con facilidad al caso de las palabras de código. Aquí el análisis se limitará al caso binario, lo que hace que los circuitos necesarios sean fáciles de construir usando elementos digitales lógicos. Debido a las similitudes entre ambos métodos, nos referiremos a ellos como correlacionadores. Ambos métodos requieren sincronización de bits y de palabras.

Ahora resulta evidente el diseño de un receptor PCM óptimo. Se elige un código con n posibles palabras de código y se utilizan n correlacionadores, cada uno con una réplica almacenada de una palabra de código. La salida de los n correlacionadores se somete a la lógica de decisión que determina cuál de ellos es mayor en el tiempo de muestra $t = t_m$. La amplitud adecuada de la señal se asigna después a ese punto de muestra específico y el ciclo se repite. En la figura 7.49 aparece dicha configuración del receptor. El lector encontrará interesante compararla con la figura 2.5.

Estas operaciones se efectúan a menudo en forma digital; los procedimientos se ilustran aquí con un ejemplo. Supóngase que se decide usar un código binario PCM de 16 niveles ($n = 16$) y que, para simplificar, no hay ruido presente. En el receptor, cada símbolo del código binario se almacena en memoria y la multiplicación y la suma se realizan en forma digital, controladas por un reloj. Por conveniencia, el uno se designará con "+" y el cero con "−". Considérese la salida del correlacionador antes de la conexión de muestra para el símbolo de nivel 13 (es decir, 1101, representado por ++−+).[†] En seguida de la orden del reloj (que obviamente debe sincronizarse con la corriente de bits entrante), los datos de entrada se multiplican por los símbolos del código almacenados en cada correlacionador y se suministran a los acumuladores (es decir, integradores). En la siguiente orden del reloj, los datos de entrada se desplazan el intervalo de un bit y la operación se repite.

[†] Puede usarse la notación binaria usual (0, 1) si se define la relación de equivalencia apropiada para el multiplicador ("NOR EXCLUSIVO"), aunque en la sección 10.3 se demostrará que la mayor ventaja se obtiene si el estado de la señal binaria tiene igual energía y signos opuestos.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

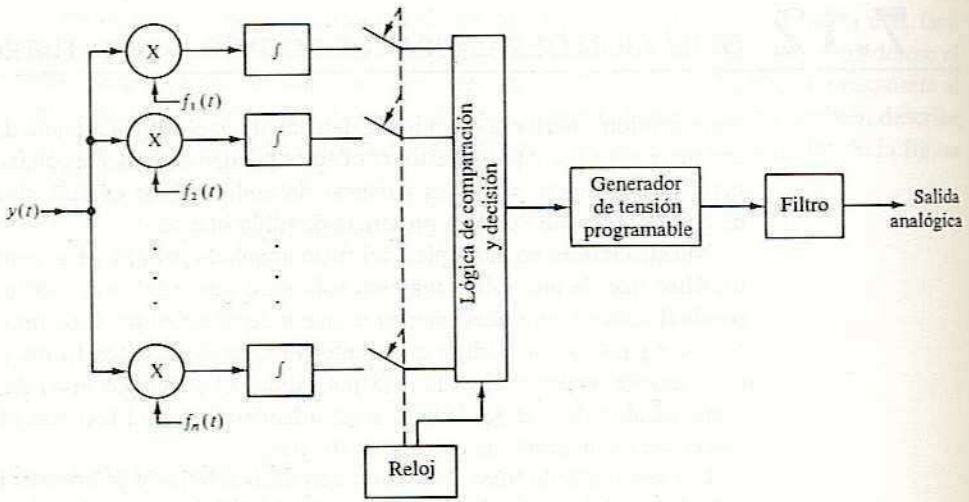


Figura 7.49 Receptor óptimo de PCM que usa correlación.

Supóngase que la secuencia de los datos de entrada es: 6, 13, 10 y que el correlacionador está ajustado en el símbolo del código para 13. En la tabla 7.3 aparece una lista de las salidas sucesivas del correlacionador antes del interruptor de muestreo y en la figura 7.50 se muestra una gráfica de los resultados. Nótese que la salida es máxima en $\tau = t_m$ y es proporcional, en ese punto, a la energía de la señal. El cierre del interruptor en ese punto asegura la salida máxima. Sin embargo, esto también requiere sincronización del receptor, por lo que éste debe mantener sincronización tanto de palabras como de bits.

TABLA 7.3 Salida de un correlacionador digital para la representación binaria de 13 en la secuencia 6, 13, 10

Desplazamiento relativo, $\tau - t_m$	Datos de entrada/Réplica almacenada	Salida del acumulador = $r_{fy}(\tau - t_m)$
	10 13 6	
−3	+ − + − + + − + − + + − y + + − + f	0
−2	+ − + − + + − + − + + − + + − +	+2
−1	+ − + − + + − + − + + − + + − +	−2
0	+ − + − + + − + − + + − + + − +	+4
+1	+ − + − + + − + − + + − + + − +	−2
+2	+ − + − + + − + − + + − + + − +	0
+3	+ − + − + + − + − + + − + + − +	+2

http://libreria-universitaria.blogspot.com

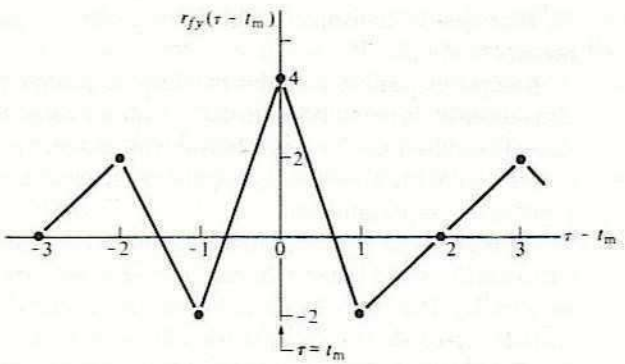


Figura 7.50 Salida del correlacionador para la secuencia PCM de la tabla 7.3.

La necesidad de sincronización de palabras puede ilustrarse considerando la secuencia binaria para 3, 7 al entrar el código en el correlacionador de la tabla 7.3. Los últimos dos pulsos de 3 y los dos primeros de 7 constituyen la secuencia ++-+, formando la palabra del código binario para 13. Por tanto, habrá una salida máxima del correlacionador a medio camino entre el procesamiento de 3 y de 7. Sin embargo, con la sincronización de palabras este máximo no ocurrirá nunca en el tiempo exacto en que se toma la salida, a menos que esté presente la palabra de código para 13.

Los correlacionadores también pueden usarse para establecer la sincronización inicial. En este caso, el receptor debe localizar la máxima salida del correlacionador. Esta localización podría ser relativamente fácil si el correlacionador tuviera una salida sólo para $\tau - t_m = 0$, pero éste no es siempre el caso, como puede verse en la figura 7.50. Uno de los objetivos de la teoría de la codificación es diseñar códigos que tengan correlación mínima para $\tau - t_m \neq 0$ (la máxima es proporcional a la energía de la señal).

EJERCICIO 7.12.1

Un correlacionador digital de cuatro bits similar al de la tabla 7.3 se ajusta para el código binario de 10 (+-+-). Se aplica a la entrada una secuencia infinita de códigos binarios para un número dado (0-15). Determine la salida del correlacionador si el número es (a) divisible entre 3; (b) divisible entre 5 pero no entre 3.

RESPUESTA: (a) 0; (b) ±4.

7.13 SECUENCIAS DE RUIDO FALSO (PN)

Para ayudar a la sincronización, en particular al inicio, es deseable usar una palabra de código cuya autocorrelación sea lo mayor posible en un desplazamiento cero y lo menor posible en cualquier otro desplazamiento. Tras la recepción, el receptor puede determinar, después de reconocerla, que la transmisión está a punto de comenzar, y puede establecer una referencia precisa para la sincronización. Esto es muy importante

http://libreria-universitaria.blogspot.com

en sistemas de transmisión como los satélites, que pueden no transmitir datos de manera continua.

Aunque es posible concebir palabras de código que, para obtener este objetivo, se almacenen en la memoria tanto del transmisor como del receptor, resulta que se dispone de algunos sistemas lineales relativamente simples para generar palabras de código con correlaciones muy buenas. Estas palabras se producen con generadores de secuencia de registro de desplazamiento.

Un registro de desplazamiento es una serie de memorias binarias de una etapa en cascada. El estado binario de cada memoria se transfiere a la siguiente bajo el mando de un reloj. Por tanto, la salida de un registro de desplazamiento de tres etapas es la entrada retardada en tres intervalos de reloj y, en un momento dado, este registro de desplazamiento contendrá los tres bits sucesivos más recientes de la corriente de entrada. Un generador de secuencia de registro de desplazamiento consiste en un registro de n etapas con derivaciones en algunas de ellas y con la salida conectada a lógica combinatoria que retroalimenta la entrada. En la figura 7.51 se muestra el ejemplo de un generador de secuencia de registro de desplazamiento de tres etapas, en el que la entrada al registro es la suma módulo 2 (es decir, una suma binaria sin acarreo) del contenido de las etapas S_2 y S_3, y la salida se lee en el contenido de S_3.

Supóngase que se asignan valores iniciales al generador de la figura 7.51 cargando todos los unos en los registros de desplazamiento. Las dos entradas a la operación SUMA módulo 2 son 1 y 1; el resultado, 0, se guarda en la memoria de paso. En el siguiente intervalo de reloj, el contenido de S_2 se transfiere a S_3, el de S_1 a S_2, y el contenido de la memoria de paso a S_1. De nuevo, la operación SUMA módulo 2 da 0 y se guarda en la memoria de paso hasta el siguiente pulso del reloj. Continuando la secuencia, se halla que los tres registros de desplazamiento tienen los siguientes contenidos:

$$111, 011, 001, 100, 010, 101, 110, 111,\ldots$$

Como este generador obtiene información sólo de los tres bits más recientes, una vez que se repita el estado inicial (111), se repetirá el resto de la secuencia. La salida del generador se toma del contenido del último registro de desplazamiento para dar la palabra código de salida

$$1\,1\,1\,0\,0\,1\,0\ldots$$

Esta palabra es periódica, con periodo de 7 bits.

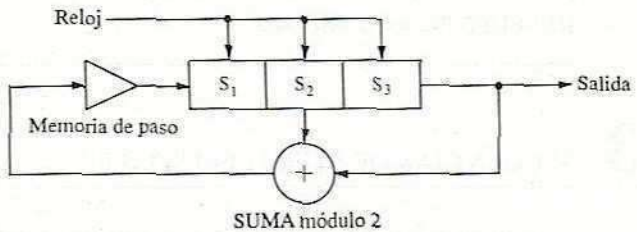


Figura 7.51 Generador de secuencia de registro de desplazamiento de tres etapas para la generación de una secuencia de ruido falso de 7 bits.†

† Con frecuencia la memoria de paso se incluye como parte de la operación SUMA módulo 2. Aquí se presenta por separado para mayor claridad.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En la anterior progresión del contenido del registro de desplazamiento ocurre toda posible combinación de 3 bits, excepto la palabra de tres ceros. Para el observador informado, dicha progresión está determinada por el número de etapas del registro de desplazamiento y la elección de las derivaciones que se aplican a la operación SUMA módulo 2. Sin embargo, para el observador no informado, la progresión (con un periodo de 7 bits) aparece como enteramente aleatoria. Por tanto, estas secuencias se llaman a veces "seudoaleatorias".

Las propiedades de correlación de la anterior secuencia de salida son de interés particular. Correlacionar esta secuencia periódica con una réplica de 7 bits proporciona el esquema de correlación mostrado en la figura 7.52(a) para el caso binario encendido-apagado (0, 1) usando la operación NOR-EXCLUSIVO para la multiplicación y el esquema de correlación mostrado en la figura 7.52(b) para el caso binario polarizado (−1, +1). En cualquier caso, el máximo está dado por la energía normalizada (siete en este caso) con desplazamiento cero. La correlación decrece a un nivel plano para todos los demás desplazamientos hasta un periodo más adelante. Como resultado de esto, la densidad espectral de potencia se aproxima a una densidad espectral blanca a medida que aumenta la longitud de la secuencia. Como estas secuencias son pseudoaleatorias con densidad espectral de potencia blanca, se llaman secuencias de ruido falso (PN, *pseudonoise*).

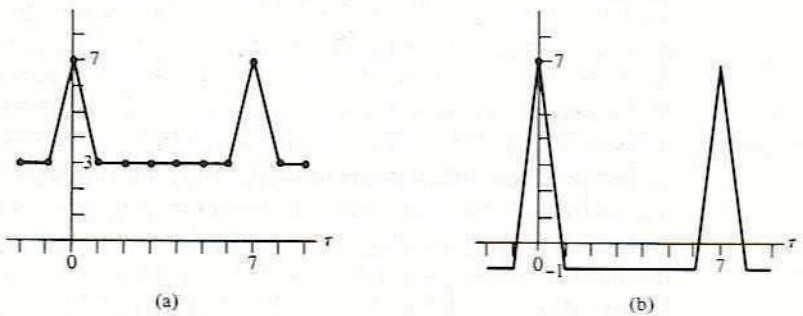


Figura 7.52 Correlación de una secuencia de ruido falso de siete bits para señal de salida (a) binaria encendido-apagado y (b) binaria polarizada.

Las secuencias PN pertenecen a una clase de códigos conocidos como de longitud máxima, las cuales, por definición, son los códigos más largos que pueden generarse con un registro de desplazamiento de longitud dada. A continuación se enumeran algunas propiedades de los códigos de longitud máxima para el caso binario.

1. La longitud de un código de máxima longitud que puede generarse con n registros de desplazamiento es $2^n - 1$.
2. Con la excepción de la palabra de sólo ceros, toda palabra de n bits existe en el registro de desplazamiento de n etapas en algún momento de la generación de un ciclo completo del código y sólo una vez durante el ciclo.
3. El número de unos en una secuencia de salida es uno mayor que el de ceros.
4. La correlación de una secuencia de código con una réplica de un periodo produce un pico igual a la longitud de la secuencia $2^n - 1$ en desplazamiento cero y en múltiplos de la longitud de la secuencia. En todos los demás desplazamientos, la correlación

http://libreria-universitaria.blogspot.com

es $2^{n-1} - 1$ para el caso binario apagado-encendido (0, 1) y -1 para el caso binario polarizado $(-1, +1)$.

No todas las combinaciones de derivaciones de un registro de desplazamiento de n etapas producirán un código de longitud máxima. En la tabla 7.4 se dan conexiones apropiadas de retroalimentación para varios valores de n. En la bibliografía existen tablas para muchas otras conexiones de retroalimentación.†

La diferencia entre el valor de correlación de un código con desplazamiento cero y el valor máximo de correlación en cualquier desplazamiento distinto de cero (hasta un periodo) se llama *índice de discriminación*. A mayor índice de discriminación, mejor se presta el código a la sincronización. Para un código de longitud máxima, el índice de discriminación es $(2^n-1) - (-1) = 2^n$ en el caso binario polarizado y $(2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1}$ en el caso binario apagado-encendido. Puede esperarse alguna degradación en presencia de ruido y los procedimientos de diseño suelen admitir un error de uno o dos bits en una palabra de código.

Tabla 7.4 Conexiones de retroalimentación para la generación de códigos de ruido falso

n	Longitud de la secuencia	Puntos de retroalimentación (para combinación con la salida)	Secuencia de salida (estado inicial: sólo unos)
2	3	S_1	110
3	7	S_2	1110010
4	15	S_3	111100010011010
5	31	S_2	11111001101001000010101111011000

Las secuencias PN son muy utilizadas en sistemas digitales de comunicación para la sincronización. A menudo, si el objetivo es la sincronización inicial, se envían varios ciclos de la palabra de código de sincronización y se requiere que el receptor identifique dos palabras sucesivas. En el procedimiento típico de búsqueda de sincronización, un bit (o grupo de bits) de la corriente de bits recibida se carga en un registro de desplazamiento del receptor y se compara con el contenido de un segundo registro en el que se encuentra la palabra de sincronización. Si no concuerdan, se repite el proceso. Si concuerdan, el receptor empieza a introducir bits adicionales y a verificar. Llevando a cabo la verificación de dos palabras sucesivas de sincronización (con un margen de error de, digamos, dos bits), el receptor confirma que se ha obtenido la sincronización inicial. En sistemas diseñados de manera conservadora, se envían hasta cinco palabras para permitir la sincronización inicial. Una palabra de código especial (que es diferente de las secuencias PN) se sitúa después de las secuencias PN y se convierte en la señal de que la transmisión de datos está a punto de empezar.

Las secuencias PN también pueden usarse para la sincronización de cuadro. En este caso, la palabra de sincronización aparece en forma periódica en la transmisión de datos. En el receptor se utiliza un PLL para seguir a esta palabra y proporcionar una sincronización precisa. El VCO del PLL es un generador de secuencias PN.

La secuencias PN se usan también en muchos otros tipos de sistemas. Debido a sus buenas propiedades de correlación, las secuencias PN hallan aplicaciones en sistemas

† Véase la referencia 8.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Tabla 7.5 Códigos de Barker

$N = 2$	++
	+−
$N = 3$	++−
$N = 4$	++−+
	+++−
$N = 5$	+++−+
$N = 7$	+++−−+−
$N = 11$	+++−−−+−−+−
$N = 13$	+++++−−++−+−+

importantes. En algunos, como el radar, la correlación de una secuencia PN aperiódica (de un disparo) es más importante que la de una secuencia periódica. Un ejemplo de secuencias binarias con buenas propiedades de correlación aperiódicas son los códigos de Barker (véase Tabla 7.5). Un código de Barker de longitud N tiene una autocorrelación aperiódica con niveles en los lóbulos laterales no mayores que $1/N$ veces el del lóbulo central. El código de Barker más extenso que se conoce es de longitud $N = 13$.[†] (Todos los códigos de Barker conocidos se listan en la tabla 7.5.) Las secuencias PN también pueden emplearse como generadores de ruido blanco discreto que prueban sistemas y mezclan las transmisiones de señales.

EJERCICIO 7.13.1

La salida de un generador de secuencias PN de seis etapas usa la representación binaria polarizada −1 V, +1 V. (a) ¿Cuál es el índice de discriminación (sin errores)? (b) ¿Cuál es el valor promedio de la secuencia?

RESPUESTA: (a) 36.1 dB; (b) 15.9 mV.

7.14 RESUMEN

En la modulación de pulso se envían valores de muestra variando un parámetro en un tren de pulsos. El teorema del muestreo marca los requisitos mínimos.

En la modulación analógica de pulso, la altura, el ancho o la posición de los pulsos varía en proporción directa a la amplitud de la señal en los instantes de muestreo. En la modulación de código de pulso, un código se cambia en etapas discretas y en proporción a la amplitud de la señal cuantificada en los instantes de muestreo.

La modulación de amplitud de pulso (PAM) se parece al muestreo convencional, aunque los extremos de los pulsos son planos. Si bien esta diferencia puede ajustarse con filtros igualadores, se reduce utilizando pulsos estrechos, lo que deja espacio para intercalar pulsos de otras señales muestreadas. El método de combinar varias señales muestreadas en una secuencia definida se llama multiplexión por división de tiempo

[†] Para lectura adicional sobre señales de radar codificador véase, por ejemplo, N. Levanon, *Radar Principles*, Nueva York, John Wiley & Sons, 1988, Cap. 8.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

(TDM). El ancho de banda mínimo para manejar una señal TDM debe cumplir los requisitos del teorema del muestreo. La PAM no ofrece ventajas en la razón señal a ruido.

La interferencia entre pulsos como resultado de un ancho de banda finito en un sistema de modulación de pulso se llama interferencia entre símbolos (ISI). Esta interferencia puede controlarse ampliando el ancho de banda y eligiendo la forma espectral de la transmisión. Una buena elección de esto último son las señales de Nyquist, que tienen ceros uniformemente espaciados en múltiplos de un intervalo de tiempo básico gobernado por el ancho de banda.

La modulación de regulación de pulso emplea una variación en la sincronización de los pulsos para conducir información. Ejemplos de esta modulación son la modulación de ancho de pulso (PWM) y la modulación de posición de pulso (PPM). Como la respuesta del borde del pulso es importante para la demodulación, se requiere un ancho de banda mucho mayor que en la PAM. Esta modulación ofrece ventajas en la razón señal a ruido, similares a las de la modulación de ángulo.

La modulación de código de pulsos (PCM) usa una serie de símbolos de código discreto para conducir información. Este tipo de modulación ofrece más versatilidad en el diseño de la señal para combatir los efectos de varios tipos de ruido. Se pueden usar diferentes tipos de códigos, dependiendo de las restricciones del sistema sobre el ancho de banda, la sincronización, etcétera.

La unidad cuántica básica para conducir información en un código binario se llama bit. La eficiencia límite del ancho de banda para un sistema binario PCM es de dos bits por segundo por Hz.

Los sistemas de comunicación por fibra óptica ofrecen anchos de banda muy amplios como resultado de las altas frecuencias de portadoras. La transmisión a través de fibras es inmune a la interferencia electromagnética y a las diferencias en potenciales eléctricos. Las pérdidas en las fibras son relativamente bajas, haciendo muy atractivos a dichos sistemas para sistemas PCM terrestres.

Una forma de aumentar la confiabilidad de la comunicación es añadir bits adicionales a expensas de mayor tiempo de transmisión o ancho de banda, para detectar y quizá corregir los errores. El uso de bits de verificación de paridad y de códigos de repetición constituye un método simple y efectivo de conseguir este objetivo.

Dos tipos básicos de transmisión de datos digitales son el síncrono y el asíncrono. En los sistemas síncronos todo el muestreo y la multiplexión están gobernados por un reloj central. Los multiplexores asíncronos se operan con un poco de mayor rapidez que la necesaria en los sistemas síncronos similares. Tanto los bits adicionales (llamados bits de relleno) como las palabras adicionales (llamadas palabras de relleno) se insertan para mantener las entradas a la tasa deseada. Los multiplexores inteligentes que pueden alterar las características del manejo de datos y el curso de éstos se llaman concentradores.

La red digital de servicios integrados (ISDN) es un intento de proporcionar servicios de comunicación digital a un amplio grupo de usuarios en Estados Unidos a través de una sola interfaz. Aunque centrada en servicios telefónicos, ofrece servicios de datos digitales a una tasa básica de 64 kbps y aprovecha las redes de conmutación de paquetes para lograr una mayor flexibilidad al combinar diferentes necesidades de tasas de datos.

La detección de la PCM requiere la identificación de determinado símbolo de código en presencia de ruido. El filtro lineal invariable en el tiempo, óptimo para cumplir esta función en presencia de ruido blanco, es el filtro acoplado. Éste es el filtro óptimo que

http://libreria-universitaria.blogspot.com

da la mayor razón señal pico a raíz cuadrática media de ruido en presencia de ruido blanco. El filtro acoplado puede obtenerse por medio de líneas de retardo con derivaciones o correlación cruzada.

Los principios de la detección de filtro acoplado pueden ampliarse a las palabras de código. Para la sincronización en la detección de filtro acoplado, son deseables palabras de código con buenas propiedades de autocorrelación. Una buena función de autocorrelación para la sincronización es aquella que es máxima en desplazamiento cero y cero (o casi cero) en cualquier otro desplazamiento. Las secuencias de ruido falso (PN) proporcionan buenas propiedades de autocorrelación periódica y son relativamente fáciles de generar utilizando registros de desplazamiento y lógica digital.

Referencias seleccionadas para lectura adicional

1. Martin, J., *Telecommunications and the Computer*, 2a. ed., Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1976.
   Descripción cualitativa de los métodos de transmisión de datos usando redes telefónicas; incluye un glosario para la definición de términos en telefonía; fácil de leer.
2. Betts, J. A., *Signal Processing, Modulation and Noise*, Nueva York, American Elsevier, 1970.
   El capítulo 6 describe algunos efectos de limitación de banda inadecuados en los métodos TDM.
3. Black, H. S., *Modulation Theory*, Princeton, N.J., D. Van Nostrand, 1953.
   Buen análisis de la teoría del muestreo y de las aplicaciones a la modulación de pulso.
4. Schwartz, M., *Information Transmission, Modulation and Noise*, 3a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1980.
   El capítulo 3 contiene un buen análisis sobre muestreo, multiplexión por división de tiempo y formación de señales para PCM; como ejemplo utiliza sistemas en operación típicos.
5. McDonald, J. C., *Fundamentals of Digital Switching*, Nueva York, Plenum Press, 1983.
   Cubre los temas de sincronización de sistemas de conmutación y redes.
6. Clark, A. P., *Principles of Digital Data Transmission*, 2a. ed., Londres, Pentech Press, 1983.
   Los capítulos 4, 7 y 10 cubren FDM, TDM, transmultiplexores, regulación de redes y métodos de sincronización para redes telefónicas.
7. Pierce, J. R. y Posner, E. C., *Introduction to Communication Science Systems*, Nueva York, Plenum Press, 1980.
   En el capítulo 7 se presenta un método interesante para filtros acoplados y correlación.
8. Dixon, R. C., *Spread Spectrum Systems*. 2a. ed., Nueva York, John Wiley & Sons, 1984.
   El capítulo 3 contiene un buen análisis sobre secuencias de longitud máxima y su generación. El resto del libro es una lectura colateral interesante.
9. Peebles, Jr., P. Z., *Communication Systems Principles*, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1976.
   El capítulo 7 constituye un análisis avanzado de muestreo y desempeño *S/N* de PWM y PPM, incluyendo efectos de umbral.

PROBLEMAS

7.1.1 Las señales dadas a continuación no son de banda limitada, por lo que cuando se muestrean se presenta un poco de alias. Debido a que las señales son pasabajas, el alias primario es resultado de aquellas componentes a frecuencias para las cuales $\omega_s/2 \leq \omega < \omega_s$, donde ω_s es la frecuencia de muestreo. Determine el mínimo valor de ω_s en términos del número de −3 dB anchos de banda, para cada una de las señales, de modo que la energía de la señal en el intervalo $\omega_s/2 \leq \omega < \omega_s$ se halle al menos 10 dB por debajo de la energía en el intervalo de frecuencias $0 \leq \omega < \omega_s/2$.

a) $f(t) = e^{-at}u(t)$.

b) $f(t) = te^{-at}u(t)$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

7.1.2 Cierta señal $f(t)$ está limitada en banda a f_m Hz. Un sistema dado muestrea esta señal a la tasa de Nyquist. Cada pulso fuera del muestreador es de la forma $a_k \exp[-(t - t_k)/(RC)]u(t - t_k)$, donde k designa a la muestra.

a) Haga dibujos similares a los de la figura 7.3(c-f) para este caso.

b) ¿Puede usted crear un filtro de igualación capaz de proporcionar muestras que se acoplen a las de un muestreador de impulso? Explique.

c) ¿Puede usted crear un filtro de igualación que proporcione PAM a partir de esta señal muestreada? Explique.

7.1.3 La señal $f(t) = [W/(2\pi)]\text{Sa}^2(Wt/2)$ se transmite a través de un sistema lineal invariable en el tiempo con función de transferencia en frecuencia $H(\omega) = F(\omega)$. La salida $g(t)$ se muestrea con un muestreador de impulso (es decir, una secuencia de impulsos espaciados de manera uniforme) a la tasa de Nyquist.

a) Dibuje la densidad espectral de la señal muestreada.

b) La señal muestreada de la parte (a) se aplica a un filtro pasabajas $H_1(\omega)$ con salida $x(t)$. Determine y dibuje $H_1(\omega)$ para una transmisión sin distorsión de $f(t)$.

7.1.4 A veces se utiliza un probador de muestreo para la observación de señales periódicas de alta frecuencia en un osciloscopio cuyo ancho de banda es insuficiente para observación directa. La prueba consiste en un prefiltro pasabanda con ancho de banda B_p, un muestreador de alta velocidad que opera a una tasa f_s, seguido por un filtro pasabajas con ancho de banda B_x. La señal periódica de baja frecuencia resultante se exhibe en el osciloscopio.

a) Suponga que la señal de alta frecuencia es una senoidal a $f = f_0$. Usando el dominio de la frecuencia y suponiendo un muestreador de impulso, determine el mínimo y el máximo ancho de banda del filtro pasabajas si la prueba de muestreo opera a $f_s = (1 - \alpha)f_0$, $\alpha > 1$. Además, dibuje a escala la señal exhibida resultante.

b) Repita la parte (a) para el caso en el que son necesarios n armónicos para una buena representación de la señal periódica de alta frecuencia.

c) ¿Cuál es el propósito del prefiltro pasabanda? ¿Cuáles son las restricciones en el ancho de banda B_p?

✓ **7.1.5** Calcule los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier para la señal periódica

$$x(t) = \begin{cases} \text{sen } \omega_0 t & 0 \le t < T/4 \\ 0 & T/4 \le t < T \end{cases}.$$

Muestree $x(t)$ en incrementos de 10° sobre un periodo.

a) Tabule el valor de los coeficientes para los primeros 40 términos armónicos ($0 \le n \le 40$).

b) Calcule y grafique la magnitud de los coeficientes de la serie de Fourier exponencial para los primeros 40 términos armónicos ($0 \le n \le 40$).

c) Usando integración, los coeficientes de la serie de Fourier trigonométrica para $x(t)$ son

$$a_0 = 1/(2\pi);\ a_1 = 1/(2\pi);\ b_1 = 1/4;$$

$$a_n = [n \text{ sen } (n\pi/2) - 1]/[\pi(n^2 - 1)] \text{ para } n > 1;$$

$$b_n = [-n \cos (n\pi/2)]/[\pi(n^2 - 1] \text{ para } n > 1.$$

Usando estos resultados, grafique la magnitud de los coeficientes de la serie de Fourier exponencial para los primeros 40 términos armónicos ($0 \le n \le 40$).

d) ¿Muestran sus resultados algunas condiciones de simetría esperadas? Explique.

e) ¿Podría describir el proceso de muestreo equivalente en este caso como un muestreador de impulso? Explique.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

7.2.1 El circuito de retención de primer orden mostrado en la figura P-7.2.1 es una alternativa al circuito de muestra y retención para recuperar señales PAM. La entrada $f_s(t)$ es una versión muestreada de $f(t)$ y el retardo es igual al periodo de muestreo T.

a) A diferencia del circuito de muestra y retención, éste es un sistema lineal invariable en el tiempo; determine su respuesta al impulso y su función de transferencia en frecuencia.

b) Compare la magnitud de la función de transferencia en frecuencia con la de un filtro pasabajas ideal.

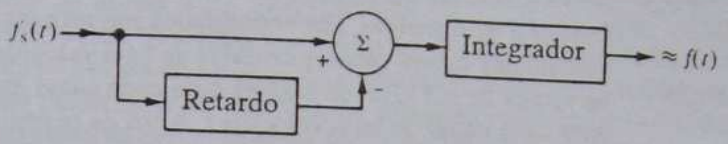


Figura P–7.2.1.

7.2.2 Suponga que el retardo unitario simple de la figura P-7.2.1 se reemplazara con uno que tuviera respuesta al impulso $h(t) = 2\delta(t - T) - \delta(t - 2T)$; es decir, una unidad que tiene dos trayectorias paralelas para la señal, una con un amplificador ×2 y retardo T y la otra con doble retardo. Además, el integrador se cambia a un doble integrador.

a) Dibuje el diagrama de bloques de este nuevo sistema.

b) Determine la respuesta al impulso y la función de transferencia en frecuencia del sistema.

c) Compare la magnitud de la función de transferencia en frecuencia con la de un filtro pasabajas ideal.

7.2.3 Veinticuatro señales de entrada de audio, cada una limitada a 3.3 kHz, se van a multiplexar y a transmitir usando TDM o FDM. Los sistemas de multiplexión en frecuencia permiten un 20% del ancho de banda mínimo como banda de guardia, y los sistemas de multiplexión en el tiempo muestrean a un 20% sobre la tasa de Nyquist. Determine el ancho de banda mínimo necesario para cada método si la multiplexión y la modulación utilizadas son a) FDM, SSB-SC; b) FDM, DSB-SC; c) TDM, PAM; d) PAM/AM; e) PAM/PM, $\beta = 9$.

7.2.4 En la figura P-7.2.4 se muestra cierto sistema PAM de tres canales; $f_1(t)$ está limitada en banda a 7 kHz y $f_2(t), f_3(t)$ están limitadas cada una a 3 kHz.

a) Determine los valores mínimo y máximo de la tasa del reloj conmutador tal que las tres señales se puedan reconstruir en un receptor sin distorsión en condiciones ideales.

b) Dibuje el diagrama de bloques del receptor para este sistema.

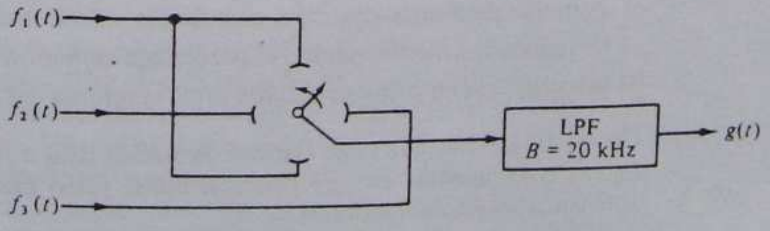


Figura P–7.2.4.

7.3.1 Veinticuatro señales de entrada pasabajas de igual ancho de banda están multiplexadas en tiempo en un solo canal usando PAM, con una restricción de ancho de banda máximo de 150 kHz. Determine el máximo ancho de banda de las señales de entrada si el filtro de salida antes de la transmisión es un filtro coseno elevado con a) $\alpha = 0$; b) $\alpha = 0.50$; c) $\alpha = 1$. d) ¿Existe alguna ventaja en utilizar filtros coseno elevado también en la entrada? Explique.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

7.3.2 Dos impulsos unitarios se aplican a la entrada de un filtro pasabajas ideal con ancho de banda B. Dichos impulsos se encuentran espaciados de tal forma que los primeros cruces por cero en las señales de salida de tipo (sen x/x) coinciden.

a) Determine la diferencia de tiempo entre impulsos (en términos de B).

b) Determine la magnitud del mayor lóbulo lateral (exprese su respuesta en dB, referidos a la unidad).

c) Repita las partes (a), (b) para los mismos espaciamientos de pulso si se utilizara el filtro coseno elevado ($\alpha = 1$) cuyo ancho de banda a −6 dB es igual a B.

7.3.3 Se va a diseñar un sistema de comunicación PAM/AM para transmisión de voz y datos desde un sitio remoto. Las necesidades son un canal de voz, dos canales de datos de media velocidad y cuatro canales de datos de baja velocidad. El ancho de banda asignado al canal de voz es de 3.3 kHz, de 800 Hz para cada canal de datos de velocidad media y de 400 Hz para cada canal de baja velocidad. A fin de permitir un filtrado pasabajas adecuado en el receptor, todos los canales se sobremuestrean un 20%. Se piensa en un filtro coseno elevado ($\alpha = 0.5$) para el filtro que sigue al multiplexor. Se deben realizar esfuerzos para conservar el ancho de banda dentro de las restricciones anteriores. Los siguientes dos puntos son necesarios en un estudio del diseño preliminar:

a) Un diagrama de tiempos para el multiplexor; y

b) una gráfica de la magnitud, en decibeles, contra la frecuencia para la transmisión PAM/AM a una frecuencia portadora f_c.

7.3.4 Las funciones de transferencia en frecuencia para tres filtros se muestran en seguida para un intervalo de frecuencia positiva. Suponga que estas funciones de transferencia son pares en frecuencia e iguales a cero para $\omega > (1 + \alpha)W$. Determine si satisfacen el criterio de las señales de Nyquist, excepto por una constante, y encuentre la respuesta al impulso correspondiente a cada una.

a) $H_1(\omega) = 1 - u[\omega - (1 - \alpha)W][\omega - (1 - \alpha)W]/(2\alpha W)$

b) $H_2(\omega) = 1 - (\frac{1}{3})u[\omega - (1 - \alpha)W] - (\frac{1}{3})u[\omega - W] - (\frac{1}{3})u[\omega - (1 + \alpha)W]$

c) $H_3(\omega) = \begin{cases} 1 - 2[\omega/(2W)]^2 & \omega \le W \\ 2[(\omega - 2W)/(2W)]^2 & W < \omega \le 2W \end{cases}$

7.3.5 Varios canales se multiplexan en tiempo usando PAM. Cada pulso es de 5τ segundos de duración; desprecie cualquier tiempo de guardia entre canales. El tren de pulsos TDM resultante se pasa a través de un filtro pasabajas RC con $RC = \tau$. Suponga que en el receptor la señal se sensa con ancho de pulso de 5τ y luego se demultiplexa. Se define un criterio de "porcentaje de diafonía" como la energía de la señal de un segmento de tiempo adyacente que se "derrama" en el segmento deseado, dividida entre la energía de la señal deseada (en el segmento de tiempo correcto) cuando los pulsos son de igual magnitud.

a) Usando este criterio, calcule el porcentaje de diafonía.

b) Investigue si un pequeño retardo en la sincronía del receptor mejora esta situación.

7.4.1 Una señal PWM dada tiene flancos de subida fijos a los tiempos $t = mT$. Dibuje señales típicas para mostrar en qué condiciones el filtro pasabajas RC reconstruirá en forma aproximada la señal modulante.

7.4.2 El hecho de que las transiciones de pulso sean todas positivas a los tiempos del problema 7.4.1 es una clave de que el tren de pulsos es "autosincronizable"; es decir, existe una línea espectral de la cual un PLL puede extraer la frecuencia del reloj. Para ver esto, dibuje una señal PWM, derívela una vez y separe el resultado en la suma de dos funciones, una con transiciones positivas y otra con negativas.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

a) Determine la densidad espectral de la función que contiene las transiciones positivas (el análisis de la función que contiene las transiciones negativas es más complicado y no se intenta aquí).

b) ¿Se trata de una señal PPM "autosincronizable"? Explique.

7.4.3 Un posible sistema de recepción para sistemas de regulación de pulsos, en el que se sabe que existe un valor promedio cero en la señal modulante, se propone como sigue. Se determinan los puntos de sincronía y se generan pulsos positivos muy angostos en los puntos medios de cada periodo ($T/2$). Se detectan los flancos de bajada de las señales de entrada de pulsos regulados y éstos generan pulsos angostos negativos. El tren de pulsos resultante se aplica a un generador de pulsos de amplitud constante con la siguiente operación lógica. Si el primer pulso en llegar al generador dentro de un periodo es positivo, entonces se genera un nivel positivo hasta que llega un pulso negativo para terminarlo. Si el primer pulso en llegar es negativo, entonces se genera un nivel negativo hasta que llega un pulso positivo que lo termine. Entonces las señales resultantes se suavizan con un filtro pasabajas.

a) ¿Trabaja bien este sistema para PPM? Explique.

b) ¿Trabaja bien este sistema para PWM? Explique.

7.4.4 Un sistema PPM dado de un solo canal tiene las siguientes especificaciones:

Señal de entrada:	$\lvert f(t)\rvert < 10$ V
Precisión deseada:	± 0.1 V para $[S/N]_{pk} = 10$ dB
Tasa promedio de pulsos	8 kHz
Ancho de pulso:	5 μs

a) Estime el ancho de banda mínimo necesario para transmitir en presencia de ruido utilizando un tiempo de guardia igual al ancho de pulso.

b) Sea la precisión deseada Δa. Grafique B contra Δa para $[S/N]_{pk} = 10, 20, 30$ dB.

7.4.5 Dos canales de un sistema PWM que tienen anchos de banda iguales (f_m) se multiplexan en tiempo. El ancho de cada pulso, w, está dado a los tiempos de muestra t_i por

$$w(t_i) = [5 + 0.5f(t_i)]\ \mu s,$$

donde $f(t)$ se restringe a valores positivos y se mide en milivolts. La precisión deseada del sistema es de ± 0.5 mV y el tiempo de guardia entre canales se fija a 5 μs.

a) ¿Cuál es el ancho de banda mínimo necesario para la transmisión?

b) Grafique el intervalo de amplitud de entrada en función del ancho de banda de entrada f_m para este sistema.

7.4.6 Veinticuatro señales de entrada de audio (cada una con un ancho de banda de 0–3.3 kHz) se muestrean y multiplexan en tiempo usando PPM. La salida se filtra al ancho de banda mínimo. Las especificaciones del diseño preliminar son las siguientes. Las entradas se van a sobremuestrear un 20%, la relación $[S/N]_{pk}$ estimada es de 10 dB, la precisión absoluta es de 5% y el ancho de pulso y el tiempo de guardia por canal en la salida TDM son tres veces mayores que el tiempo de elevación del pulso. Utilice una aproximación trapezoidal para el pulso, como se muestra en la figura 7.19, para hacer estimaciones de diseño preliminares del sistema, incluyendo

a) el ancho de banda necesario para el filtro de salida;

b) las asignaciones de ancho de pulso y tiempo de guardia.

7.5.1 Sea una senoidal la entrada a un sistema PPM, $a \cos(2\pi f_m t)$, donde se supone que a y f_m son los valores máximos permitidos por el sistema. Sea τ_p el ancho del pulso y τ_g el tiempo de guardia. Desarrolle una ecuación a fin de reemplazar la ecuación (7.30) para estas condiciones; exprese su respuesta en términos de (B/f_m), $(f_m\tau_p)$ y $(f_m\tau_g)$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

7.5.2 Una senoidal de 3 kHz con amplitud pico de 2 V se muestrea a una tasa de 8 kHz y se transmite usando PPM. El ancho del pulso τ_p y el tiempo de guardia τ_g se restringen a S/8. El factor de mejora deseado para la S/N es de 30 dB.

a) Determine el mínimo ancho de banda de la transmisión requerido dentro de las restricciones anteriores.

b) Para obtener esa mejora en S/N, ¿cuánto ancho de banda se requiere?

7.5.3 Un sistema PPM de un solo canal se opera a una tasa de muestreo de 25 kHz con modulación senoidal a la máxima amplitud pico a pico. En el receptor, los pulsos de la señal tienen una amplitud pico de 1 V. El ancho de los pulsos a media amplitud es de 4 μs, y los tiempos de elevación y descenso son de 0.5 μs cada uno (suponga que los tiempos de elevación y descenso son segmentos lineales para constituir una forma de pulso trapezoidal). La desviación rms del flanco del pulso, como resultado del ruido aditivo, es de 0.05 μs. El tiempo de guardia permitido es de 4 μs.

a) ¿Cuál es el ancho de banda mínimo necesario para la transmisión?

b) Encuentre las razones pico y promedio de entrada de señal a ruido.

c) Determine el factor de mejora en señal a ruido del sistema.

7.6.1 Demuestre que la magnitud de la representación en código RB es autosincronizable (véase Prob. 7.4.2).

7.6.2 a) Demuestre que se necesitan $2^m - 1$ comparadores para un codificador paralelo de m bits.

b) Un codificador paralelo de $(m/2)$ bits alimenta un convertidor D/A (DAC). La salida del DAC se resta de la tensión de entrada, y la diferencia es convertida por un segundo codificador paralelo de $(m/2)$ bits. Demuestre que este arreglo puede ser un sustituto válido para el codificador paralelo de m bits de la parte (a). Compare los dos métodos.

7.6.3 En la figura P-7.6.3 se muestra un convertidor D/A de 4 bits (que podría utilizarse en la figura 7.28).

a) Explique la operación del circuito.

b) Una dificultad en la precisión de este convertidor D/A es la precisión en los valores de los resistores. Suponga que la resistencia de retroalimentación R se toma como referencia, y sean las resistencias de conmutación $(R + \Delta R_1)$, $(R + \Delta R_2)$, etcétera.

Determine el valor rms sobre todos los errores de medición. Suponga que todos los códigos son igualmente probables y que las ΔR no están correlacionadas.

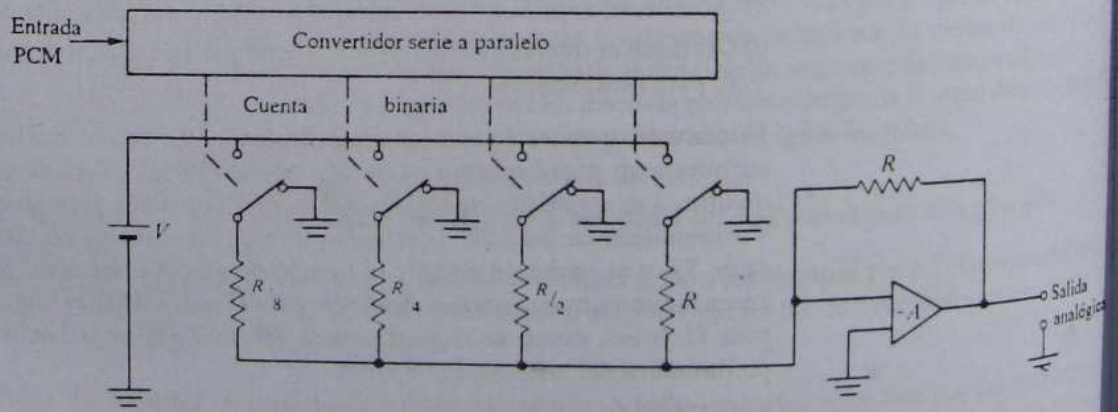


Figura P-7.6.3.

7.6.4 Considere la secuencia binaria 1011000101. Usando líneas verticales y horizontales como guías, dibuje las señales binarias para las siguientes representaciones en código (empiece en el estado bajo para aquellas representaciones que dependen de un estado anterior).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

a) Fase dividida (Manchester)
b) RZ
c) NRZ (M)
d) Retardo de modulación (Miller)

7.6.5 En este problema, se supone la representación en código con retorno a cero (RZ) pero se investiga la utilización de más de dos niveles. Suponga que se desea enviar una secuencia de entrada binaria a una tasa de reloj de 64 kbps.

a) Determine el ancho de banda mínimo necesario para transmitir utilizando RZ de dos niveles.

b) En vez de enviar el tren de pulsos de la parte (a), se genera un pulso que tiene cuatro niveles posibles para cada grupo de dos pulsos sucesivos en la secuencia de entrada (se mantiene la representación RZ y se permite el nivel cero como una de las cuatro opciones). Determine el ancho de banda mínimo necesario.

c) Repita la parte (b), pero suponiendo que se combinan tres dígitos de entrada sucesivos en un pulso con ocho amplitudes posibles.

7.6.6 Suponga que el máximo ancho de banda útil (basado en principio en la distorsión de fase) de un canal telefónico es de 2400 Hz, y que se usa PCM/AM. Suponga también que se utiliza la forma espectral coseno elevado con $\alpha = 0.5$.

a) Determine la máxima tasa de bits utilizando transmisión de dos niveles.

b) Repita la parte (a), pero suponga que dos dígitos de entrada consecutivos se combinan en pulsos de salida que tienen cuatro niveles posibles en la transmisión.

c) Repita la parte (a), pero suponga que tres dígitos de entrada consecutivos se combinan en pulsos de salida que tienen ocho niveles posibles en la transmisión.

d) ¿Qué nos impide seguir con esta progresión?

7.6.7 Veinticuatro señales de entrada, cada una limitada en banda a 3.3 kHz, se muestrean a una tasa de 8 kHz y se multiplexan en tiempo. Calcule el ancho de banda mínimo necesario para la transmisión utilizando

a) PCM de cinco bits

b) PCM de siete bits

c) Repita las partes (a) y (b), pero suponga que se usa AMI.

7.6.8 Los datos se pueden codificar en discos magnéticos (flexibles) usando los siguientes métodos. En el método de frecuencia modulada (FM), cada pulso en estado alto existe durante un cuarto del intervalo del reloj. Un uno se representa con dos ciclos de un patrón de estados alternados alto/bajo. Un cero se representa con un estado alto durante un cuarto del intervalo de reloj y un estado bajo durante los restantes tres cuartos. En el segundo método, llamado frecuencia modulada modificada (MFM), los pulsos en estado alto constituyen la mitad del intervalo de reloj, y se utiliza la siguiente regla de codificación. Un uno se representa con un estado bajo seguido de uno alto. Un cero se representa con uno de dos patrones: un estado alto seguido de uno bajo si no existía un estado alto al final del intervalo previo, o dos estados bajos consecutivos si había un estado alto al final del intervalo anterior. Por tanto, el método MFM garantiza al menos un estado bajo entre dos estados altos.

a) Siguiendo las direcciones del problema 7.6.4, dibuje las representaciones FM y MFM de la secuencia binaria dada en el problema 7.6.4.

b) Estime la eficiencia del ancho de banda de cada método (suponga una mezcla igual de unos y ceros, y suponga también que en MFM la mitad de los ceros se representa con cada una de las dos representaciones posibles.)

c) ¿Por qué supone que el primer método se llama "FM"? ¿Es autosincronizable? Explique.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

7.6.9 Una serie de representaciones bipolares de alta densidad, conocidas como HDB1, HDB2, HDB3, ..., pueden utilizarse para eliminar las largas sucesiones de pulsos de amplitud cero que se presentan en BRZ. Las representaciones HDBn evitan la ocurrencia de más de n pulsos sucesivos de amplitud cero. Ellos utilizan las reglas AMI pero sustituyen secuencias especiales para cada sucesión de $(n + 1)$ ceros, y utilizan también violaciones a las reglas AMI para proporcionar la información extra necesaria a fin de reemplazar los ceros. El más importante de los códigos HDB es el HDB3.

Si la cadena 0000 ocurre en HDB3, se envía cualquiera de las secuencias especiales 000D o 100D. La "D" se reemplaza con un nivel +1 o −1 de tal forma que se viole la regla AMI en ese punto. La elección de 000D o 100D es tal que los pulsos que violan la regla AMI toman los valores +1 y −1 de manera alterna.

Escriba el tren de pulsos HDB3 para la siguiente entrada: 100001100000000, suponiendo que 000D es la primera secuencia especial. Luego escriba el tren de pulsos HDB3 suponiendo que 100D es la primera secuencia especial.

7.8.1 Considere la utilización de las palabras de código listadas en el ejercicio 7.8.1. Si sólo se pueden utilizar estas palabras:

a) ¿Cuántos bits de datos se pueden ubicar por palabra de código?

b) ¿Cuántos errores se pueden detectar?

c) ¿Cuántos errores se pueden corregir?

d) ¿Cuántas palabras de código posibles en el conjunto no están disponibles en las partes (a–c)?

7.8.2 a) ¿Es posible provocar un error de intercambio de dígitos que no se detecte en el ejercicio 7.8.2? Explique.

b) ¿Funcionará bien la regla de triplicar dígitos alternos también en este esquema? Explique.

★ **7.9.1** Diseñe un multiplexor M13 por intercalación de bits (véase Tabla 7.1) que tenga el mismo formato de cuadro que el de la figura 7.43, excepto que sólo se toman dos bits por canal de entrada antes de añadir un bit de control. Al diseñar este multiplexor, calcule las cuatro cantidades requeridas en el ejemplo 7.9.1.

★ **7.9.2** Diseñe un multiplexor M12 por intercalación de bits (véase Tabla 7.1) que tenga el mismo formato de cuadro que el multiplexor del ejemplo 7.9.1, con la excepción de la palabra de marca añadida de siete bits 1110010. En este diseño, calcule las cuatro cantidades requeridas en el ejemplo 7.9.1. Compare sus resultados con los de la sección 7.9.1.

★ **7.9.3** Cierto multiplexor por división de tiempo e intercalación de caracteres con relleno de palabra utiliza una palabra de sólo ceros como relleno. En el multiplexor, la palabra de entrada de m bits de datos $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ se codifica en una palabra de salida de $(m + 1)$ bits $\mathbf{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_m, b_{m+1})$ de acuerdo con el siguiente algoritmo:[†]

$$b_{m+1} = 0 \quad \text{si } w(\mathbf{A}) \geq \left[\frac{m}{2}\right] + 1$$

$$b_{m+1} = 1 \quad \text{si } w(\mathbf{A}) \leq \left[\frac{m}{2}\right]$$

$$b_i = b_{m+1} \oplus a_i, \qquad 1 \leq i \leq m,$$

[†] M. M. Buchner, Jr., "An Asymmetric Encoding Scheme for Word Stuffing", *Bell System Technical Journal*, marzo de 1970, págs. 379-398; véase también J. J. Spilker, Jr., *Digital Communications by Satellite*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1977, págs. 124-128.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

donde $w(\cdot)$ es la distancia de Hamming medida desde la palabra de sólo ceros, la notación $[m/2]$ representa el mayor entero $\leq m/2$, y $\oplus$ indica la suma módulo 2. En el demultiplexor el orden de los bits se invierte, por lo que b'_{m+1} se detecta primero y el algoritmo de decodificación es

$$a'_i = b'_{m+1} \oplus b'_i, \qquad 1 \leq i \leq m,$$

donde las primas indican los bits en el demultiplexor.

Para este multiplexor, usando m = palabras de entrada de ocho bits de datos:

a) Haga una tabla de varias palabras de datos arbitrarias y sus versiones codificadas.

b) Estime la mínima distancia de las palabras de salida a partir de la palabra de relleno de sólo ceros.

7.11.1 Si $f(t)$ está en volts, $H(\omega)$ es adimensional y $S_n(\omega)$ está en watts por Hz a través de un ohm, ¿cuáles son las dimensiones de la constante k en el filtro acoplado?

7.11.2 Sea $f(t) = \sqrt{S}\exp[-t^2/(2\sigma_s^2)]$ y sea $S_n(\omega) = N_0 \exp(-\sigma_n^2\omega^2)$, donde S está en watts y N_0 en watts por Hz. La razón del ancho de banda de la señal al ancho de banda del ruido es σ_n/σ_s. Determine el máximo valor de $|f_o(t_m)|^2/\overline{n_o^2(t)}$ en función de la razón del ancho de banda de la señal al ancho de banda del ruido.

7.11.3 Un filtro físicamente realizable se acopla a una señal aproximada por la forma mostrada en la figura P-7.11.3.

a) Determine y grafique la respuesta al impulso del filtro acoplado para retardo mínimo.

b) Determine y grafique la salida del filtro acoplado, en función del tiempo, para el caso de retardo mínimo.

c) Dibuje la respuesta al impulso del filtro acoplado para un tiempo de retardo arbitrario.

d) Dibuje la salida del filtro acoplado para el retardo elegido en la parte (c).

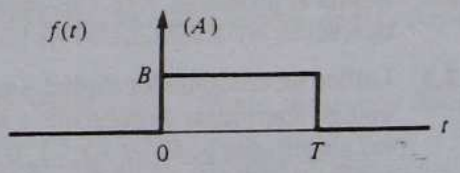


Figura P–7.11.3.

7.11.4 En la figura P-7.11.4 se muestra una señal de pulso dada $f(t)$.

a) Determine la función de transferencia en frecuencia del filtro acoplado para $f(t)$.

b) Desarrolle una relación para una máxima razón de señal pico a ruido rms en la salida de este filtro si el ruido de entrada es blanco con una densidad espectral de potencia (bilateral) $\eta/2$ watts/Hz a través de un ohm.

c) Repita la parte (b) si el ruido de entrada no es blanco, pero se sabe que la potencia del ruido de salida es N_o si $S_n(\omega)$ se aplica a la entrada del filtro cuya función de transferencia en frecuencia se determinó en la parte (a).

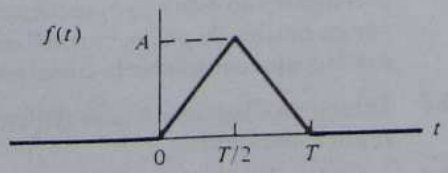


Figura P–7.11.4.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

7.11.5 Sea una señal recibida $f(t) = e^{-at}$ en $(0, T)$, cero en cualquier otro lugar, en presencia de ruido blanco aditivo.

a) Determine la respuesta del filtro acoplado en función del tiempo.

b) Encuentre la respuesta en el tiempo de la salida si se aplica $f(t)$ más ruido blanco aditivo a un filtro cuya respuesta al impulso es $h(t) = A$ en $(0, T)$, cero en cualquier otro lugar. Compare su respuesta con la de la parte (a); normalice sus respuestas de manera que las salidas de ruido rms de los dos filtros sean iguales.

7.11.6 a) Determine y grafique la respuesta en el tiempo de un filtro acoplado físicamente realizable de mínimo retardo a la señal $f(t) = \mathcal{R}e\{Ae^{j\omega_c t}\}$ en $(0, T)$, cero en cualquier otro lugar.

b) Determine el valor máximo de $|f_o(t_m)|^2/\overline{n_o^2(t)}$ if $S_n(\omega) = \eta/2$.

7.12.1 Las palabras de código para sincronización se pueden enviar con eficiencia modulando la fase de una senoidal por 0 y π radianes y bloqueando la senoidal al dejar de modular (es decir, al final de la palabra de código). La multiplicación de esta señal senoidal modulada por una senoidal de la misma frecuencia y fase codificada en el receptor proporciona una salida de tres niveles en cada intervalo de bit: 0, +1 o −1. Sumando los resultados de esta multiplicación en cada intervalo de bit sobre el número de bits en la palabra de código almacenada, se obtiene la correlación de la palabra de código en la entrada con la palabra de código almacenada. Considere las siguientes dos palabras: ++−+ y +++−. Dibuje la salida de un correlacionador de cuatro bits que se fija para cada una de estas palabras en las siguientes condiciones:

a) La palabra de código es aperiódica (suponiendo sólo ceros en cualquier otro caso); el correlacionador está fijo para el mismo código que se envía (examine ambos casos).

b) La palabra de código se repite en forma continua (las demás condiciones como antes).

c) Repita las partes (a) y (b) si la referencia del correlacionador se fija de manera accidental para otra palabra de código.

7.12.2 Repita el problema 7.12.1 usando 0 para reemplazar al signo (−), 1 para el signo (+) y una operación NOR EXCLUSIVA para reemplazar la multiplicación en el correlacionador.

✓ **7.12.3** Utilice un computador digital y un monitor gráfico para calcular y mostrar una palabra de código aperiódica de ocho bits y su función de autocorrelación usando 128 puntos. Permita las amplitudes posibles +1, −1, 0 en cada intervalo de bit. Exhiba e imprima las señales de entrada y salida para cada una de las siguientes palabras de código:

a) + + + − − + −

b) + + + − − + + −

c) + + + − − − + −

d) ¿Cuál de las anteriores prefiere? Explique.

e) ¿Puede manejar su programa el caso en el que la palabra de código en la entrada es periódica? Explique

7.12.4 Se sugiere que una forma de realizar la correlación de dos secuencias de pulsos con amplitudes ±1 es reemplazar cada pulso con una función impulso de área ±1, y llevar a cabo la correlación en varios desplazamientos para obtener los pesos de una nueva secuencia de funciones de impulsos. Se argumenta que la función de autocorrelación es la correlación de esta nueva secuencia de funciones de impulso con la autocorrelación de un par de señales de pulso, normalizadas al pico de una. ¿Funcionará esto? Explique. (Tal vez sea útil aquí considerar la correlación como una convolución sin la inversión de una señal.)

7.12.5 Dibuje un diagrama lógico del correlacionador para una palabra de código binaria y una réplica almacenada.

7.13.1 a) ¿Por qué no se puede permitir la condición de sólo ceros en los registros de desplazamiento de un generador de código de longitud máxima?

http://libreria-universitaria.blogspot.com

b) Demuestre el efecto de un número impar de derivaciones (incluyendo la última etapa) en un generador de secuencia de registro de desplazamiento (comience por examinar el caso de cuatro etapas).

7.13.2 Considere una secuencia de código generada por la retroalimentación de la primera y la tercera etapas de un registro de desplazamiento de tres etapas.

a) Suponiendo un estado inicial de 1 1 1, encuentre todos los posibles estados del registro de desplazamiento en orden de ocurrencia.

b) Determine y grafique la correlación de una secuencia periódica PN de salida con la réplica almacenada de un periodo. Utilice representación bipolar.

c) Determine y grafique la correlación de una secuencia aperiódica PN de salida con la réplica almacenada de un periodo. Utilice representación bipolar.

d) Compare sus resultados con los listados en la tabla 7.4 para la elección de retroalimentación de la segunda y la tercera etapas.

7.13.3 a) ¿Cuál es la longitud de un código de longitud máxima originado por un generador de secuencia de registro de desplazamiento de 15 etapas?

b) Exprese el índice de discriminación del código PN anterior, en dB.

c) Repita las partes (a) y (b) para un generador de secuencia de registro de desplazamiento de 16 etapas.

d) Estime el índice de discriminación en el peor caso en la correlación de una secuencia periódica PN con réplica de un periodo almacenado si se presenta un error de un bit en la secuencia de entrada. Suponga la utilización de representación bipolar.

7.13.4 Cierto sistema de recepción utiliza una secuencia periódica de código PN para una sincronización precisa ante ruido aditivo. El tiempo de sincronización en este sistema se determina por la detección del pulso de correlación cerca del desplazamiento cero con un umbral preestablecido (p. ej., a media amplitud). Determine el número mínimo de registros de desplazamiento, n, necesarios si la sincronización se debe mantener dentro de $\pm 1\%$ de un intervalo de bit en presencia de ruido aditivo de ± 1. Suponga la utilización de representación bipolar.

7.13.5 Los códigos de Barker (véase Tabla 7.5) son secuencias de código binario bipolar de longitud N que están diseñados para picos de autocorrelación N y máximos niveles de lóbulos laterales (a desplazamientos distintos de cero) no mayores que 1.

a) Dibuje la autocorrelación de cada uno de los dos códigos de Barker $N = 4$ de la tabla 7.5. Suponga "0" más allá de la longitud de la secuencia de código y defina que la multiplicación por cero sea cero.

b) Repita la parte (a), con la excepción de que la secuencia de código de entrada consiste en dos repeticiones (es decir, longitud $2N$) de la secuencia de código de Barker en la palabra de código aunque el receptor se mantiene acoplado a uno (longitud N).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

PROBLEMAS DE DISEÑO

Problema de diseño

7.1 Sistema de telemetría para control de modelos

Se diseñará un pequeño sistema de telemetría PPM/AM de corto alcance, y baja potencia para el control remoto de modelos. El sistema debe tener 8 canales y cumplir con el requisito de ±5% de precisión para una *S/N* pico de 20 dB en la salida de un detector de envolvente (permita un margen de 5 dB para el filtrado de detección y posdetección. El ancho de banda se reduce a *B* Hz después de la detección de envolvente). La máxima respuesta en frecuencia por canal es de 20 Hz y el sistema se sobremuestreará un 25%. Los requisitos para el ancho de pulso mínimo y el tiempo de guardia son de $5/B$ cada uno. La sección de RF del receptor tiene un ancho de banda de ruido de 1 MHz y la temperatura total de ruido (incluyendo el de la antena) se estima en 10^5 K. Suponga que la pérdida total de propagación (incluyendo trayectoria y antenas) es de 90 dB. Haga un diseño preliminar del sistema, incluyendo: a) el ancho de banda mínimo *B* del filtro después del detector de envolvente, b) diagramas de tiempo y c) una estimación de las necesidades mínimas de potencia pico en el transmisor para alcanzar estos objetivos. Especifique cualquier suposición que haga. d) Si las pérdidas anteriores fueran para una distancia de una milla, estime el alcance de su sistema para una potencia pico del transmisor de 1 W (suponga que las pérdidas de trayectoria, en decibeles, aumentan como la función 20 log *d*, donde *d* está en millas).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

CAPÍTULO

8 Probabilidad y variables aleatorias

Se dice que las señales cuyos valores pueden especificarse de manera exacta son "deterministas". Las señales deterministas no siempre pueden expresarse en forma explícita, pero sí es posible expresarlas, dentro de ciertos límites más bien amplios, en términos de sumatorias de funciones conocidas de manera explícita (p. ej., las series de Fourier). El uso de estas señales ha desempeñado, hasta aquí, un importante papel en nuestro análisis de los sistemas de comunicación. Ahora veremos métodos para describir señales no deterministas o "aleatorias". Para hacerlo, se expondrán algunos conceptos básicos de la teoría de la probabilidad.

El enfoque sobre la probabilidad será selectivo. Dado que sólo interesan algunas aplicaciones específicas a los sistemas de comunicación, se cubren únicamente ciertos aspectos de la probabilidad. Para un estudio más completo del tema, se recomienda al lector consultar las referencias.

8.1 PROBABILIDAD

En el análisis de señales es común usar los conceptos de energía y potencia de la señal para medirla. En coordenadas especiales, es común emplear la distancia y la longitud al cuadrado. De manera un tanto similar, el concepto de probabilidad se usa para medir (en forma numérica) los resultados favorables de determinado experimento. Para que la medida sea válida, es necesario examinar antes las bases de la medición.

Supóngase que se efectúa un experimento cuyo resultado no es constante. Uno de los posibles resultados se marca como A. Lanzar una moneda es un experimento cuyos posibles resultados son caras o cruces. Si el experimento se repite N veces, supóngase que el resultado A ocurrirá N_A veces. La *frecuencia de ocurrencia relativa* de A es N_A/N. Esta razón no es muy predecible cuando N es pequeño. Sin embargo, si el experimento tiene regularidad estadística, la frecuencia relativa de un resultado particular puede tender a un límite cuando el número de repeticiones N se hace muy grande. Este valor límite se llama *probabilidad* del resultado A y se escribe $P(A)$:

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}. \tag{8.1}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

El límite en la ecuación (8.1) no lo es en el sentido funcional usual, pero se usa para indicar que si N es muy grande, entonces la desviación esperada de la razón N_A/N de una constante se vuelve muy pequeña. Esto se llama en ocasiones "ley empírica de números grandes" y concuerda con la idea intuitiva de probabilidad. Por ejemplo, si se lanza una moneda un número grande de veces, se espera que las caras aparezcan en cerca de la mitad de los lanzamientos y que esta aproximación se haga mayor mientras más lanzamientos se efectúen.

EJEMPLO 8.1.1

Se lanza 10 veces una moneda legal y los resultados del experimento son: {*H, T, T, H, H, H, H, T, T, T*}.† Sea A la ocurrencia de una cara y $x = N_A/N$. (a) Calcule x a medida que avanza el experimento. (b) Calcule también, como una medida de la posible convergencia en $x = 0.50$,

$$y = \left[\sum_{i=1}^{N} (x_i - 0.5)^2/N\right]^{1/2}.$$

Solución Los resultados del cálculo aparecen a continuación. Nótese la convergencia (lenta) a medida que aumenta el número de pruebas aunque la secuencia dada no sea particularmente "favorable".

N	H	x	y	N	H	x	y
1	1	1.000	0.500	6	4	0.667	0.229
2	1	0.500	0.354	7	5	0.714	0.227
3	1	0.333	0.304	8	5	0.625	0.217
4	2	0.500	0.264	9	5	0.556	0.206
5	3	0.600	0.240	10	5	0.500	0.195

En muchos casos, los experimentos necesarios para determinar la probabilidad de un evento pueden hacerse de manera conceptual. Por ejemplo, supóngase que se lanza un dado y se desea calcular la probabilidad de que aparezca un "uno". Suponiendo que se trata de un dado "legal" (de modo que los seis resultados sean igualmente probables) y con simetría, se puede concluir que la probabilidad de un uno es de 1/6 sin realizar el experimento práctico. Este tipo de razonamiento conduce a la siguiente definición alterna de la probabilidad de ocurrencia de un resultado A:

$$P(A) = \frac{\text{número de resultados posibles favorables para el evento } A}{\text{número total de resultados igualmente probables}}. \tag{8.2}$$

Se debe tener cuidado en interpretar de manera correcta la ecuación (8.2) porque la suposición de que todos los resultados son igualmente probables puede ser falsa y conducir a conclusiones erróneas.

† La *H* (*head*) corresponde a cara y la *T* (*tail*) a cruz (*N. del T.*).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJERCICIO 8.1.1

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que aparezca un entero par en el lanzamiento de un dado? (b) ¿Cuál en la suma de dos dados? (c) ¿Qué esperaría de la suma de tres dados?

RESPUESTA: (a) 1/2; (b) 1/2; (c) 1/2.

Las ecuaciones (8.1) y (8.2) muestran que la definición de probabilidad de ocurrencia de un resultado es un número real positivo entre cero y uno, o

$$0 \leq P(A) \leq 1 . \tag{8.3}$$

Denotando con S el hecho de que un resultado sea absolutamente cierto y con $\varnothing$ el hecho de que no sea posible, y usando las ecuaciones (8.1) y (8.2), se concluye que

$$\begin{cases} P(\varnothing) = 0 , \\ P(S) = 1 . \end{cases} \tag{8.4}$$

Dos eventos posibles son *mutuamente excluyentes* (o disjuntos) si es imposible que ocurran de manera simultánea: es decir, si la ocurrencia de un resultado impide la de otro. En este caso puede escribirse[†]

$$P(A \text{ o } B) = P(A + B) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A + N_B}{N} = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N} + \lim_{N \to \infty} \frac{N_B}{N} , \tag{8.5}$$

o

$$P(A + B) = P(A) + P(B) . \tag{8.6}$$

La aditividad de probabilidades expresada por la ecuación (8.6) permite asignar probabilidades a eventos elementales y de ellos derivar la probabilidad de otros eventos. De hecho, en un curso avanzado de probabilidad pueden postularse las ecuaciones (8.3), (8.4) y (8.6) y deducir de ellas la teoría de la probabilidad.

Es conveniente representar A y B con figuras planas cerradas, conocidas como "diagramas de Venn", que pueden usarse como ayuda visual en las anteriores operaciones. En la figura 8.1 aparece un diagrama de Venn para los dos eventos mutuamente excluyentes A y B. Dado que A y B son mutuamente excluyentes, un evento dado no puede representarse como perteneciente a ambas áreas y, por tanto, se concluye que las áreas no se traslapan. Como la probabilidad es una medida numérica de los resultados de un experimento, la ecuación (8.6) se deduce de este diagrama de Venn.

Si se incluyen todos los posibles resultados, una extensión de la ecuación (8.6) da

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots , \tag{8.7}$$

[†] En matemáticas es común usar la notación de conjuntos "unión" ($A \cup B$) e "intersección" ($A \cap B$) en lugar de la suma ($A + B$) y el producto (AB), respectivamente.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

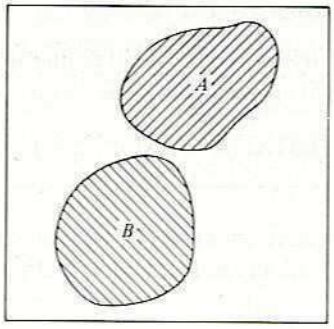


Figura 8.1 Diagrama de Venn para dos eventos mutuamente excluyentes.

o, usando la ecuación (8.4),

$$\sum_{i=1}^{N} P(A_i) = 1 . \tag{8.8}$$

Si además todos los resultados tienen la misma probabilidad,

$$P(A_i) = 1/N . \tag{8.9}$$

En el último caso se dice que los resultados son *igualmente probables*.

EJEMPLO 8.1.2

Considérese el experimento de lanzar dos monedas legales. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos caras o dos cruces?

Solución I Hay cuatro posibles resultados del experimento: {HH}, {HT}, {TH}, {TT}. La probabilidad de cada uno es 1/4 [véase Ec. (8.2)]. Sea A el resultado {HH} y B el {TT}. Como estos resultados son mutuamente excluyentes,

$$P(A \text{ o } B) = P(A + B) = P(A) + P(B) = 1/4 + 1/4 = 1/2 .$$

Solución II El número de resultados favorables es 2. La aplicación directa de la ecuación (8.2) da una probabilidad de 2/4 = 1/2.

EJERCICIO 8.1.2

Considere el experimento de lanzar dos dados. Los eventos son las sumas de los números de las caras superiores. ¿Cuál es la probabilidad de que esta suma sea menor que cinco?

RESPUESTA: 1/6.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

8.2 PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA ESTADÍSTICA

Tómense los posibles eventos A y B. Estos eventos pueden o no ocurrir juntos (si son mutuamente excluyentes, no pueden). La probabilidad de la ocurrencia conjunta de A y B es $P(A \text{ y } B)$ o, de manera más simple, P(AB).† Supóngase que el experimento se repite N veces y que N_{AB} es el número de veces que A y B ocurren juntos. Usando el concepto de frecuencia relativa, la probabilidad conjunta de su ocurrencia es (se implica el límite cuando $N \to \infty$)

$$P(AB) = \frac{N_{AB}}{N}. \tag{8.10}$$

Recuérdese que N_A es el número de veces que ocurre A y N_B el número de veces que ocurre B. Como A y B pueden no ocurrir juntos siempre, se tiene que $N_{AB} \leq N_A$ y $N_{AB} \leq N_B$.

Puede ser que la ocurrencia del evento B dependa, de alguna manera, de la ocurrencia de A. La probabilidad de B dado que se sabe que ha ocurrido A se llama *probabilidad condicional* de B dado A y se escribe $P(B|A)$. Del concepto de frecuencia relativa para las N_A pruebas en que ocurre A, puede escribirse

$$P(B\,|\,A) = \frac{N_{AB}}{N_A} = \frac{N_{AB}/N}{N_A/N} = \frac{P(AB)}{P(A)}. \tag{8.11}$$

En forma similar,

$$P(A\,|\,B) = \frac{N_{AB}}{N_B} = \frac{N_{AB}/N}{N_B/N} = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{8.12}$$

Combinando las ecuaciones (8.11) y (8.12), la probabilidad conjunta $P(AB)$ puede expresarse como

$$P(AB) = P(B\,|\,A)P(A) = P(A\,|\,B)P(B), \tag{8.13}$$

o

$$P(B\,|\,A) = \frac{P(B)P(A\,|\,B)}{P(A)}. \tag{8.14}$$

La ecuación (8.14) se conoce como *teorema de Bayes* en la teoría de la decisión estadística.

EJEMPLO 8.2.1

Un mazo de 52 cartas se mezcla y se extraen dos cartas al azar. Después de mirar la primera, (a) ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea un corazón, si la primera es un corazón? (b) ¿Cuál si la primera no es un corazón? (c) Calcule $P(AB)$ para el inciso (a).

† Esto equivale a la notación de conjuntos $P(A \cap B)$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Solución Sea A el evento de un corazón en la primera carta, B el evento de un corazon en la segunda carta y C el evento de que no haya corazón en la primera carta.

a) Como hay 13 corazones en el mazo original y se sabe que se ha extraído uno,

$$P(B\,|\,A) = 12/51\,.$$

b) En este caso, los 13 corazones están distribuidos entre (52 - 1) = 51 cartas, por lo que

$$P(B\,|\,C) = 13/51\,.$$

c) $P(A)$ = 13/52; de la ecuación (8.11) y del resultado del inciso (a),

$$P(AB) = \frac{12}{51}\frac{13}{52} = \frac{3}{51}\,.$$

EJERCICIO 8.2.1

Se lanzan dos dados. El evento A es que la suma sea divisible entre dos. El evento B, que sea divisible entre 4. Calcule (a) $P(AB)$; (b) $P(B|A)$.

RESPUESTA: (a) 1/4; (b) 1/2.

Supóngase ahora que B es independiente de A de modo que la ocurrencia de A no influye en absoluto en la ocurrencia de B. Si esto es cierto, la probabilidad condicional $P(B|A)$ es simplemente la probabilidad $P(B)$, es decir,

$$P(B\,|\,A) = P(B) \quad \text{si es independiente.} \tag{8.15}$$

Sustituyendo la ecuación (8.15) en la (8.13), se concluye que los dos eventos A y B son *estadísticamente independientes* si

$$P(AB) = P(A)P(B)\,. \tag{8.16}$$

Por tanto, cuando los posibles resultados de un experimento son estadísticamente independientes, la probabilidad conjunta de los resultados particulares es igual al producto de las probabilidades de los resultados individuales. Esto puede ampliarse a cualquier número arbitrario de resultados.

Nótese que la propiedad de independencia estadística es bastante diferente de la mutua exclusión. De hecho, si A y B son mutuamente excluyentes, la probabilidad de ocurrencia conjunta es cero por definición, es decir, $P(AB) = 0$.

EJEMPLO 8.2.2

La ecuación (8.6) da la probabilidad de dos eventos mutuamente excluyentes en términos de la suma de sus probabilidades de ocurrencia: $P(A + B) = P(A) + P(B)$. Deduzca un resultado comparable si los eventos no son mutuamente excluyentes.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

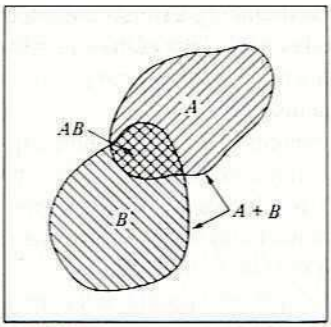


Figura 8.2 Diagrama de Venn para dos eventos que no son mutuamente excluyentes.

Solución En la figura 8.2 se muestra un diagrama de Venn en que los resultados son A y B. Como no son mutuamente excluyentes, la probabilidad conjunta $P(AB)$ es distinta de cero, como se ve en el traslapo del diagrama (si fuera cero, entonces A y B no se traslaparían, o serían disjuntos).

Del diagrama de Venn resulta obvio que la simple suma de A y B da el resultado correcto (A o B) sólo cuando A y B son disjuntos (es decir, mutuamente excluyentes). En el caso más general, la suma de A y B incluye dos veces (A y B), quedando

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Éste constituye el resultado buscado y es una versión más general de la ecuación (8.6). Nótese que si A y B son mutuamente excluyentes, $P(AB) = 0$ y este resultado se reduce a la ecuación (8.6).

EJERCICIO 8.2.2

Se lanzan varios dados legales. Calcule la probabilidad de que en todos aparezca un "uno" si el número de dados es (a) 2; (b) 3; (c) N.

RESPUESTA: (a) 1/36; (b) 1/216; (c) $(1/6)^N$.

8.3 VARIABLE ALEATORIA Y FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULATIVA

En la sección anterior se expuso el concepto de probabilidad para medir en forma numérica los posibles resultados de un experimento. Sin embargo, los resultados en sí mismos no son necesariamente numéricos (p. ej., las caras y las cruces de una moneda) y resulta complicado tratar de describirlos. El concepto de variable aleatoria se introduce

http://libreria-universitaria.blogspot.com

para indicar una regla (o una correspondencia) por medio de la cual se asigna un número real a cada uno de los posibles resultados de un experimento. La combinación de ambos conceptos permitirá elaborar gráficas numéricas de probabilidad contra eventos para un experimento dado.

Los eventos de un experimento que tiene un número finito de posibles resultados se identificarán con los símbolos λ_i, que no necesitan representar números sino sólo los posibles resultados del experimento. Se establece alguna regla o relación funcional (correspondencia) $X(\lambda_i)$, que asigna un número real a cada posible resultado. Esta regla se llama *variable aleatoria*.

Como ejemplo, podría asignarse el número −1 a las "caras" y el número +1 a las "cruces" en el experimento de lanzar una moneda. Se podría, así mismo, asociar $\sqrt{2}$ con "caras" y π con "cruces". En todo caso se cumple el propósito de asignar un número a cada posible resultado. Nótese que al definir la variable aleatoria no se asigna una medida a cada resultado (es decir, si en promedio aparece una cruz en la mitad de los lanzamientos). Las funciones de la probabilidad y de la variable aleatoria son claramente diferentes.

En ocasiones, los símbolos de identificación λ_i resultan numéricos (p. ej., las seis caras de un dado tienen asignados números en secuencia arbitraria). Si se desea, pueden asignarse nuevos números a estos eventos, por ejemplo elevando al cuadrado cada número. Por tanto, una variable aleatoria no es aleatoria en sí misma sino una regla arbitraria establecida para asignar números a eventos según convenga.

Aunque se ha incluido el concepto para un número finito de posibles resultados, una variable aleatoria puede ser discreta o continua, dependiendo de la naturaleza de los posibles resultados del experimento. Por ejemplo, los números asignados al lanzamiento de una moneda (para un número finito de lanzamientos) son discretos porque los posibles resultados forman un conjunto contable finito. Por el contrario, la posición angular de un indicador en una rueda que gira es una variable aleatoria cuyos valores forman un continuo en el intervalo $0 < \theta \leq 360°$. Para hacer referencia a ambos casos, se suprimirá el subíndice i, escribiendo simplemente $X(\lambda)$ y suponiéndolo cuando se haga referencia al caso discreto.

Resulta conveniente y bastante provechoso graficar las probabilidades del resultado de determinado experimento contra la variable aleatoria asignada. Para dar significado a dicha gráfica, se definirá lo que quiere decir la función distribución acumulativa.

La *función de distribución acumulativa*, $F_X(x)$, asociada con una variable aleatoria X, se define como†

$$F_X(x) \triangleq P\{X(\lambda) \leq x\}. \tag{8.17}$$

Esta función depende tanto de la variable aleatoria X como del valor del argumento x. Por esta razón se incluye el subíndice X en la notación.

† Es convencional el uso de mayúsculas para denotar las variables aleatorias y de minúsculas para los valores en el intervalo.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Como la función de distribución acumulativa se basa directamente en el concepto de probabilidad, tiene las siguientes propiedades:

$$0 \leq F_X(x) \leq 1\,, \tag{8.18}$$

$$F_X(x_1) \leq F_X(x_2), \quad \text{si } x_1 < x_2\,, \tag{8.19}$$

$$\begin{cases} F_X(-\infty) = 0\,, \\ F_X(+\infty) = 1\,. \end{cases} \tag{8.20}$$

La propiedad de la ecuación (8.18) proviene del hecho de que $F_X(x)$ es una probabilidad y debe, por tanto, satisfacer la ecuación (8.3). La ecuación (8.19) también es válida como resultado de la (8.3) dado que la probabilidad es siempre positiva; para $x_1 < x_2$, $F_X(x_2)$ *incluye tanto o más de los posibles resultados que* $F_X(x_1)$. *La ecuación (8.20) proviene* de la (8.4) porque $F_X(-\infty)$ no incluye eventos posibles mientras $F_X(+\infty)$ incluye todos los eventos posibles.

Para una variable aleatoria discreta $X(\lambda_i)$ con P_i probabilidades asociadas, la función de distribución acumulativa puede expresarse como

$$F_X(x) = \sum_i P_i u(x - x_i)\,. \tag{8.21}$$

Por tanto, la función de distribución acumulativa de una variable aleatoria discreta tiene una serie de discontinuidades finitas ("en escalón") en los puntos $x = x_i$. La altura de cada escalón está dada por $P_i = P(X = x_i)$ y entre los escalones $F_X(x)$ es constante. En un punto de discontinuidad finita, $F_X(x)$ se toma continua a la derecha.

EJEMPLO 8.3.1

En un experimento que consiste en lanzar tres monedas legales, se define una variable aleatoria asignando 0 a una "cara" y 1 a una "cruz" y luego sumando los números. Determine y grafique la función de distribución acumulativa.

Solución Los ocho posibles resultados son

000	100
001	101
010	110
011	111

Suponiendo resultados igualmente probables, la probabilidad de cada uno es de 1/8. Los resultados son mutuamente excluyentes, por lo que las probabilidades son aditivas. A continuación se muestra una tabla de la variable aleatoria $X(\lambda_i)$ y las probabilidades asociadas.

x	P
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La función de distribución acumulativa se halla sumando las probabilidades de todos los resultados por debajo de un número dado y se grafica en la figura 8.3(a). Por ejemplo, la función de distribución acumulativa evaluada en $x = 2$ es

$$\begin{aligned} F_X(2) &= P\{X \leq 2\} \\ &= P(0) + P(1) + P(2) \\ &= 1/8 + 3/8 + 3/8 = 7/8 . \end{aligned}$$

La respuesta en forma de ecuación es [véase Ec. (8.21)]

$$F_X(x) = \tfrac{1}{8}u(x) + \tfrac{3}{8}u(x-1) + \tfrac{3}{8}u(x-2) + \tfrac{1}{8}u(x-3) .$$

Nótese que $F_X(x)$ *satisface* todas las propiedades dadas por las ecuaciones (8.18) a (8.20).

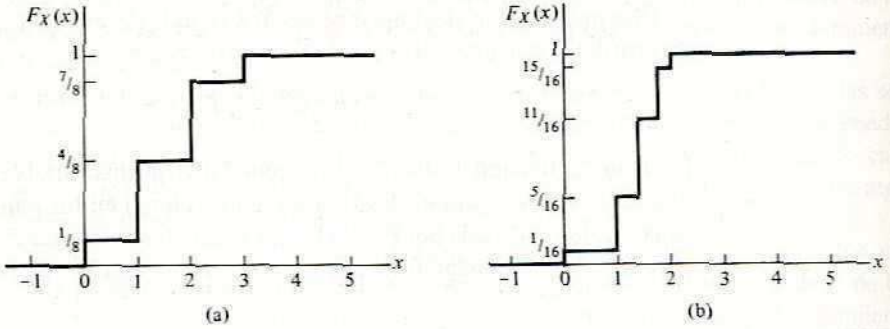


Figura 8.3 Función de distribución acumulativa para la variable aleatoria discreta de: (a) el ejemplo 8.3.1; (b) el ejercicio 8.3.1.

EJERCICIO 8.3.1

Se lanzan cuatro monedas legales y se designa a X como la raíz cuadrada del número de cruces que salen. Determine y grafique la función de distribución acumulativa $F_X(x)$.

RESPUESTA: El resultado está graficado en la figura 8.3(b); la ecuación es

$$F_X(x) = \tfrac{1}{16}u(x) + \tfrac{4}{16}u(x-1) + \tfrac{6}{16}u(x-\sqrt{2}) + \tfrac{4}{16}u(x-\sqrt{3}) + \tfrac{1}{16}u(x-2) .$$

8.4 FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

En lugar de lanzar monedas o dados, supóngase que se hace girar una rueda con un indicador. Como resultado de las pérdidas por fricción, la rueda se va frenando y se detiene en determinada posición angular θ. Supóngase que se marcan 360 divisiones

http://libreria-universitaria.blogspot.com

iguales alrededor de la circunferencia. El punto de detención de la rueda es el resultado del experimento. Hay un número infinito de resultados posibles, por lo que se asigna una variable aleatoria continua θ al experimento.

Considérese la probabilidad de detención en puntos alrededor del borde de la rueda. Como ésta debe detenerse en algún lugar del intervalo, la probabilidad total de que $0 < \theta \leq 360°$ es uno. Como el intervalo se ha dividido de manera uniforme, la probabilidad de que $0 < \theta \leq 1°$ es 1/360. Entonces, ¿cuál es la probabilidad de que la rueda se detenga en un punto dado? Hay un número infinito de puntos dentro de cada división (no importa cuán pequeña se haga), y la única respuesta razonable es que la probabilidad debe ser cero; de otra manera no se podría llegar a una probabilidad total de uno.

Aunque $P\{\theta = \theta_1\} = 0$, tiene sentido hablar de $P\{\theta \leq \theta_1\}$ o $P\{\theta_1 < \theta \leq \theta_2\}$ para $\theta_1 < \theta_2$. El concepto de función de distribución acumulativa es aún válido, pero resulta más conveniente en tales casos definir una función cuya *área* sea la probabilidad de ocurrencia en un intervalo específico. Puesto que el área se iguala a la probabilidad, dicha función se denomina *función de densidad de probabilidad* (fdp).

Entonces, la función de densidad de probabilidad $p_X(x)$ de una variable aleatoria X se define con

$$\int_{-\infty}^{x} p_X(x)\,dx = P\{X \leq x\}. \tag{8.22}$$

Sin embargo, también puede escribirse [véase Ec. (8.17)]

$$P\{X \leq x\} = F_X(x), \tag{8.23}$$

de manera que

$$\int_{-\infty}^{x} p_X(x)\,dx = F_X(x). \tag{8.24}$$

Derivando ambos lados de esta ecuación, se halla que una definición equivalente de la función de densidad de probabilidad es

$$p_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x). \tag{8.25}$$

Es decir, la fdp de una variable aleatoria X es la derivada de la función de distribución acumulativa $F_X(x)$.

Puede suceder que esa derivada no exista en todos los puntos. En ese caso, se debe recurrir a una operación límite. La notación de función delta usada en los capítulos 2 y 3 resulta útil en muchos casos.

En este punto, la notación que usa la variable aleatoria como subíndice empieza a ser engorrosa. Cuando haya una sola variable aleatoria en análisis y no pueda haber ambigüedad, se omitirá el subíndice en la función de densidad de probabilidad para simplificar la notación.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

De la ecuación (8.24) y de las propiedades de la función de distribución acumulativa [véanse Ecs. (8.18) a (8.20)], algunas propiedades de la función de densidad de probabilidad son

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = F_X(\infty) = 1\,, \tag{8.26}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx = F_X(x_2) - F_X(x_1) = P\{x_1 < X \leq x_2\}\,. \tag{8.27}$$

Como la ecuación (8.27) debe ser siempre positiva para cualquier (x_1, x_2), también se puede escribir

$$p(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x. \tag{8.28}$$

EJEMPLO 8.4.1

Se hace girar una rueda y se deja que se desacelere y pare. Cuando se detiene, la posición angular del indicador es θ. Se marca una escala, $0 < \theta \leq 360°$, con incrementos uniformes alrededor del borde de la rueda. Determine la fdp de θ.

Solución Como todos los valores en el intervalo $0 < \theta \leq 360°$ son igualmente probables, la fdp es constante, de modo que

$$p(\theta) = \begin{cases} K & 0 < \theta \leq 360°, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La constante K se puede evaluar porque se sabe que la probabilidad total de que la rueda se detenga en el intervalo es uno:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\theta)\,d\theta = \int_{0}^{360} K\,d\theta = 360K = 1\,,$$

$$K = 1/360\,.$$

Nótese que la probabilidad de que el indicador se detenga exactamente en el punto $\theta = 1°$ es, de manera formal,

$$P(1) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} K\,d\theta = 0\,,$$

pero la probabilidad de que se detenga en el intervalo $0 < \theta \leq 1°$ es

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{360}\,d\theta = \frac{1}{360}\,.$$

En la figura 8.4 se muestra una gráfica de la fdp.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

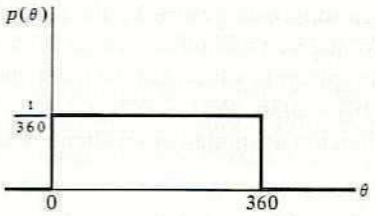


Figura 8.4 Función de densidad de probabilidad del ejemplo 8.4.1.

EJERCICIO 8.4.1

En la prueba de confiabilidad de pequeños componentes electrónicos, la probabilidad de falla se aproxima a menudo con la fdp exponencial $p(y) = K \exp(-y/\alpha)u(y)$, donde y es el tiempo de operación del equipo en horas y la constante α se determina de manera experimental (y se llama *tiempo medio antes de una falla*). (a) Calcule la probabilidad de que un componente descrito por esta fdp falle dentro de las α primeras horas de operación. (b) Si $\alpha = 10\,000$ horas, ¿cuál es la probabilidad de que el componente falle durante la primera hora de operación?

RESPUESTA: (a) 0.632; (b) 0.0001.

Es conveniente ampliar nuestra definición de función de densidad de probabilidad para incluir el caso de variables aleatorias discretas. Esto es fácil si se recuerda que la función de distribución acumulativa está compuesta por una serie de funciones escalón cuya derivada, al menos de manera formal, es una función impulso. Usando la ecuación (8.21) puede escribirse

$$p(x) = \frac{d}{dx}\left[\sum_i P_i u(x - x_i)\right],$$

o

$$p(x) = \sum_i P_i \delta(x - x_i). \tag{8.29}$$

Aunque los ejemplos tienden a caer en alguna de las dos categorías, no hay una razón teórica para que una fdp sea puramente discreta o puramente continua.

EJEMPLO 8.4.2

En el experimento de lanzar dos dados legales, la variable aleatoria X se asigna a la suma de los números de las caras superiores. Determine y grafique la función de distribución acumulativa y la fdp de X.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Solución Hay 36 resultados posibles porque cada dado puede mostrar cualquier número entre 1 y 6 y la suma estará entre 2 y 12. Todos los resultados se suponen igualmente probables, por lo que su probabilidad es de 1/36. Los eventos son mutuamente excluyentes y se puede aplicar la aditividad. Se halla que $P(2) = P(12) = 1/36$, $P(3) = P(11) = 2/36$, $P(4) = P(10) = 3/36$, $P(5) = P(9) = 4/36$, $P(6) = P(8) = 5/36$, $P(7) = 6/36$. La función de distribución acumulativa resultante y la fdp aparecen en la figura 8.5.

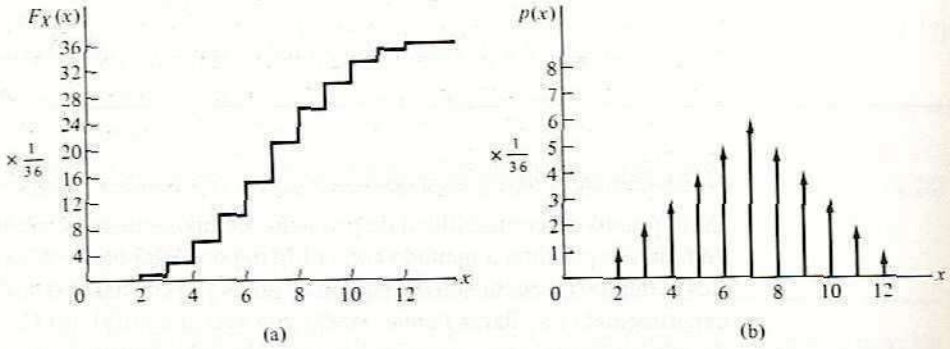


Figura 8.5 (a) Función de distribución acumulativa y (b) función de densidad de probabilidad para el ejemplo 8.4.2

EJERCICIO 8.4.2

Se lanzan cuatro monedas legales y se designa X como el número de cruces que salen. Determine la fdp de X.

RESPUESTA:† $p(x) = \frac{1}{16}\delta(x) + \frac{4}{16}\delta(x-1) + \frac{6}{16}\delta(x-2) + \frac{4}{16}\delta(x-3) + \frac{1}{16}\delta(x-4)$.

Una comparación con el capítulo 4 (véase Sec. 4.2) revela que el desarrollo del *espectro acumulativo de potencia y la densidad espectral de potencia es prácticamente* idéntico al de la función de distribución acumulativa y la función de densidad de probabilidad. Esta analogía puede extenderse al papel matemático de la señal periódica en la densidad espectral de potencia y la variable aleatoria discreta en la función de densidad de probabilidad, dado que ambas generan series de funciones impulso. Ambas funciones de densidad son positivas; por tanto, ambas funciones acumulativas son monotónicas no decrecientes con argumento creciente. Cada punto de la densidad espectral de potencia tiene asociada potencia cero, *mientras que el área bajo* la curva de la densidad da la potencia en un intervalo específico de frecuencias. Cada *punto de la densidad de probabilidad* tiene asociada probabilidad cero, mientras que el área bajo la curva de densidad da la probabilidad en un intervalo específico de la variable aleatoria.

† *En la sección 8.6.2 se trata una notación más compacta para este tipo de problemas.*

http://libreria-universitaria.blogspot.com

8.5 PROMEDIOS ESTADÍSTICOS

La función de densidad de probabilidad es útil para evaluar los valores más probables de determinadas cantidades. Una forma de hallar el valor más probable de X es localizar en la fdp de X el punto que tenga el valor máximo. Este punto se llama *moda*. Una condición necesaria para determinar la moda (en el caso continuo) es que $(d/dx)p(x) = 0$. Sin embargo, la posición de este punto es muy sensible a pequeños cambios en la fdp. Otra forma es localizar el punto que divide al área en dos partes iguales. Este punto se llama *mediana*. La determinación de la mediana es más fácil que la de la moda, pero es aún bastante sensible a cambios menores de la fdp. En forma alterna, puede usarse el promedio estadístico.

El promedio estadístico de una variable aleatoria X (o de una función de una variable aleatoria) es el promedio numérico de los valores que puede tomar X (o una función de X), ponderado por sus probabilidades. Si $X = x_1$ se observa n_1 veces, $X = x_2$ se observa n_2 veces, etc., hasta que, por último, $X = x_k$ se observa n_k veces, entonces $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = N$ y el valor observado es

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + \cdots = \sum_{i=1}^{K} n_ix_i . \tag{8.30}$$

Dividiendo entre N y haciendo $N \to \infty$ para usar el enfoque de frecuencia relativa de la probabilidad, se tiene

$$M_1 = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{K} x_i \frac{n_i}{N} = \sum_{i=1}^{K} x_i P_i = m_X , \tag{8.31}$$

donde M_1 se llama primer momento de X y m_X es el *valor promedio o valor medio de X*. La ecuación (8.31) también se llama *valor esperado de X*. Nótese que en el caso especial en que todos los eventos son igualmente probables [véase Ec. (8.9)], la ecuación (8.31) se reduce al promedio aritmético de X:

$$m_X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i . \tag{8.32}$$

De modo similar, el segundo momento M_2 es igual al valor esperado de X^2:

$$M_2 = \sum_{i=1}^{K} x_i^2 P_i , \tag{8.33}$$

y se llama valor *cuadrático medio* de X. La raíz cuadrada de M_2 se llama *raíz cuadrática media* (rms, *root-mean-square*) de X. Los momentos de orden superior pueden expresarse de manera similar.

Para el caso de una variable aleatoria continua, la sumatoria de las ecuaciones (8.31) y (8.33) se aproxima a una integración sobre todo el intervalo de X, por lo que el valor esperado de X denotado por $E\{X\}$ es

$$M_1 = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx = m_X , \tag{8.34}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

y el valor esperado de X^2, designado por $E\{X^2\}$, es

$$M_2 = E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx. \tag{8.35}$$

Por extensión, el valor esperado de X^n es

$$E\{X^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x)\,dx. \tag{8.36}$$

El valor esperado $E\{X^n\}$ se llama "momento n-ésimo" de la variable aleatoria X. Esto es análogo al concepto de momento en mecánica. Si $p(x)$ fuera la densidad de masa (normalizada a uno), el primer momento [véase Ec. (8.34)] correspondería al centro de gravedad, el segundo [véase Ec. (8.35)] al momento de inercia con respecto al origen, etcétera.

El conocimiento de todos los momentos de una variable aleatoria, siempre que sean finitos, especifica esa variable de manera tan completa como el conocimiento de la fdp. Por fortuna, en general bastan para trabajar los dos primeros momentos.

A menudo es conveniente restar el primer momento $M_1 = m_x$ antes de calcular los demás. Esto es análogo a la mecánica, donde los momentos se refieren al centro de gravedad más que al origen del sistema de coordenadas. Tales momentos se denominan "centrales". El segundo momento central es de particular importancia y se llama *varianza* de la variable aleatoria X. Así, la varianza, σ_X^2, de X se define como

$$\sigma_X^2 = E\{(X - m_X)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 p(x)\,dx. \tag{8.37}$$

La raíz cuadrada de la varianza se llama *desviación estándar*, σ_X, de la variable aleatoria X. La desviación estándar tiene las mismas unidades que X y es un indicador conveniente del ancho efectivo de la función de densidad de probabilidad. Por ejemplo, si dos variables aleatorias X y Y tienen valor promedio de 1, pero $\sigma_X = 1$ y $\sigma_Y = 2$, puede concluirse que el ancho efectivo de la fdp de Y está más distribuido (disperso) que el de X. Dicho de otra manera, la probabilidad de que X se encuentre cerca de 1 es mayor que la de Y.

Por último, el valor esperado de una función de una variable aleatoria $g(X)$ se define como

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)\,dx. \tag{8.38}$$

Cuando $g(X) = X^n$, el valor esperado es el momento n-ésimo de X, como ya se vio. Si $g(X)$ es una constante, entonces la ecuación (8.38) da esa constante porque $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$. El operador de valor esperado $E\{\cdot\}$ es lineal, por lo que

$$E\{a_1 X + a_2\} = a_1 m_X + a_2.$$

EJEMPLO 8.5.1

Muestre que una expresión equivalente a la ecuación (8.37) es

$$\sigma_X^2 = E\{X^2\} - [E\{X\}]^2 = M_2 - M_1^2.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Solución Expandiendo el término al cuadrado e integrando término por término, la ecuación (8.37) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= E\{X^2 - 2M_1X + M_1^2\}\\ &= E\{X^2\} - 2M_1E\{X\} + M_1^2\\ &= M_2 - 2M_1^2 + M_1^2\\ &= M_2 - M_1^2.\end{aligned}$$

Nótese que si $M_1 = 0$, entonces $\sigma_X^2 = M_2 = E\{X^2\}$.

EJERCICIO 8.5.1

Calcule la media m_X y la desviación estándar σ_X de la variable aleatoria X descrita por las siguientes funciones de densidad de probabilidad: $p(x) = \delta(x - 1)$; (b) $p(x) = (8/9)x[u(x) - u(x - 3/2)]$; (c) $p(x) = \exp(-x)u(x)$.

RESPUESTA: (a) 1, 0; (b) 1, $1/(2\sqrt{2})$; (c) 1, 1.

★ **EJEMPLO 8.5.2**

Estas observaciones de la varianza de una variable aleatoria como indicador relativo de la dispersión de la función de densidad de probabilidad pueden ser apoyadas por un resultado muy general de estadística conocido como *desigualdad de Chebyshev*:

$$P(|X - m_X| > k\sigma_X) < \frac{1}{k^2} \quad \text{para } k > 0\,.$$

Esta desigualdad establece que la probabilidad de que X esté $\pm k$ desviaciones estándar fuera de la media es menor que $1/k^2$ *independientemente de* $p(x)$. Por tanto, la probabilidad de hallar X bastante diferente de la media es mayor para una desviación estándar grande que para una pequeña. Como la probabilidad total es la unidad, la desigualdad de Chebyshev también puede escribirse como

$$P(|X - m_X| \leq k\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

En los textos sobre probabilidad y estadística puede hallarse la prueba de la desigualdad de Chebyshev.†

Como ejemplo, calcule $P(X > 5)$ para la fdp del ejercicio 8.5.1(c) y compare con la cota dada por la desigualdad de Chebyshev.

Solución Usando la fdp, se tiene

$$P(X > 5) = \int_5^\infty e^{-x}dx = e^{-5} = 0.0067\,.$$

† En algunos libros, Chebyshev se escribe Tchebycheff.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Usando la desigualdad de Chebyshev con $m_X = 1$, $\sigma_X = 1$, se tiene

$$P(X > 5) = P(|X - 1| > 4) < \frac{1}{4^2} = 0.0625 .$$

Aunque en este caso dicha cota es casi un orden de magnitud mayor que el valor exacto, observe que en el cálculo de esta cota no es necesario conocer fdp (sólo los dos primeros momentos) y de ahí que éste sea un resultado muy general.

Aunque las ecuaciones de los valores esperados se han escrito en términos de variables aleatorias continuas, también son válidas para las discretas cuando las funciones impulso que aparecen en las densidades de probabilidad se manejan de manera correcta. Recuérdese que la densidad de probabilidad de una variable aleatoria discreta puede escribirse como [véase Ec. (8.29)] $p(x) = \Sigma P_i \delta(x - x_i)$ de modo que el valor esperado de X para el caso discreto es, de la ecuación (8.34),

$$\begin{aligned} m_X = E\{X\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x \sum_{i=1}^{K} P_i \delta(x - x_i)\, dx \\ &= \sum_{i=1}^{K} x_i P_i , \end{aligned} \tag{8.39}$$

y concuerda con la ecuación (8.31). De manera similar,

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \sum_{i=1}^{K} P_i \delta(x - x_i)\, dx = \sum_{i=1}^{K} x_i^2 P_i , \tag{8.40}$$

y la varianza de X es

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{K} (x_i - m_X)^2 P_i . \tag{8.41}$$

Para el caso de igual probabilidad, la ecuación (8.40) se reduce a

$$E\{X^2\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2, \tag{8.42}$$

y la ecuación (8.41) se convierte en

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - m_X)^2. \tag{8.43}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJEMPLO 8.5.3

Nueve estudiantes presentan un examen; la lista de calificaciones se muestra en seguida. Calcule la mediana, el promedio de las calificaciones y la desviación estándar (¡trate a todos los alumnos de la misma forma!).

N	Z	N	Z
1	33	6	82
2	47	7	88
3	58	8	94
4	67	9	100
5	75		

Solución El número del estudiante que divide en partes iguales la distribución es el 5, por lo que la calificación mediana es 75. Como todos los estudiantes deben tratarse igual, $P_i = 1/9$ para todo i. La calificación promedio es [ecuación (8.32)]

$$E\{Z\} = \sum_{i=1}^{9} z_i P_i = 644/9 = 71.6 .$$

Usando la ecuación (8.43), encontramos que la desviación estándar está dada por

$$\sigma_Z = \sqrt{\sum_{i=1}^{9} (z_i - 71.6)^2/9} = 21.1 .$$

EJERCICIO 8.5.2

Calcule la media y la desviación estándar de la variable aleatoria X del ejemplo 8.4.2.

RESPUESTA: 7, 2.42.

El número de posibles pruebas en un experimento con un número discreto de estados se llama *población*. Una *muestra* es un número finito de pruebas menor que la población. En el promedio estadístico, el promedio de población y el promedio de prueba son distintos. En el primero, se dispone de todas las posibles pruebas para establecer el promedio, mientras que en el último los promedios estadísticos de la población deben estimarse a partir de sólo un número finito de muestras.

Supóngase que se desea estimar la población promedio θ con base en N muestras disponibles. La estimación de θ se denotará con $\hat{\theta}$. En la estimación se buscan determinadas cualidades, de las cuales se mencionarán dos.

Primero, que la estimación sea correcta si el tamaño de la muestra se extendiera a la población total. Si $E\{\hat{\theta}\} = \theta$, esto se llama *estimador sin sesgo* de θ. Una segunda

http://libreria-universitaria.blogspot.com

cualidad deseable es que la estimación converja en el valor correcto a medida que crece el número de muestras. Un estimador $\hat{\theta}$ se llama *estimador consistente* de θ (en sentido cuadrático medio) si

$$\lim_{N\to\infty} E\{(\hat{\theta} - \theta)^2\} = 0.$$

Puede mostrarse (véase el Ej. 8.5.4) que la media de la muestra [Ec. (8.32)] es un estimador insesgado y consistente de la media poblacional. Sin embargo, la varianza de la muestra es un estimador consistente [Ec. (8.43)]†

$$E\{\hat{\sigma}^2\} = \frac{N-1}{N}\sigma_X^2, \tag{8.44}$$

o sea que no es un estimador insesgado. Por esta razón, el estimador insesgado de la varianza de la muestra

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - m_X)^2, \tag{8.45}$$

es el que se usa en general. Para N grande, la diferencia entre ambos se hace despreciable.

Los conceptos de estimación no se reducen a variables aleatorias discretas; pueden ampliarse con facilidad a las continuas.

EJEMPLO 8.5.4

Muestre que la media de la muestra [(Ec. 8.32)] es un estimador de la media poblacional (a) insesgado y (b) consistente.

Solución

a)
$$E\{\hat{m}_X\} = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\right\} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E\{x_i\} = m_X.$$

b)
$$E\{(\hat{m}_X - m_X)^2\} = E\left\{\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - m_X)\right]^2\right\} = \frac{1}{N^2}E\left\{\sum_i\sum_k (x_i - m_X)(x_k - m_X)\right\} = \frac{1}{N^2}\sum_i\sum_k E\{x_i x_k - m_X^2\}.$$

† Véase, por ejemplo, J. S. Bendat y A. G. Piersol, *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, 2a. ed., Nueva York, Wiley-Interscience, 1986, Cap. 4.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Suponiendo que las muestras x_i y x_k son estadísticamente independientes, sólo los términos en que $i = k$ son distintos de cero y se tiene (del resultado del Ej. 8.5.1),

$$E\{(\hat{m}_X - m_X)^2\} = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}[E\{x_i^2\} - m_X^2] = \frac{1}{N}\sigma_X^2.$$

Por tanto, la varianza de la media de la muestra es igual a la varianza de la población dividida entre el tamaño de la muestra. Como esto tiende a cero cuando $N \to \infty$, la media de la muestra es un estimador consistente de la media poblacional.

EJERCICIO 8.5.3

De una caja con resistores de 1 kΩ se seleccionan cinco al azar. Los valores medidos (en ohms) son 980, 1009, 1026, 963 y 997. (a) Estime la media y la desviación estándar de los resistores de la caja basándose en esta muestra. (b) Calcule la media y la desviación estándar si estos cinco resistores fueran los únicos de la caja.

RESPUESTA: (a) 995.0 Ω, 24.55 Ω; (b) 995.0 Ω, 21.95 Ω.

8.6 ALGUNAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Aquí se describirán algunos de los numerosos ejemplos de distribuciones de probabilidad, tanto discretas como continuas, que aparecen en problemas físicos y son los más útiles en este libro.

8.6.1 La distribución uniforme

Se dice que una variable aleatoria que puede tomar con igual probabilidad cualquier valor de un intervalo dado está *uniformemente distribuida*. La variable puede ser discreta o continua. En el primer caso, la fdp es una serie de funciones impulso equidistantes y de igual magnitud. En el segundo caso, la fdp es una función rectangular

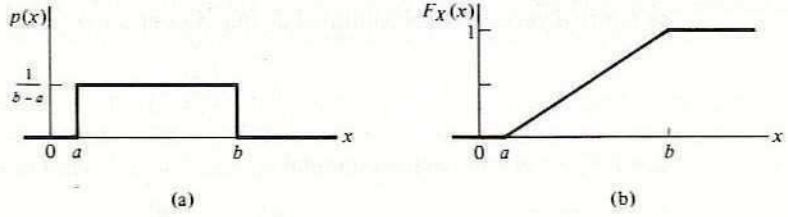


Figura 8.6 Función de densidad de probabilidad uniforme y la correspondiente función de distribución acumulativa.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

como se ilustra en la figura 8.6(a). Nótese que se debe elegir la altura de la fdp para obtener un área unitaria. La función de distribución acumulativa correspondiente se muestra en la figura 8.6(b).

EJEMPLO 8.6.1

Sea la variable aleatoria $X = \cos(\omega_0 t_1 + \theta)$, donde θ es una variable aleatoria con densidad probabilistica uniforme en $-\pi < \theta \pm \theta$. Calcule la media y la raíz cuadrática media.

Solución

$$E\{X\} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 t_1 + \theta)(1/2\pi)\, d\theta = 0,$$

$$E\{X^2\} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(\omega_0 t_1 + \theta)(1/2\pi)\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4\pi} d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4\pi} \cos(2\omega_0 t_1 + \theta)\, d\theta = \frac{1}{2} + 0,$$

$$E\{X^2\}^{1/2} = 1/\sqrt{2} = 0.707.$$

El hecho de que estos resultados sean exactamente los mismos que se obtienen usando promedios de tiempo no es accidental. En una sección posterior se volverá al tema de los promedios estadísticos y de tiempo.

EJERCICIO 8.6.1

Determine la media y la desviación estándar de la fdp uniforme de la figura 8.6(a).

RESPUESTA: $(b + a)/2$; $(b - a)/2\sqrt{3}$.

8.6.2 Distribución binomial

Considérese un experimento con sólo dos resultados posibles, A y B, que son mutuamente excluyentes. Las probabilidades son $P(A) = p$ y $P(B) = 1 - p = q$. El experimento se repite n veces y la probabilidad de que A ocurra i veces es

$$P_i = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}, \tag{8.46}$$

donde $\binom{n}{i}$ es el coeficiente binomial.

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}. \tag{8.47}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

El coeficiente binomial se muestra aquí para justificar el número total de formas posibles de combinar n elementos tomando i de ellos a la vez, con todas las posibles permutaciones permitidas. Por definición, $0! = 1$. La deducción de la ecuación (8.46) se puede encontrar en libros de probabilidad.

Cuando n, i no son muy grandes, los coeficientes también pueden obtenerse del triángulo de Pascal. Este triángulo contiene los coeficientes de la expansión de $(p + q)^n$ y se muestra en la figura 8.7 para $1 \leq n \leq 5$. Se construye notando que cada fila empieza y termina en 1. Los demás números de una fila se determinan sumando los dos números de la fila inmediata superior que se hallan sobre el número buscado. Por ejemplo, los números de la cuarta fila (es decir, $n = 4$) son $1, 4 = 1 + 3, 6 = 3 + 3, 4 = 3 + 1, 1$; éstos son los coeficientes de la expansión de $(p + q)^4$. Nótese que cada coeficiente se puede expresar también como $\binom{n}{i}$ donde i es la potencia de una de las variables de la expansión de $(p + q)^n$. Los coeficientes binomiales son útiles porque permiten hallar el número de posibles formas de agrupar n elementos tomados i a la vez.

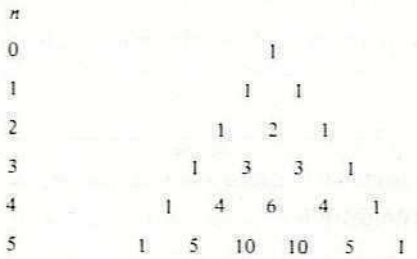


Figura 8.7 Triángulo de Pascal.

La función de densidad de probabilidad binomial se puede obtener sustituyendo la ecuación (8.46) en la (8.29):

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \delta(x - i), \tag{8.48}$$

donde i es el número entero de veces que puede ocurrir A. El valor medio de la distribución binomial es (np) y la varianza es (npq).[†]

EJEMPLO 8.6.2

Se mezcla un mazo de cartas estándar de 52 cartas y se extraen dos de ellas al azar. ¿Cuál es la probabilidad conjunta de tomar dos corazones? (Véase Ej. 8.2.1.)

Solución Se utiliza el concepto de frecuencia relativa de la probabilidad [véase Ec. (8.2)]. Primero se encuentra el número de resultados posibles favorables y luego se divide entre el número total de resultados igualmente posibles.

[†] La variable aleatoria x_i puede sustituirse por los enteros i en la ecuación (8.48) si se modifican en forma adecuada la media y la varianza.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Los resultados favorables son la elección de dos corazones. Existen 13 corazones en la baraja; si se toman dos a la vez, el número de resultados favorables es, usando la ecuación (8.47),

$$\binom{13}{2} = \frac{13!}{2!\,11!} = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78 .$$

El número total de resultados igualmente posibles se encuentra tomando a la vez dos cartas cualesquiera del mazo de 52 cartas, o

$$\binom{52}{2} = \frac{52!}{2!\,50!} = \frac{51 \cdot 52}{2} = 1326 .$$

La probabilidad conjunta de sacar dos corazones de la baraja es, entonces,

$$P(AB) = \frac{78}{1326} = \frac{3}{51} .$$

Lo cual concuerda con la respuesta obtenida en el ejemplo 8.2.1(c).

EJEMPLO 8.6.3

Se lanzan tres dados a la vez. Escriba la fdp para el número de unos que aparecen en la cara superior.

Solución Sea X el número de unos; entonces, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, $n = 3$, y la ecuación (8.48) da

$$p(x) = \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} (\tfrac{1}{6})^i (\tfrac{5}{6})^{3-i} \delta(x - i) ,$$

$$p(x) = \tfrac{125}{216}\delta(x) + \tfrac{75}{216}\delta(x - 1) + \tfrac{15}{216}\delta(x - 2) + \tfrac{1}{216}\delta(x - 3) .$$

EJERCICIO 8.6.2

Se selecciona un número aleatorio entre 0 y 1 (incluya el 0 pero no el 1.) ¿Cuál es la probabilidad de que en la expansión decimal del número seleccionado la suma de los primeros dos dígitos sea 5 o menos?

RESPUESTA: 6!/100.

EJERCICIO 8.6.3

Se lanzan tres monedas y se designa con X el número de caras que salen. Determine la fdp de X usando la ecuación (8.48); repita el cálculo para el caso en que se emplean seis monedas.

RESPUESTA: Véase la figura 8.8.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

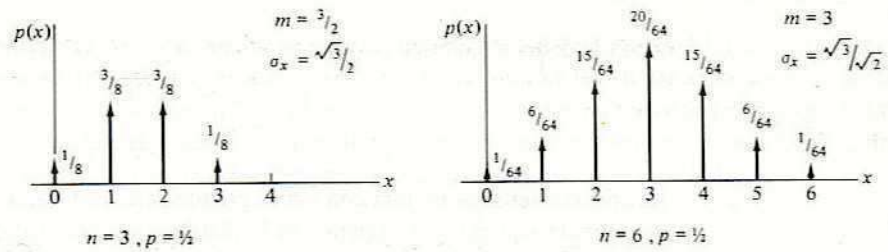


Figura 8.8 Función de densidad de probabilidad binomial para dos valores diferentes de n.

8.6.3 Distribución de Poisson

En ciertos tipos de problemas deseamos contar el número de ocurrencias de algún evento durante varios intervalos de tiempo. Un caso especial de dicho proceso de conteo, si se conoce la tasa promedio de ocurrencia, es el descrito por la distribución de Poisson,

$$P_i = e^{-\nu}\frac{\nu^i}{i!} \tag{8.49}$$

donde ν es el valor promedio de la tasa de ocurrencia del evento deseado. El valor medio de la distribución de Poisson es ν y la varianza es ν.

La distribución de Poisson se presenta en algunos problemas físicos que implican conteo, por ejemplo, contar las partículas emitidas durante cierto tiempo en el decaimiento radiactivo, el número aleatorio de fotoelectrones generados por un fotodetector y el control del número de llamadas telefónicas que llegan a un conmutador central. Nuestro interés aquí radica en el hecho de que el uso de la distribución de Poisson concierne al problema de la transmisión de muchos bits de datos cuando las tasas de error son bajas. La distribución binomial se vuelve difícil de manejar en dichos casos. Sin embargo, si el valor medio de la tasa de error permanece finito (e igual a ν), la distribución binomial se puede aproximar por medio de la distribución de Poisson. Esto se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 8.6.4

Se lanzan dos dados legales y el resultado deseado es la aparición de todos los unos. (a) Calcule la probabilidad de que esto ocurra dos veces en 40 lanzamientos, primero por distribución binomial y después aproximando con la distribución de Poisson. (b) Repita para el caso de cuatro dados y 1000 lanzamientos.

Solución a) Usando distribución binomial, se tiene

$$P_2 = \binom{40}{2}\left[\frac{1}{36}\right]^2\left[\frac{35}{36}\right]^{38} = \frac{40!}{2!\,38!}\frac{35^{38}}{36^{40}} = 0.2063\,,$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

y con la distribución de Poisson se obtiene

$$\nu = np = 40/36,$$
$$P_2 \approx e^{-\nu}(\nu)^2/2! = 0.2032.$$

La aproximación se mejora con n más grande para un ν dado. Nótese la simplicidad del cálculo cuando se compara con la distribución binomial; esto se destaca en el inciso (b).

b) Usando la distribución binomial, se tiene

$$P_2 = \binom{1000}{2}\left[\frac{1}{1296}\right]^2\left[\frac{1295}{1296}\right]^{998} = 0.13765,$$

y usando la distribución de Poisson, se obtiene

$$\nu = np = 1000/1296,$$
$$P_2 \approx e^{-\nu}(\nu)^2/2! = 0.13761.$$

EJERCICIO 8.6.4

Cierto sistema de comunicación transmite datos digitales con una tasa promedio de error de 1 dígito en 10^6. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran tres errores en una transmisión de 10^6 digitos?

RESPUESTA: 6.13%

8.6.4 Distribución gaussiana

Una función de densidad de probabilidad muy conocida es la gaussiana o "normal". Aparece cuando un gran número de factores independientes (con algunas restricciones importantes) contribuyen en forma aditiva a un resultado final. Este resultado, conocido como "teorema del límite central", establece que la suma de N variables aleatorias independientes tiende a una distribución gaussiana a medida que N se hace mayor. Este resultado no depende de la distribución de cada variable aleatoria (con restricciones importantes) siempre que su contribución sea pequeña con respecto a la suma. Sin embargo, este teorema no es fácil de probar e interpretar correctamente, y aquí no se proseguirá con el tema excepto para señalar que el ruido eléctrico es, a menudo, resultado de sumas de gran número de efectos aleatorios y tiende, por tanto, a la distribución gaussiana.

La *fdp gaussiana* es continua y se define como

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}, \tag{8.50}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

donde m, σ^2 son, respectivamente, la media y la varianza. El factor $1/(\sqrt{2\pi}\,\sigma)$ es necesario para que el área sea unitaria. En la figura 8.9 se muestra una gráfica de la fdp gaussiana. Nótese que la fdp está especificada en forma unívoca por sus dos primeros momentos. Por conveniencia al tabular los valores numéricos, se define una *fdp gaussiana normalizada* cuya media es cero y cuya varianza es uno,

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}. \tag{8.51}$$

La función de distribución acumulativa correspondiente a esta fdp gaussiana es

$$P\{X \leq x\} = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(y-m)^2/2\sigma^2}\, dy. \tag{8.52}$$

Esta integral no se puede evaluar en forma cerrada, por lo que requiere evaluación numérica. El procedimiento es normalizar y después acudir a una tabla de valores.

Por ejemplo, supóngase que se desea calcular $P\{X \leq (m + k\sigma)\}$ para una variable aleatoria gaussiana X. Puede escribirse

$$P\{X \leq (m + k\sigma)\} = \int_{-\infty}^{m+k\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\, dx. \tag{8.53}$$

Para normalizar, se hace $z = (x - m)/\sigma$ de forma que

$$P\{X \leq (m + k\sigma)\} = \int_{-\infty}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz. \tag{8.54}$$

Nótese que esta normalización da lugar a la siguiente regla para cambiar los límites de integración: se resta el valor medio y luego se divide entre la desviación estándar para determinar los nuevos límites de integración de la gaussiana normalizada.

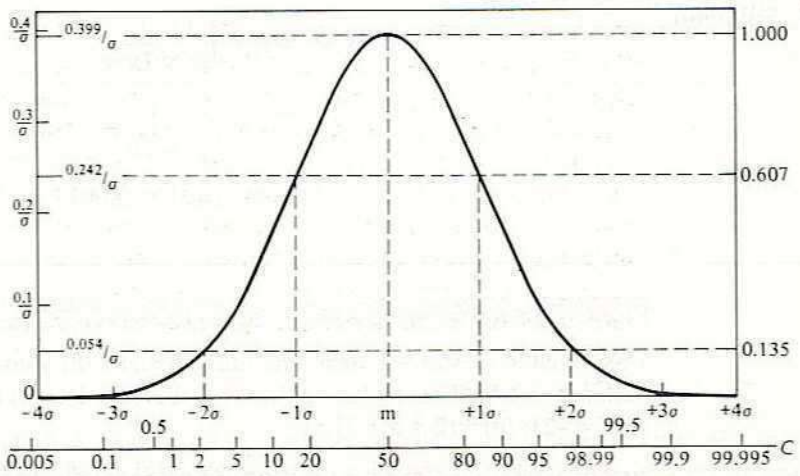


Figura 8.9 Función de densidad de probabilidad gaussiana (normal). La desviación estándar es σ, y la escala C es la función de distribución acumulativa en porcentaje.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Como resultado de la simetría par del integrando de la ecuación (8.54), es útil observar que

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\,dz = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\,dz = \frac{1}{2}. \tag{8.55}$$

Por conveniencia al referirse a valores tabulados, se define la función $Q(x)$:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2/2}\,dz\,. \tag{8.56}$$

Como se observa en la figura 8.10, $Q(x)$ es el área debajo de la gráfica de la fdp gaussiana normalizada en (x, ∞); el resto del área debajo de esta fdp es $[1 - Q(x)]$. Por lo tanto, la respuesta al ejemplo anterior se puede expresar como

$$P\{X \leq (m + k\sigma)\} = 1 - Q(x)\,. \tag{8.57}$$

Los valores tabulados de $Q(x)$ contra x se incluyen en el apéndice I.

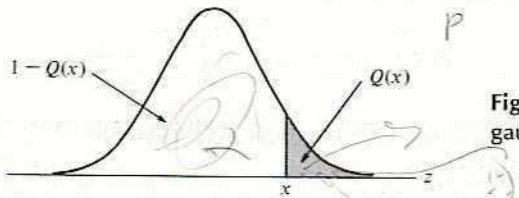


Figura 8.10 Área de la fdp gaussiana, como la describe $Q(x)$.

EJEMPLO 8.6.5

La amplitud de una señal tiene distribución gaussiana con media cero y valor cuadrático medio σ^2. Halle la probabilidad de observar la amplitud por encima de 3σ.

Solución

$$P\{X > 3\sigma\} = \int_{3\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx$$

$$= \int_3^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\,dz$$

$$= Q(3) = 0.0013\ (\approx 10^{-3})$$

EJERCICIO 8.6.5

Una variable aleatoria X tiene una fdp gaussiana. El valor medio de X es +2 V y la varianza es 4 V^2. Calcule las siguientes probabilidades: (a) $P\{X < 6\}$, (b) $P\{X > 3\}$; (c) $P\{X < -2\}$; (d) $P\{2 < X < 3\}$.

RESPUESTA: (a) 0.9772; (b) 0.3085; (c) 0.0228; (d) 0.1915.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

8.7 ★ HISTOGRAMA

La función de densidad de probabilidad (fdp) proporciona mucha información útil acerca de la variable aleatoria y permite determinar promedios estadísticos. Pero, ¿y si no se conoce la fdp? Si se dispone de valores de muestra experimentales de la variable, se puede estimar la fdp utilizando un histograma.

El *histograma* es la tabulación de la frecuencia de ocurrencia de una variable aleatoria en intervalos predeterminados. Los intervalos de tabulación se eligen adyacentes y el total del conjunto da el número total de eventos del experimento. El histograma se puede construir graficando el número de veces que se halla la variable aleatoria en cada intervalo, contra el valor de la variable. Si se normaliza dividiéndolo entre el número total de eventos, la altura representa la frecuencia relativa de ocurrencia en cada intervalo.

Si los intervalos se conocen o están preestablecidos, el cálculo de un histograma es una rutina directa de tabulación de números que se ejecuta fácilmente en un computador digital. Esto se ilustra con el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 8.7.1

Calcule el histograma de la suma de los dos primeros dígitos de la parte fraccionaria de la raíz cuadrada de los enteros de 1 a 1000.

Solución El intervalo total de resultados posibles va de 0 (0 + 0) a 18 (9 + 9). Los contadores de eventos se ajustan a 19 registros de memoria, de modo que el registro número 0 incrementa su cuenta en 1 si $X_i = 0$, el número 1 la incrementa en uno si $X_i = 1$, etcétera. Los resultados se encuentran tabulados a continuación y graficados en la figura 8.11(a). (*Nota*: Al determinar los primeros dos enteros se redondeó a dos cifras.)

Número de registro	Cuenta de eventos
0	31
1	12
2	31
3	41
4	46
5	57
6	65
7	82
8	91
9	102
10	88
11	82
12	71
13	64
14	50
15	43
16	24
17	20
18	0
Total	1000

La frecuencia relativa puede hallarse dividiendo cada cuenta entre el total (1000) (nótese que la contribución relativamente grande en cero se debe a los 31 cuadrados perfectos que hay en el intervalo). Con base en los datos del histograma, la media y

http://libreria-universitaria.blogspot.com

la desviación estándar son, respectivamente, 8.81 y 4.08. Nótese también que el histograma no dice nada acerca de la independencia (o dependencia) estadística de los valores de muestra.

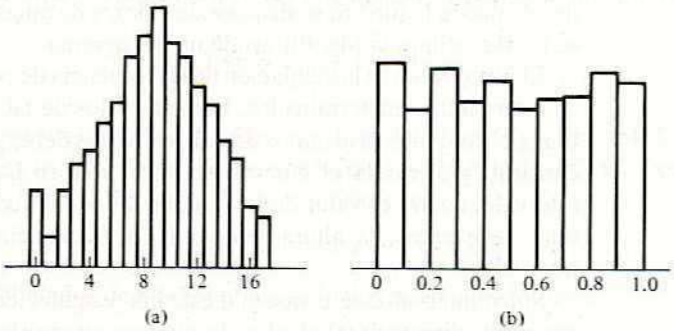


Figura 8.11 Histogramas de (a) el ejemplo 8.7.1 y (b) el ejercicio 8.7.1.

✓ EJERCICIO 8.7.1

Un posible método de generar una secuencia numérica "seudoaleatoria" en el intervalo $0 \leq X < 1$ en calculadoras pequeñas es usar la fórmula recursiva:

$$x_i = \text{parte fraccionaria de } \{(\pi + x_{i-1})^5\}.$$

Calcule el histograma de los primeros 1000 valores de muestra de X, con $x_0 = 0$, cuando cada número se trunca en un decimal.

RESPUESTA: Los resultados del histograma para $0 \leq X < 0.1$, $0.1 \leq X < 0.2$, etc., son, respectivamente, 115, 88, 111, 93, 104, 88, 94, 96, 108, 103 [véase Fig. 8.11(b)].

Los cálculos de los histogramas de la figura 8.11 son directos porque los intervalos están prefijados. Con frecuencia, cada intervalo de tabulación se llama "celda" probabilística. Por ejemplo, hay 19 celdas en el ejemplo 8.7.1 y 10 en el ejercicio 8.7.1. ¿Cuántos valores de muestra deben tomarse por celda? Esta pregunta es típica en la aplicación de la definición de frecuencia relativa de la probabilidad y no es fácil de responder de manera concreta. Por supuesto, se desean "tantos como sea posible", aunque una regla práctica de alrededor de 100 por celda es razonable.

Si los anchos de las celdas no se conocen o prefijan, la generación de un histograma que tenga sentido resulta más difícil e implica ciertos compromisos al ajustar los anchos. Por una parte, son deseables celdas estrechas para obtener una aproximación a la fdp lo más exacta posible. Por otra parte, las celdas más anchas permiten un mejor porcentaje, y se reduce la varianza en la estimación de la altura de la celda. Si los valores de muestra pueden almacenarse (p. ej., en cinta magnética), los resultados de un histograma que use un conjunto de anchos de celda pueden usarse a fin de sugerir diferentes anchos

http://libreria-universitaria.blogspot.com

para un segundo histograma con los mismos datos. La media y la varianza de la muestra también pueden calcularse para reajustar los anchos y las posiciones de las celdas. Para obtener cierta confiabilidad en la estimación de la altura de la celda, se aplica la regla práctica de tabular al menos 100 eventos por celda. Obviamente, las celdas estrechas y la tabulación de grandes cantidades de datos producen los mejores histogramas. También es útil poseer algunas claves de la naturaleza de la fdp de la variable aleatoria antes de empezar la tabulación. Para un análisis más profundo de estos problemas, el lector interesado puede consultar las referencias.†

8.8 ★ TRANSFORMACIONES DE VARIABLES ALEATORIAS

Por lo que concierne a la transmisión de señales a través de un sistema, nos interesa saber cómo describir los efectos de un sistema en una variable de entrada aleatoria. Nuestra intención es usar el concepto de correspondencia de una variable aleatoria con otra y describir esto en términos de funciones de densidad de probabilidad.

Sea la variable aleatoria Y función $f(X)$ de una variable aleatoria X. Se supone que $f(x)$ es conocida y que su primera derivada es continua, y que además se conoce la fdp de X. Como la probabilidad se conserva al hacer la correspondencia de X con Y, la probabilidad de hallar Y en un intervalo diferencial dy es igual a la probabilidad de que X se encuentre en el intervalo dx correspondiente. Para asegurar que las fdp no sean negativas, se emplean signos de magnitud absoluta y se escribe

$$p_Y(y)\,|dy| = p_X(x)\,|dx|\,, \tag{8.58}$$

o

$$p_Y(y) = p_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| \tag{8.59}$$

Para obtener la transformación expresada en la nueva coordenada y, se supone que existe la inversa de $y = f(x)$, por lo que el resultado final es

$$p_Y(y) = \left[p_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|\right]_{x=f^{-1}(y)} \tag{8.60}$$

Cierta idea intuitiva de este procedimiento basado en la correspondencia de histogramas se ilustra en la figura 8.12, donde se obtiene una aproximación del histograma de la fdp de salida $p_Y(y)$ a partir de la aproximación del histograma de la fdp de entrada $p_X(x)$ mediante una correspondencia que usa la característica de ganancia entrada-salida del sistema, $y = f(x)$. Nótese que $f(x)$ no es lineal (excepto para $x < 2$ con pendiente de 2 y para $x > 6$ con pendiente de 1).

En la transformación, cada celda probabilística del histograma de la entrada se hace corresponder con la celda respectiva del histograma de salida. El ancho de

† Véase, por ejemplo, M. Schwartz y L. Shaw, *Signal Processing: Discrete Spectral Analysis, Detection and Estimation*, Nueva York, McGraw-Hill, 1975.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

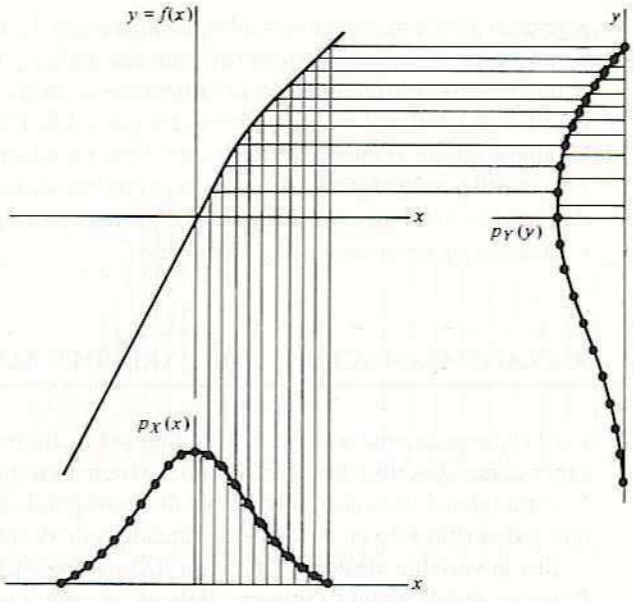


Figura 8.12 Interpretación en histograma de la transformación de variables aleatorias.

cada celda del histograma de la salida es proporcional al ancho de la celda correspondiente del histograma de entrada por la pendiente incremental (es decir, la ganancia) de la característica de entrada y salida del sistema. Para mantener la probabilidad de celda, cada valor del histograma de entrada debe multiplicarse por el inverso de la magnitud de la pendiente incremental de la característica de ganancia de entrada y salida. Si el número de celdas del histograma de entrada se hace muy grande, la transformación se aproxima a la forma diferencial de la ecuación (8.59). El paso final en la ecuación (8.60) es necesario para expresar el resultado en la nueva coordenada y.

EJEMPLO 8.8.1

Una variable aleatoria X con distribución gaussiana, media cero y varianza unitaria se aplica a un rectificador de "señal completa" cuya característica de ganancia de entrada y salida es $y = |x|/a$, $a > 0$. Determine la fdp de la variable aleatoria de salida Y.

Solución La correspondencia es uno a uno para $x < 0$ y uno a uno para $x > 0$ (una gráfica podría ser útil); en ambos casos, $y > 0$. De la ecuación (8.60) se tiene, para $x > 0$,

$$p_Y(y) = a\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right]_{x=ay} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}e^{-a^2y^2/2}, \qquad y > 0,$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

y para $x < 0$

$$p_Y(y) = a\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right]_{x=-ay} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2y^2/2}, \qquad y > 0.$$

La solución es, entonces,

$$p_Y(y) = a\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-a^2y^2/2} u(y).$$

Se puede demostrar (véase Ap. A) que la media de Y es $\sqrt{2/\pi})/a$ y la desviación estándar es $\sqrt{1 - (2/\pi)}/a$.

EJERCICIO 8.8.1

Una variable aleatoria X distribuida de manera uniforme en (0, 2) se aplica a la entrada de un sistema cuya característica de ganancia de entrada y salida es $y = 2x + 1$. Determine la fdp de la variable aleatoria de salida Y.

RESPUESTA: $p_Y(y) = [u(y - 1) - u(y - 5)]/4$.

En los casos en que la derivada de $f(x)$ tiene discontinuidades finitas, el procedimiento anterior puede alterarse un poco para tomar en cuenta las celdas probabilísticas que se corresponden en una. Esto puede realizarse de manera conveniente usando funciones impulso, como se demuestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 8.8.2

La variable aleatoria X del ejemplo 8.8.1 se aplica al rectificador de media señal cuya característica de ganancia de entrada y salida es $y = (x/a)u(x)$. Determine la fdp de la salida.

Solución Para $x > 0$, se procede igual que en el ejemplo 8.8.1. Sin embargo, para $x < 0$, todos los puntos de la fdp de entrada se corresponden en el cero de la salida. Para conservar la probabilidad, debe añadirse una contribución de $\int_{-\infty}^{0} p_X(x)dx = 1/2$ en el punto $y = 0$ para que

$$p_Y(y) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2y^2/2} u(y) + (\tfrac{1}{2})\,\delta(y).$$

La media de Y es $(\sqrt{2\pi}\, a)^{-1}$, y la desviación estándar es $\sqrt{\pi - 1} \times (\sqrt{2\pi}\, a)^{-1}$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJERCICIO 8.8.2

La variable aleatoria X del ejercicio 8.8.1 se aplica a la entrada de un sistema cuy característica de ganancia de entrada y salida es (a) $y = x - (x - 1)u(x - 1)$; (b) y $xu(x - 1)$. Determine la fdp de salida.

RESPUESTA: (a) $\frac{1}{2}[u(y) - u(y - 1)] + (\frac{1}{2})\delta(y - 1)$; (b) $\frac{1}{2}[u(y - 1) - u(y - 2)] + (\frac{1}{2})\delta(y)$.

8.9 FUNCIONES DE DENSIDAD CONJUNTA Y CONDICIONAL

En ocasiones se requieren dos o más variables aleatorias para describir un proceso físico. El mismo enfoque que se usó para las funciones de densidad de probabilidad de una dimensión puede extenderse a más de una. Para simplificar, sólo se considera el caso bidimensional.

La probabilidad de hallar X en el intervalo $x_1 < X \leq x_2$ al mismo tiempo que se halla Y en $y_1 < Y \leq y_2$ es [véase Ec. (8.27)]

$$P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} p_{XY}(x, y)\, dx\, dy\,, \tag{8.61}$$

donde $p_{XY}(x, y)$ es la *función de densidad de probabilidad conjunta* de las variables aleatorias X y Y. Para el caso bidimensional, la probabilidad es igual al volumen bajo la superficie descrita por $p_{XY}(x, y)$, como se muestra en la figura 8.13.

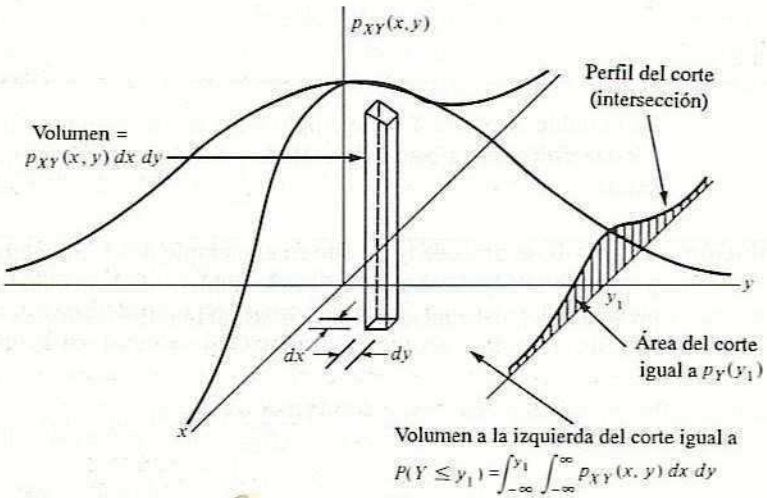


Figura 8.13 Interpretación geométrica de la función de densidad de probabilidad conjunta.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Dada la función de densidad de probabilidad conjunta $p_{XY}(x, y)$, la función de densidad de probabilidad $p_Y(y)$ se puede encontrar obteniendo la función de distribución acumulativa $F_Y(y)$ de la siguiente manera. Si sólo estamos interesados en Y, no importa el valor de X, así que

$$P(Y \leq y) = P(X \leq \infty, Y \leq y), \tag{8.62}$$

o

$$F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y), \tag{8.63}$$

y se obtiene

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y)\, dx\, dy. \tag{8.64}$$

Diferenciando ambos lados de la ecuación (8.64) con respecto a y, se obtiene

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y)\, dx. \tag{8.65}$$

Así, la función de densidad de probabilidad de X puede hallarse integrando la función de densidad de probabilidad conjunta $p_{XY}(x, y)$ sobre todos los valores de Y. Argumentos similares en la otra dimensión proporcionan $p_X(x)$.

En la figura 8.13 se muestra una interpretación geométrica de las ecuaciones (8.64) y (8.65). Si se interseca la superficie $p_{XY}(x, y)$ con el plano $y = y_1$, se obtiene el perfil de la sección mostrada. De la ecuación (8.65) se ve que el área de la sección da $p_Y(y_1)$, y que $p_Y(y)$ se puede determinar hallando la dependencia del área de la sección de y. Nótese que el volumen a la izquierda de la intersección de la figura 8.13 es igual a la integral de $p_Y(y)$ en el intervalo $y < y_1$, es decir,

$$\int_{-\infty}^{y_1} p_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{y_1} \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y)\, dx\, dy,$$

que comprueba la ecuación (8.64). Similares argumentos en la otra dimensión dan $p_X(x)$. Las funciones de densidad de probabilidad $p_X(x)$ y $p_Y(y)$ se llaman *densidades marginales.*

De manera intuitiva, es atractivo intentar identificar el perfil formado por la intersección del plano $y = y_1$ con la superficie $p_{XY}(x, y)$ como la densidad de probabilidad condicional de X dado $Y = y_1$. Sin embargo, un análisis muestra que el perfil de esta función no servirá en general como función de densidad de probabilidad porque no tiene necesariamente área unitaria. Para llenar este requisito, se puede normalizar dividiendo entre el área. Entonces se puede escribir

$$p_X(x \mid y_1) = \frac{p_{XY}(x, y_1)}{\text{área sombreada}}$$

$$= \frac{p_{XY}(x, y_1)}{p_Y(y_1)}.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Similares argumentos son válidos para $p_Y(y|x)$ de modo que, en general, este resultado puede escribirse como†

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y|x) = p_Y(y)p_X(x|y). \tag{8.66}$$

En el caso particular de que las dos variables aleatorias X y Y sean estadísticamente independientes, $p_X(x|y) = p_X(x)$, $p_Y(y|x) = p_Y(y)$, y la ecuación (8.66) se reduce a

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y). \tag{8.67}$$

En el caso de dos o más variables aleatorias, el concepto de valores separados puede ampliarse utilizando la integración múltiple de la función de densidad de probabilidad conjunta en la forma general

$$E\{g(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)p_{XY}(x, y)\,dx\,dy. \tag{8.68}$$

EJEMPLO 8.9.1

Sean X y Y dos variables aleatorias con varianzas σ_X^2 y σ_Y^2, respectivamente. Sea $Z = X + Y$ la suma con varianza σ_Z^2 en términos de σ_X^2, σ_Y^2 si X y Y son estadísticamente independientes.

Solución Haciendo cero, por conveniencia, las medias de X y Y, tal que

$$\sigma_Z^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x + y)^2 p_{XY}(x, y)\,dx\,dy.$$

Si X y Y son estadísticamente independientes, entonces

$$\begin{aligned}\sigma_Z^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x + y)^2 p_X(x)p_Y(y)\,dx\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} y^2 p_Y(y)\,dy \\ &\quad + 2\int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} yp_Y(y)\,dy.\end{aligned}$$

Como ambos factores del último término de esta ecuación son cero por definición, se tiene el resultado pedido:

$$\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

si X y Y son estadísticamente independientes. Se deja al estudiante demostrar que este resultado es el mismo si las medias son distintas de cero. Por tanto, se concluye que la varianza de una suma es la suma de las varianzas si las variables aleatorias son estadísticamente independientes.

† La notación de variable aleatoria con subíndice es incómoda y con frecuencia se omite. Si se hace esto, la notación es fluida, pero los subíndices de la variable aleatoria se deben reemplazar si se prevé que la notación pueda ser confusa.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJEMPLO 8.9.2

Una variable aleatoria Y está compuesta por las medias de N variables aleatorias estadísticamente independientes, $X_1, X_2, \ldots, X_N$, cada una con media m_X y varianza σ_X^2. (a) Determine m_Y en términos de m_X. (b) Determine σ_Y^2 en términos de σ_X^2.

Solución Puede escribirse

$$Y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i = \sum_{i=1}^{N} X_i/N .$$

a) $$m_Y = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right\} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E\{X_i\},$$

$$m_Y = m_X .$$

b) Tratando X_i/N como nuevas variables aleatorias y usando el resultado del ejemplo 8.9.1, se tiene

$$\sigma_Y^2 = \sigma_1^2/N^2 + \sigma_2^2/N^2 + \cdots + \sigma_N^2/N^2 = N\sigma_X^2/N^2,$$

$$\sigma_Y^2 = \sigma_X^2/N .$$

Combinando estos dos resultados, se concluye que si se repite un experimento que tenga regularidad estadística, entonces aumenta nuestra confianza de que los resultados promedio se aproximen a los resultados verdaderos. Para ser más precisos, el ancho de la fdp de la variable aleatoria que describe el experimento es proporcional a $\sqrt{N}$.

EJERCICIO 8.9.1

Sean dos variables aleatorias X y Y con medias m_X y m_Y, y m_Z la media de la suma $Z = X + Y$. Determine m_Z en términos de m_X y m_Y.

RESPUESTA: $m_Z = m_X + m_Y$ (es decir, "la media de una suma es la suma de las medias"). Nótese que este resultado es válido sean o no estadísticamente independientes las variables aleatorias, y que se trata de un caso especial del planteamiento más general de que la operación del valor esperado es lineal.

8.10 ★ CORRELACIÓN ENTRE VARIABLES ALEATORIAS

Por analogía con la varianza de una variable aleatoria, la *covarianza* de dos variables aleatorias X y Y se define como

$$\mu \triangleq E\{(X - m_X)(Y - m_Y)\}. \tag{8.69}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Si X y Y son estadísticamente independientes, la sustitución de la ecuación (8.67) en la (8.69) da

$$\begin{aligned}\mu &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - m_X)(y - m_Y)p_{XY}(x, y)\,dx\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_X)p_X(x)\,dx\int_{-\infty}^{\infty}(y - m_Y)p_Y(y)\,dy \\ &= (m_X - m_X)(m_Y - m_Y) = 0 .\end{aligned} \tag{8.70}$$

Es decir, la covarianza es cero si X y Y son estadísticamente independientes. Supóngase ahora que X y Y son completamente dependientes, o sea que $X = Y$ o $X = -Y$. En estos casos se halla que la ecuación (8.69) da

$$\mu = \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma_X\sigma_Y , \tag{8.71}$$

y

$$\mu = -\sigma_X^2 = -\sigma_Y^2 = -\sigma_X\sigma_Y . \tag{8.72}$$

En este punto es conveniente definir una covarianza normalizada que se llama *coeficiente de correlación*:

$$\rho \triangleq \frac{\mu}{\sigma_X\sigma_Y} . \tag{8.73}$$

Como las ecuaciones (8.71) y (8.72) son los casos extremos, se concluye que

$$-1 \le \rho \le 1 . \tag{8.74}$$

El coeficiente de correlación ρ es una medida de hasta qué punto son dependientes X y Y. Cuando $\rho = 0$, se dice que las variables aleatorias X y Y *no están correlacionadas.*

De las ecuaciones (8.70) y (8.73), se concluye que *si dos variables aleatorias son estadísticamente independientes, entonces no están correlacionadas.* Sin embargo, *el recíproco no es necesariamente cierto.*

En las pruebas estadísticas, en general no se conoce la función de probabilidad conjunta y se supone distribución uniforme. Entonces las ecuaciones (8.69) y (8.73), para el caso discreto, se convierten en

$$\rho = \frac{\Sigma_i(x_i - m_X)(y_i - m_Y)}{[\Sigma_i(x_i - m_X)^2\Sigma_i(y_i - m_Y)^2]^{1/2}} . \tag{8.75}$$

Esta ecuación se calcula con facilidad a partir de los datos numéricos.

El coeficiente de correlación definido aquí se refiere a una correlación lineal entre las variables aleatorias X y Y. Debido a ello, no es tanto una medida de la dependencia de estas variables en el sentido general, sino de la linealidad de la relación. De hecho, el cuadrado del coeficiente de correlación puede usarse como medida relativa, sobre una base cuadrática media, de cuán bien puede ajustarse una línea recta a los valores muestreados de X y Y. Por ejemplo, las variables aleatorias X y Y pueden ser perfectamente dependientes, como en la relación $X^2 + Y^2 = 1$, y tener un coeficiente de

http://libreria-universitaria.blogspot.com

correlación cero [como en el caso en que estén uniformemente distribuidas en (−1, 1)]. Este comportamiento se ilustra en el ejemplo 8.10.1.

El cálculo del coeficiente de correlación es un indicador conveniente de cuán dependientes son entre sí dos variables aleatorias con las restricciones anteriores. Por ejemplo, el coeficiente determinado entre valores de muestra adyacentes (esto es, x_i, x_{i-1}) del ejemplo 8.7.1 es $\rho = 0.391$, mientras que en el ejercicio 8.7.1 es $\rho = 5.96 \times 10^{-4}$. Por tanto, los valores de muestra sucesivos del último generador numérico están mucho menos correlacionados que los del primero.

Una expansión de la ecuación (8.69) da

$$\mu = E\{XY\} - m_X m_Y . \tag{8.76}$$

La *correlación* de dos variables aleatorias X y Y se define como el primer término de la derecha de la ecuación (8.76):

$$E\{XY\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy p_{XY}(x, y)\, dx\, dy . \tag{8.77}$$

Si X y Y tienen valor medio cero, la correlación es igual a la covarianza de X y Y.

EJEMPLO 8.10.1

Si la función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X y Y es uniforme en el círculo unitario definido por $X^2 + Y^2 \leq 1$ y suponiendo que $Y = X^2$, muestre que aunque X y Y no son estadísticamente independientes, no están correlacionadas.

Solución De la ecuación (8.65) se tiene

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y)\, dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{1}{\pi}\right) dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - x^2}, \qquad -1 \leq x < 1 ,$$

por lo que

$$E\{X\} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} x\sqrt{1 - x^2}\, dx = 0 .$$

Entonces, la ecuación (8.77) da

$$E\{XY\} = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x^3 \left(\frac{1}{\pi}\right) dx\, dy = 0 .$$

Por tanto, $\rho = 0$ [véanse Ecs. (8.73) y (8.76)] y X y Y no están correlacionadas.

✓ EJERCICIO 8.10.1

Calcule el coeficiente de correlación de los primeros seis dígitos sucesivos de la parte fraccional de π.

RESPUESTA: −0.194.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJEMPLO 8.10.2

(Regresión lineal) Suponga que un grupo de datos puntuales descritos por las variables aleatorias X y Y se van a aproximar a la línea recta $Y = aX + b$. La recta de mejor ajuste se define minimizando el error cuadrático medio $E\{[Y - (aX + b)]^2\}$.

a) Halle a y b en términos de los promedios estadísticos de X y Y.

b) Muestre que ρ^2 es una medida relativa de cuán bien se ajusta la línea recta a los datos.

Solución a)
$$\begin{aligned} E\{[Y - (aX + b)]^2\} &= E\{Y^2 - 2aXY - 2bY + a^2X^2 + 2abX + b^2\} \\ &= E\{Y^2\} - 2aE\{XY\} - 2bE\{Y\} + a^2E\{X^2\} \\ &\quad + 2abE\{X\} + b^2. \end{aligned}$$

Tomando la derivada parcial con respecto a b e igualando a cero, se obtiene

$$-2E\{Y\} + 2aE\{X\} + 2b = 0$$

o

$$b = m_Y - am_X .$$

Usando este valor de b en la ecuación anterior, se tiene

$$\begin{aligned} E\{[Y - (aX + b)]^2\} &= E\{[Y - (aX + m_Y - am_X)]^2\} \\ &= E\{[Y - m_Y) - a(X - m_X)]^2\} \\ &= E\{(Y - m_Y)^2 - 2a(X - m_X)(Y - m_Y) + a^2(X - m_X)^2\} \\ &= \sigma_Y^2 - 2a\mu + a^2\sigma_X^2 . \end{aligned}$$

Tomando la derivada parcial con respecto a a e igualando a cero, se obtiene

$$-2\mu + 2a\sigma_X^2 = 0$$

o

$$a = \mu/\sigma_X^2 \quad \text{y} \quad b = m_Y - \frac{\mu}{\sigma_X^2} m_X .$$

b)
$$\begin{aligned} E\{[Y - (aX + b)]^2\} &= \sigma_Y^2 - 2a\mu + a^2\sigma_X^2 \\ &= \sigma_Y^2 - 2\frac{\mu^2}{\sigma_X^2} + \frac{\mu^2}{\sigma_X^2} \\ &= \sigma_Y^2 - \frac{\mu^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2}\sigma_Y^2 \\ &= \sigma_Y^2(1 - \rho^2) . \end{aligned}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

El valor de ρ^2 se llama *coeficiente de determinación*. Nótese que, para $\rho = 1$, hay un ajuste perfecto de los datos a la recta calculada en los resultados anteriores. Muchas calculadoras electrónicas modernas se programan para efectuar estos cálculos.

EJERCICIO 8.10.2

Halle la recta de mejor ajuste a los siguientes seis datos puntuales (X, Y) y calcule el coeficiente de determinación: (1.0, 1.1), (2.0, 1.4), (3.0, 3.1), (4.0, 2.5), (5.0, 5.9), (6.0, 3.2).

RESPUESTA: $y = 0.67x + 0.53$; $\rho^2 = 0.53$.

8.11 ★ DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA BIVARIADA

Una variable aleatoria o "variada" que representa la salida de un experimento dado puede necesitar más de una dimensión para describir todos los posibles resultados. En este caso, puede hablarse de una distribución de probabilidad "multivariada". Tal distribución puede asumir cualquier forma, siempre que la integración o sumatoria de todos los resultados posibles se normalice a uno. Sin embargo, aquí sólo se verá un caso muy importante: el de la distribución gaussiana bivariada (es decir, bidimensional).

Se dice que dos variables aleatorias X y Y son gaussianas conjuntas si su densidad de probabilidad conjunta es

$$p_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-\left[\dfrac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2} + \dfrac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \dfrac{2\rho(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]}{2(1-\rho^2)}\right\} \tag{8.78}$$

De la ecuación (8.78) y algunas integraciones (que no se incluyen aquí), se pueden sacar las siguientes conclusiones para la distribución gaussiana bivariada.

1. *La distribución gaussiana bivariada depende sólo de los momentos de primer y segundo orden de las variables aleatorias.* Por tanto, la ecuación (8.78) sólo requiere de las medias, las varianzas y las covarianzas de las variables aleatorias.
2. *Todas las fdp individuales (unidimensionales) son gaussianas.* Por ejemplo, la sustitución de la ecuación (8.65) en la (8.78) da

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x,y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_X} e^{-(x-m_X)^2/2\sigma_X^2}. \tag{8.79}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

3. *Todas las fdp condicionales son gaussianas.* Esto se desprende de la ecuación (8.66):

$$p(x\,|\,y) = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_Y(x)},$$

y de las ecuaciones (8.78) y (8.79).

4. *Las variadas gaussianas no correlacionadas son también estadísticamente independientes* (el inverso es cierto para cualquier distribución). Esto se muestra con facilidad haciendo $\rho = 0$ en la ecuación (8.78) de modo que [véase Ec. (8.79)]

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y).$$

5. *Una combinación lineal de variadas conjuntamente gaussianas tiene una distribución gaussiana.* Por ejemplo, si

$$Z = \alpha X + \beta Y,$$

donde X y Y son gaussianas conjuntas, entonces Z es gaussiana con

$$m_Z = \alpha m_X + \beta m_Y,$$
$$\sigma_Z^2 = \alpha^2\sigma_X^2 + \beta^2\sigma_Y^2 + 2\rho\alpha\beta\sigma_X\sigma_Y.$$

Como resultado de estas propiedades y del teorema del límite central, la variable aleatoria gaussiana es un modelo de probabilidad usual en problemas de ingeniería. Los conceptos (y las conclusiones) anteriores pueden ampliarse a más de dos variadas. Sin embargo, las expresiones resultantes son poco manejables, a menos que se use notación matricial.

8.12 PROCESOS ALEATORIOS

Para determinar las probabilidades de los diversos resultados posibles de un experimento, éste se repite muchas veces. Por ejemplo, supóngase que se quieren establecer las estadísticas asociadas con el lanzamiento de un dado. Se podría proceder de cualquiera de las dos formas siguientes: en una, podrían lanzarse en forma simultánea un gran número de dados; en la otra, se lanzaría un solo dado muchas veces. En principio podría esperarse que ambos métodos arrojaran los mismos resultados si todos los dados fueran idénticos y se mantuvieran así durante el experimento. Suponiendo que los dados son legales, podría esperarse, por ejemplo, que saliera un "uno" en 1/6 de los dados del primer método y en un 1/6 de las veces en el segundo método.

Hasta aquí, los experimentos se han efectuado con el primer método. Sin embargo, la aplicación de conceptos probabilísticos a los sistemas de comunicación están realmente más cerca del segundo. ¿En qué condiciones pueden esperarse los mismos resultados? En la presente sección se investigará este problema, aunque antes debe especificarse con más precisión qué significan estos dos métodos.

De manera conceptual, el segundo método podría considerarse como un generador de números aleatorios que produce un número entre 1 y 6, accionado por un reloj. Ahora

http://libreria-universitaria.blogspot.com

supóngase que se tienen muchos de estos generadores accionados por un reloj común. Dicha colección de fuentes de señal se llama *conjunto*. Las señales de los generadores de números aleatorios individuales (en función del tiempo) se llaman *funciones de muestra*, y pueden escribirse como $X(t, \lambda_i)$ cuando hay i posibles resultados discretos. El conjunto de las posibles funciones de muestra se llama *proceso aleatorio*. Esto se ilustra en la figura 8.14.

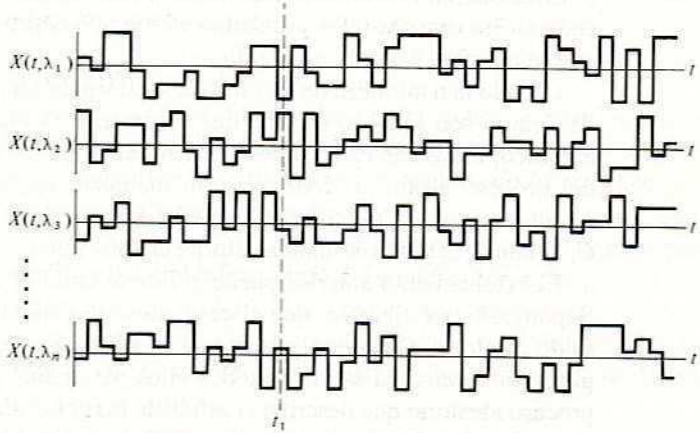


Figura 8.14 Conjunto de señales aleatorias.

Las estadísticas de las señales del conjunto pueden determinarse de mediciones hechas en un tiempo fijo $t = t_1$ de todas las funciones de muestra. Entonces puede escribirse $X(t_1, \lambda_i)$, que no es sino otra forma de escribir $X(\lambda_i)|_{t_1}$. Por tanto, un proceso aleatorio $X(t, \lambda_i)$ en un tiempo determinado es simplemente la variable aleatoria X. De las mediciones de $X(\lambda_i)|_{t_1}$, puede determinarse un promedio estadístico que se llama *promedio del conjunto*. Por ejemplo, podrían lanzarse de manera simultánea 100 monedas en $t = t_1$ y determinar las estadísticas sobre esta base. Nótese que las estadísticas y los promedios así obtenidos son los que se han visto en las secciones anteriores.

Por otra parte, se podría observar una sola función de muestra por periodo de tiempo y determinar sus estadísticas (esto correspondería a lanzar una moneda 100 veces en sucesión). De estas observaciones pueden calcularse promedios llamados *de tiempo*.

Algunas de estas ideas se pueden ilustrar graficando la salida de cierto número de generadores de señales aleatorias idénticos, como se muestra en la figura 8.14. La colección se llama conjunto y se describe por medio del proceso aleatorio $X(t, \lambda_i)$. La salida de cada generador como función del tiempo es una función de muestra del conjunto. Los valores de todas las señales en un instante $t = t_1$, se describen con las estadísticas del conjunto y se designan con la variable aleatoria X.

De las estadísticas del conjunto en un tiempo particular se halla un promedio del conjunto. Del promedio de tiempo de una función de muestra particular se halla el promedio en el tiempo. Entonces surge la pregunta: ¿son los promedios de tiempo iguales a los de conjunto?

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En general, ambos promedios no son iguales. Supóngase, por ejemplo, que las características estadísticas de las funciones de muestra del conjunto varían con el tiempo. Entonces los promedios de conjunto serían diferentes en tiempos diferentes, pero los promedios de tiempo no reflejarían esta variación. Cuando las características estadísticas de las funciones de muestra no varían con el tiempo, se dice que el proceso aleatorio es *estacionario*. Sin embargo, ni aun esta propiedad asegura que ambos promedios sean iguales. Como puede ocurrir que, mientras que cada función de muestra es estacionaria, las funciones de muestra individuales pueden diferir estadísticamente entre sí. En este caso, los promedios de tiempo dependerían de la función de muestra que se use para hallar el promedio.

Cuando la naturaleza de un proceso aleatorio es tal que los promedios de conjunto y de tiempo son iguales, se dice que el proceso es *ergódico*. Por tanto, si $X(t, \lambda_i)$ es ergódico, todos sus estadísticos pueden determinarse de una sola función de muestra del proceso aleatorio. *Todo proceso aleatorio ergódico es estacionario, pero uno estacionario no es necesariamente ergódico.* Por ejemplo, el proceso aleatorio $X(t) = C$, donde C es una constante aleatoria, es estacionario pero no ergódico.

El razonamiento anterior puede aplicarse tanto al caso continuo como al discreto. Supóngase, por ejemplo, que el conjunto está compuesto de muchos generadores de ruido aleatorio. Cada uno genera una función de muestra y, en determinado instante, puede observarse la salida de todos ellos para hallar un promedio de conjunto. Si el proceso aleatorio que describe la salida de los generadores es ergódico, las observaciones de una función de muestra en un periodo de tiempo son suficientes para obtener las estadísticas del proceso aleatorio.

Aquí sólo se examinarán los procesos aleatorios que sean ergódicos, por lo que podrán igualarse los promedios de conjunto [véanse las Ecs. (8.34) y (8.35)] con los de tiempo [véanse Ecs. (4.23) y (4.24)]:

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt, \tag{8.80}$$

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt. \tag{8.81}$$

Así mismo, las funciones de distribución acumulativa y de densidad de probabilidad pueden determinarse a partir de observaciones de una función de muestra así como de observaciones de un conjunto de funciones de muestra en un instante dado.

Una inspección de las ecuaciones (8.80) y (8.81) para procesos aleatorios ergódicos permite establecer lo siguiente:

1. El valor promedio o medio, $E\{X\}$, es igual al nivel de cd de la señal.
2. El cuadrado de la media, $[E\{X\}]^2$, es igual a la potencia de la componente de cd a través de un ohm.
3. El valor cuadrático medio, $E\{X^2\}$, es igual a la potencia promedio total de la señal $x(t)$ a través de un ohm.
4. La raíz cuadrada del valor cuadrático medio es el valor rms.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

5. La varianza, σ_X^2, es igual a la potencia promedio de la componente variable en el tiempo o de ca a través de un ohm.
6. La desviación estándar, σ_X, es el valor rms de la componente variable (ca) de la señal.
7. Si $E\{X\} = 0$, entonces σ_X es el valor rms de la señal.

Estas relaciones tienden a facilitar el uso de señales aleatorias. Sin embargo, debe recordarse que sólo son válidas para procesos aleatorios ergódicos. Como resultado de la estrecha relación con el análisis de señales, como ya se indicó, el proceso aleatorio se designará con el mismo tipo de notación que se usó para señales deterministas, por lo que $X(t, \lambda)$ se escribirá simplemente como $x(t)$.

Es instructivo revisar la relación entre las funciones de distribución acumulativa y de densidad de probabilidad de un proceso aleatorio ergódico $x(t)$. Considérese, por ejemplo, la función de muestra de un proceso aleatorio ergódico como la de la figura 8.15(a). Esta señal se aplica a la èntrada de un comparador que, a su vez, activa un contador conectado a un reloj. La cantidad proporcional de tiempo que la señal se mantiene por debajo del umbral prefijado del comparador, x_0, se grafica en función del ajuste x_0, como en la figura 8.15(b). Como se supone ergodicidad, puede verse que esto describe la función de distribución acumulativa de la variable aleatoria X asociada al proceso aleatorio $x(t)$. Como se muestra en la figura 8.15(c), la derivada de esta función proporciona la fdp.

Otra posibilidad para medir directamente la fdp de un proceso aleatorio ergódico es usar una serie de dispositivos de umbral, cada uno de los cuales detecta si la señal de entrada se halla en determinado intervalo de amplitud. Cuando ocurre esto para un detector de umbral dado, se produce e integra un impulso de nivel constante. Al final del intervalo de medición deseado, las salidas de los integradores se muestrean y exhiben, como en la figura 8.16. A medida que aumenta el intervalo de tiempo, las muestras resultantes se aproximan a la función de densidad de probabilidad si son

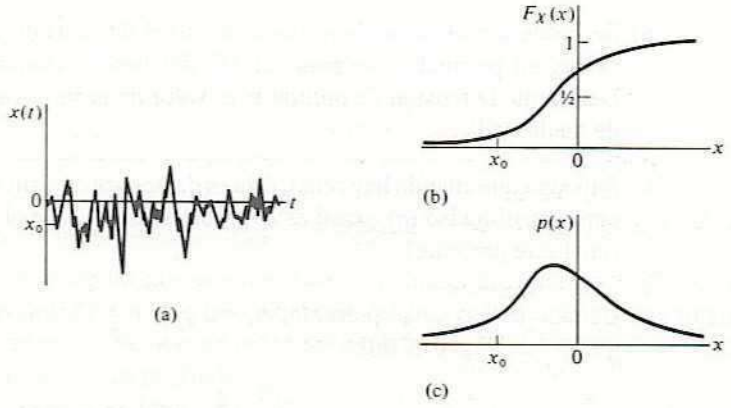


Figura 8.15 Función de muestra de un proceso aleatorio ergódico y su función de distribución acumulativa y fdp.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

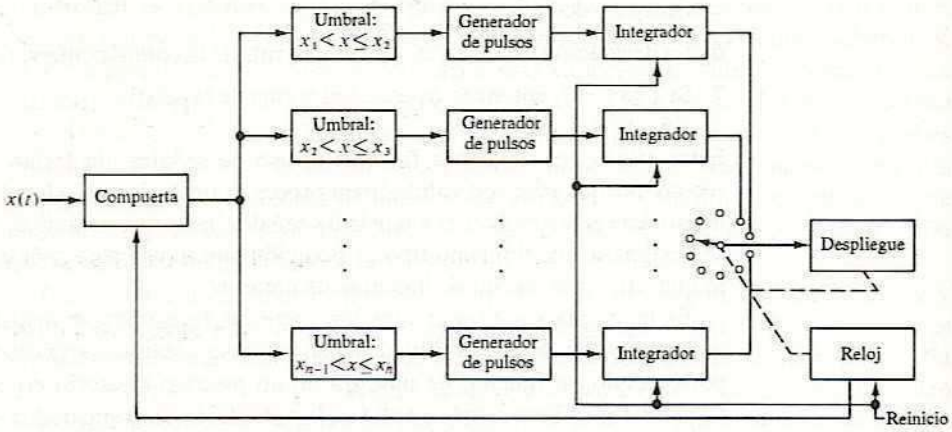


Figura 8.16 Medición relativa de la función de densidad de probabilidad de un proceso aleatorio ergódico.

normalizadas por la duración del intervalo. El "analizador multicanal" es un accesorio de laboratorio para efectuar esta medición. Nótense las similitudes con el analizador de espectro multicanal de la figura 4.2.

EJEMPLO 8.12.1

Supóngase que se desea accionar un sistema de alarma cada vez que ocurra una señal de tensión dada. También hay ruido aditivo presente, el cual tiene distribución gaussiana y valor medio cero. La alarma tiene un umbral prefijado tal que cada vez que la tensión total de entrada excede el umbral, la alarma actúa y suena una campana.

a) Se desea ajustar el umbral al menor nivel de tensión posible para que la alarma suene, en promedio, no más del 1% del tiempo cuando no haya señal presente. Determine la tensión de umbral si el valor de la raíz cuadrática media del ruido es de medio volt.

b) Suponga que cuando hay señal, ésta es de dos volts positivos. Con el umbral ajustado como en el inciso (a), ¿cuál es la probabilidad de que el timbre no suene aunque la señal esté presente?

Solución a) Cuando no hay señal presente, $m_x = 0$ y $\sigma_x = \frac{1}{2}$. El umbral x_0 se determina de modo que [véase Fig. 8.17(a)]

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-2x^2} dx = 0.01 .$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

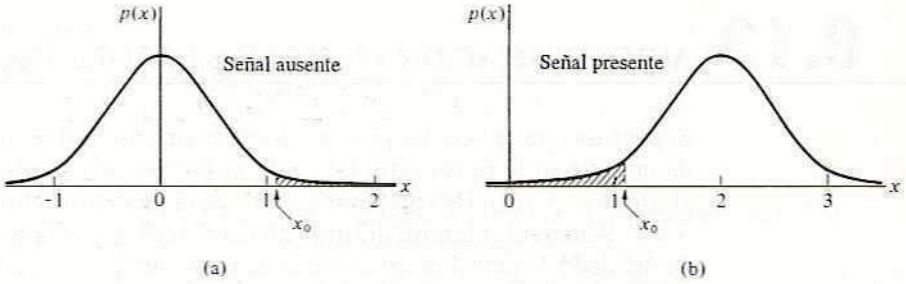


Figura 8.17 Funciones de densidad de probabilidad del ejemplo 8.12.1.

Cambiando la variable, $z = 2x$ de manera que esto se convierte en

$$\int_{2x_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz = 0.01\,,$$

o

$$Q(2x_0) = 0.01\,.$$

Usando la tabla del apéndice I, se halla que el valor del umbral necesario es $x_0 = 1.163$ volts.

b) Cuando la señal está presente, $m_x = 2$ y $\sigma_x = \frac{1}{2}$. La probabilidad de que el timbre no suene aunque la señal esté presente es [véase Fig. 8.17]

$$\begin{aligned} P(x \le x_0) &= \int_{-\infty}^{1.163} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-2(x-2)^2}\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{-1.674} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz \\ &= \int_{1.674}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz \\ &= Q(1.674) = 0.0471\,. \end{aligned}$$

EJERCICIO 8.12.1

(a) Determine un nuevo umbral para la alarma del ejemplo 8.12.1 de manera que la probabilidad de que suene sin haber señal (es decir, una falsa alarma) sea exactamente el doble que la de que no suene habiendo señal (es decir, una falla). (b) ¿Cuál será el umbral que las haga iguales?

RESPUESTA: (a) 0.927 V; (b) 1.000 V.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

8.13 AUTOCORRELACIÓN Y ESPECTROS DE POTENCIA

Supóngase que se tiene un proceso aleatorio $x(t)$, del cual se exhiben varias funciones de muestra en la figura 8.18. En $t = t_1$, el proceso $x(t)$ se caracteriza por la variable aleatoria $X_1 = x(t_1)$. De igual forma, en $t = t_2$, el proceso aleatorio se caracteriza por $X_2 = x(t_2)$. Ahora surge la posibilidad de caracterizar el proceso aleatorio $x(t)$ con la función de densidad de probabilidad conjunta de estas variables aleatorias. Por supuesto, si se fuera a describir por completo el proceso de esa manera, habría que usar un número infinito de variables aleatorias y una densidad conjunta de dimensiones infinitas. Como esto no es práctico, aquí se empleará una densidad conjunta bidimensional.

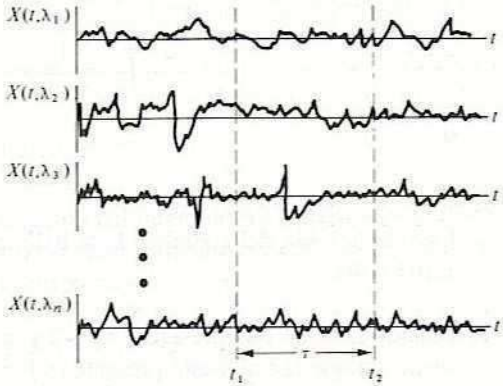


Figura 8.18 Conjunto de señales aleatorias continuas.

El primer momento del proceso aleatorio que se analiza es

$$E\{x(t)\} = m_x(t)\,. \tag{8.82}$$

Si el proceso aleatorio $x(t)$ es estacionario, entonces sus estadísticas no cambian en función del tiempo y el primer momento es constante:

$$E\{x(t)\} = m_x \qquad x(t) \text{ estacionario.} \tag{8.83}$$

El proceso aleatorio $x(t)$ se caracteriza en términos de una densidad conjunta bidimensional $p_{X_1X_2}(x_1, x_2)$ donde $X_1 = x(t_1)$ y $X_2 = x(t_2)$ (como se muestra en la figura 8.18). Hay tres diferentes segundos momentos (conjuntos) posibles: $E\{X_1^2\}$, $E\{X_2^2\}$ y $E\{X_1X_2\}$. Este último es de particular importancia y se expresa con la notación especial[†]

$$E\{x(t_1)x(t_2)\} \triangleq R_{xx}(t_1, t_2)\,, \tag{8.84}$$

[†] Esta definición es para un proceso aleatorio de valor real; para el caso de complejo, el segundo término de la expresión tiene una operación de conjugada compleja.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

o, desarrollando,

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_{X_1 X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 .$$

La función $R_{xx}(t_1, t_2)$ se llama *función de autocorrelación* del proceso aleatorio $x(t)$ evaluada en $t = t_1, t_2$. El término *autocorrelación* ya se empleó antes (véase Cap. 4), y pronto se verá por qué se usa aquí la misma palabra.

Si el proceso aleatorio $x(t)$ es estacionario, el segundo momento conjunto es independiente del valor absoluto del tiempo y sólo depende de la diferencia entre t_1 y t_2 (véase Fig. 8.18), por lo que se puede escribir

$$R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(t_2 - t_1) \qquad x(t) \text{ estacionario.} \tag{8.85}$$

En este caso, se puede hacer $\tau = t_2 - t_1$, o $t_2 = t_1 + \tau$, y suprimir el subíndice de t_1 para obtener la notación más simple

$$R_{xx}(\tau) = E\{x(t)x(t + \tau)\} \qquad x(t) \text{ estacionario.} \tag{8.86}$$

Si el proceso aleatorio $x(t)$ es estacionario, entonces la ecuación (8.86) es válida. La afirmación inversa no siempre es cierta, pero está definida por la condición más débil de un proceso aleatorio "estacionario de amplio sentido". En un proceso aleatorio estacionario de amplio sentido, la función de densidad de probabilidad conjunta sólo depende de las diferencias de tiempo entre t_1 y t_2, pero no de los valores reales de t_1 y t_2.

La función de autocorrelación es el segundo momento conjunto y, por tanto, no describe ni define por completo el proceso aleatorio $x(t)$ (es decir, no es única), pero da mucha información sobre $x(t)$. En particular, proporciona una medida de cuán dependiente es un valor determinado de una función de muestra, respecto al otro valor desplazado τ unidades de tiempo. Por ejemplo, si t_1 y t_2 están suficientemente alejados para que $x(t_1)$ y $x(t_2)$ sean estadísticamente independientes, la función de autocorrelación se reduce a

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= E\{x(t)x(t + \tau)\} \cdot \\ &= E\{x(t)\}E\{x(t + \tau)\} \\ &= m_x^2 . \end{aligned} \tag{8.87}$$

Si el valor medio de $x(t)$ es cero, el valor de τ por arriba del cual $R_{xx}(\tau)$ primero se hace cero representa el tiempo de separación necesario para que el proceso aleatorio sea "no correlacionado". En otras palabras, la forma de $R_{xx}(\tau)$ da cierta idea de cómo los valores pasados afectan a los presentes de $x(t)$ y, por tanto, de cuán rápidamente puede variar con el tiempo una función de muestra dada.

Entonces, para $m_x = 0$, se dice que $x(t)$ y $x(t + \tau)$ son *no correlacionadas* si $R_{xx}(\tau) = 0$. Si $x(t)$ y $x(t + \tau)$ son estadísticamente independientes, no se correlacionarán (sin embargo, si no son correlacionadas, no son necesariamente independientes).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Además, si el proceso aleatorio $x(t)$ es ergódico (recuérdese que ergódico implica estacionario pero no viceversa), la función de autocorrelación puede hallarse a partir de cualquier función de muestra empleando el promedio de tiempo, o

$$R_{xx}(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\}, \tag{8.88}$$

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)\,dt.$$

Ahora puede verse por qué la notación funcional $R(\tau)$ y el nombre "autocorrelación" se usaron en el capítulo 4. De hecho, ahora se pueden unir los resultados de manera que las relaciones para señales deterministas se vuelvan casos especiales de las relaciones obtenidas para procesos aleatorios. Por ejemplo, la densidad espectral de potencia de un proceso aleatorio estacionario $x(t)$ está dada por

$$S_x(\omega) = \mathcal{F}\{R_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau. \tag{8.89}$$

Si $x(t)$ es ergódico, $R_{xx}(\tau)$ está dado por la ecuación (8.88), lo que concuerda con el anterior resultado en el capítulo 4. De manera recíproca, la función de autocorrelación está dada por la transformada de Fourier inversa de la densidad espectral de potencia:

$$R_{xx}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)e^{j\omega\tau}\,d\omega. \tag{8.90}$$

La potencia media de $x(t)$ es (para una carga de un ohm)

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt = E\{x^2(t)\} = R_{xx}(0),$$

y de la ecuación (8.90),

$$R_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\,d\omega,$$

que concuerda con el concepto de densidad espectral de potencia desarrollado en el capítulo 4.

En el capítulo 4 se planteó el concepto de densidad espectral de potencia como un caso limitante de la densidad espectral de energía medida en un intervalo y dividida entre ese intervalo [véase Ec. (4.17)]. Este enfoque sirvió a nuestros propósitos de aplicación a funciones deterministas, y puede aplicarse con cuidado a otras situaciones. No obstante, en general el enfoque no es siempre correcto. Para ser válido, el valor esperado de la cantidad $|F_T(\omega)|^2/T$ debe tender al valor verdadero $S_f(\omega)$ en todas las funciones de muestra y su varianza debe tender a cero cuando $T \to \infty$. Para remediar este posible defecto, se usa la siguiente definición de densidad espectral de potencia de señales aleatorias:

$$S_f(\omega) = \lim_{T\to\infty}\left[E\left\{\frac{|F_T(\omega)|^2}{T}\right\}\right]. \tag{8.91}$$

En la sección 8.14 se examinan algunas implicaciones del uso de la ecuación (8.91) en el cálculo de la densidad espectral de potencia.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Ahora pueden aplicarse aquí todas las relaciones obtenidas en el capítulo 4 para transmitir espectros de potencia a través de sistemas lineales. Estos métodos para usar entradas aleatorias constituyen un valioso instrumento analítico en la teoría general de los sistemas.

EJEMPLO 8.13.1

El proceso aleatorio estacionario $x(t)$ tiene una densidad espectral de potencia $S_x(\omega)$. Hallar la densidad espectral de potencia de $y(t) = x(t) - x(t - T)$.

Solución I Usando la función de autocorrelación, se tiene

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= E\{[x(t) - x(t-T)][x(t+\tau) - x(t+\tau-T)]\} \\ &= E\{x(t)x(t+\tau)\} - E\{x(t)x(t+\tau-T)\} \\ &\quad - E\{x(t-T)x(t+\tau)\} + E\{x(t-T)x(t+\tau-T)\} \\ &= R_{xx}(\tau) - R_{xx}(\tau - T) - R_{xx}(\tau + T) + R_{xx}(\tau), \\ S_y(\omega) &= 2S_x(\omega) - e^{-j\omega T}S_x(\omega) - e^{j\omega T}S_x(\omega) \\ &= 2(1 - \cos \omega T)S_x(\omega). \end{aligned}$$

Solución II Usando el concepto de función de transferencia de un sistema, puede escribirse

$$y(t) = x(t) \circledast h(t),$$

donde

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \mathcal{F}\{h(t)\} = 1 - e^{-j\omega T}, \\ S_y(\omega) &= S_x(\omega)\,|H(\omega)|^2 \\ &= |1 - e^{-j\omega T}|^2 S_x(\omega) \\ &= (2 - e^{-j\omega T} - e^{j\omega T})S_x(\omega) \\ &= 2(1 - \cos \omega T)S_x(\omega). \end{aligned}$$

Por supuesto, los resultados deben concordar. En la mayoría de los casos, el primer enfoque es el más eficaz, aunque no siempre el más directo.

EJERCICIO 8.13.1

En la entrada de un filtro pasabajas ideal con frecuencia de corte de B Hz, se aplica ruido blanco con densidad espectral de potencia (bilateral) de $\eta/2$ watts por Hz.

a) Halle la función de autocorrelación de la salida del filtro.

b) ¿Cuál es el mínimo intervalo de tiempo sobre el que la salida no está correlacionada?

http://libreria-universitaria.blogspot.com

RESPUESTA: (a) $\eta B\text{Sa}(2\pi B\tau)$; (b) $\tau = 1/(2B)$ s.

La función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia, junto con la función de densidad de probabilidad, se emplean con bastante frecuencia en el análisis teórico y aplicado de señales y sistemas. Estas funciones están bosquejadas en la figura 8.19 para algunas de las señales de empleo más común.

EJEMPLO 8.13.2

(Señal binaria aleatoria) Considérese la función de muestra $x(t)$ mostrada en la figura 8.20 de la *señal binaria aleatoria* que tiene las siguientes propiedades: (a) cada pulso tiene una duración T_b; (b) los dos posibles niveles del pulso, $-A$ y $+A$, son igualmente probables, y la presencia de $-A$ o $+A$ en cualquier intervalo es estadísticamente independiente de los demás intervalos; (c) el tiempo de inicio T de $x(t)$ está uniformemente distribuido en $(0, T_b)$. Determine la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia de esta señal aleatoria.

Solución Sean t_1, t_2 dos valores arbitrarios de tiempo y supónganse que $0 < t_1 < t_2 < T_b$ y que $|t_1 - t_2| < T_b$. Entonces, $X(t_1)$ y $X(t_2)$ se encuentran en el mismo intervalo de pulso si (véase Fig. 8.20)

$$t_2 \leq T \leq t_1 + T_b.$$

La probabilidad de que T se halle en este intervalo es

$$P(t_2 \leq T \leq t_1 + T_b) = \int_{t_2}^{T_b + t_1} p_T(\xi)\, d\xi = \frac{T_b + t_1 - t_2}{T_b}.$$

Haciendo $\tau = t_2 - t_1$, este resultado puede reescribirse como

$$P(t_2 \leq T \leq t_1 + T_b) = 1 - \frac{\tau}{T_b}.$$

Usando los signos de magnitud absoluta para permitir el caso de argumentos negativos, se tiene

$$E\{x(t)x(t+\tau)\} = A^2\left(1 - \frac{|\tau|}{T_b}\right) \qquad |\tau| < T_b.$$

Para $|\tau| > T_b$ las variables aleatorias $X_t X_{t+\tau}$ son estadísticamente independientes (es decir, los pulsos se encuentran en diferentes intervalos) y puede escribirse [véase Ec. (8.87)]

$$E\{x(t)x(t+\tau)\} = m_x^2 = 0 \qquad |\tau| > T_b.$$

Combinando los resultados anteriores, la función de autocorrelación puede escribirse como [véase Ec. (3.49)]

$$R_{xx}(\tau) = A^2 \Lambda \frac{\tau}{T_b}.$$

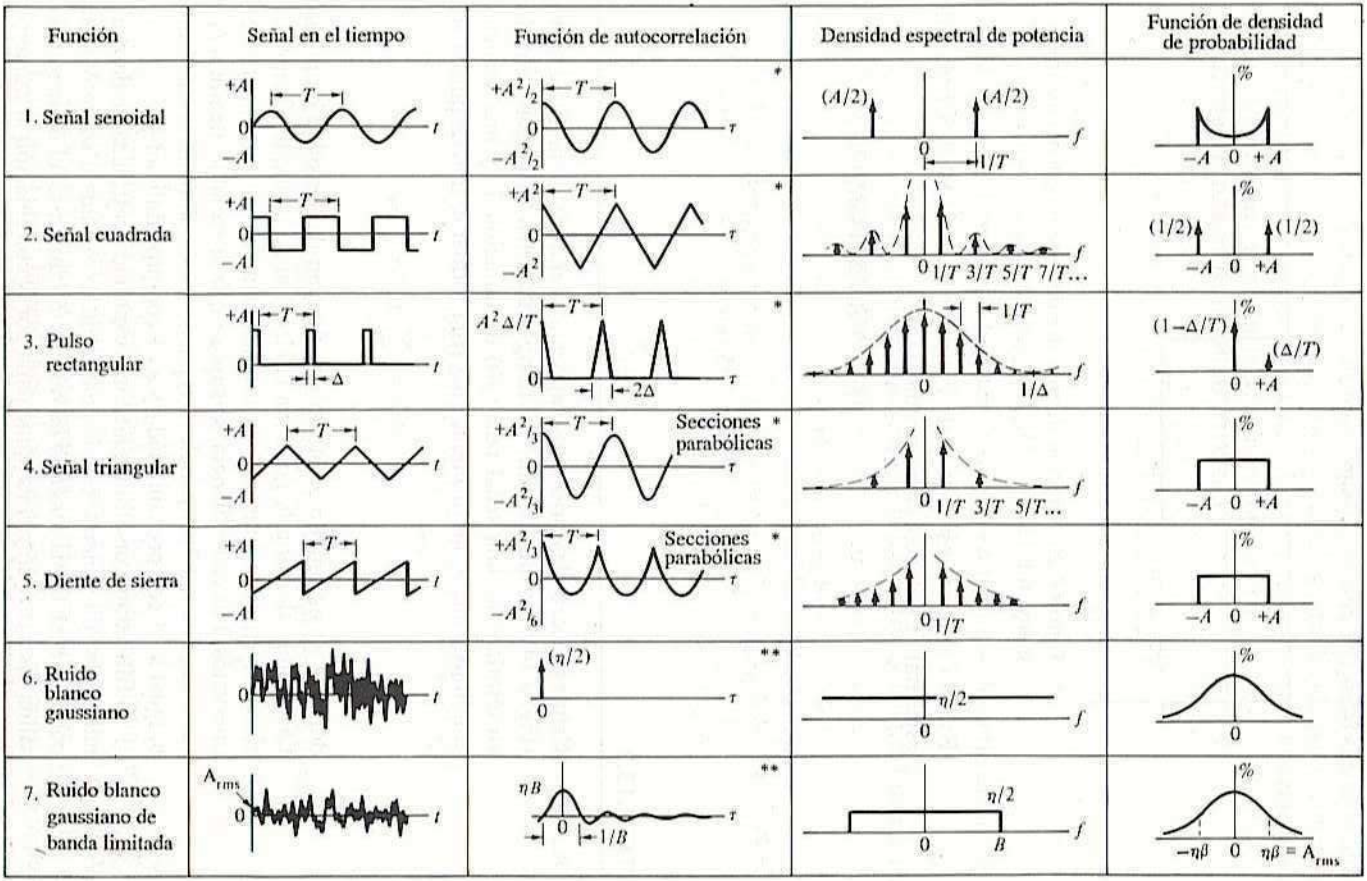


Figura 8.19 Autocorrelación, espectros y densidades de probabilidad para algunas señales de uso común (* = tiempo, ** = estadístico).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

http://libreria-universitaria.blogspot.com

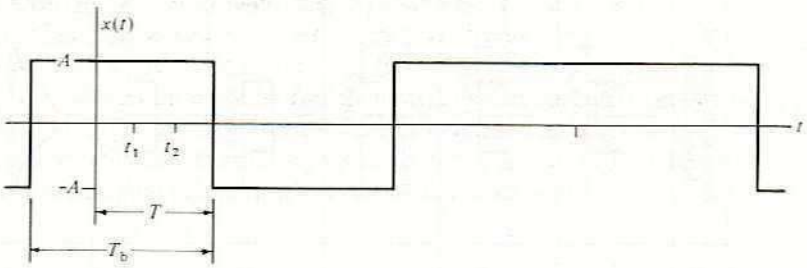


Figura 8.20 Función de muestra de la señal binaria aleatoria del ejemplo 8.13.2.

Usando el par transformado de Fourier #16 de la tabla 3.1, se halla que la densidad espectral de potencia correspondiente es

$$S_x(\omega) = A^2 T_b[\mathrm{Sa}^2(\omega T_b/2)],$$

que puede escribirse como

$$S_x(\omega) = \frac{|X(\omega)|^2}{T_b}.$$

★ EJEMPLO 8.13.3

Cierto proceso aleatorio $x(t)$ se aplica a la entrada de un filtro transversal de N etapas (Fig. 3.14); la salida del filtro se designa con $y(t)$. Supóngase que $x(t)$ puede expresarse en términos de una señal pulso $f(t)$ de duración T_b y una secuencia estacionaria de amplitudes aleatorias discretas $\{b_k\}$ para formar el tren de pulsos aleatorios†

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k f(t - kT_b - T),$$

donde T es un retardo aleatorio con función de densidad de probabilidad en $(0, T_b)$. La variable aleatoria b_k gobierna la elección de la amplitud en el intervalo $(0, T_b)$. La elección en cada intervalo es estadísticamente independiente de las de los demás intervalos. Por conveniencia, se supone que la variable aleatoria b_k tiene media cero y varianza unitaria. Por ejemplo, $x(t)$ puede verse como una señal aleatoria binaria, siendo b_k igual a +1 con probabilidad $\frac{1}{2}$ y a −1 con probabilidad $\frac{1}{2}$.

El filtro transversal introduce una cantidad controlada de dependencia de $y(t)$ entre intervalos. En general, esta dependencia se extenderá sobre N intervalos adyacentes; por ello, N se llama *longitud de restricción*. Además, el número máximo de niveles de salida discretos de $y(t)$ es aumentada por N con relación al número de niveles de $x(t)$.

† Observe que aunque aquí las $\{b_k\}$ se pueden considerar variables aleatorias, también pueden representar un proceso aleatorio como una función del parámetro discreto k y, por tanto, se usará la notación con letras minúsculas.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Por tanto, si $x(t)$ es una señal aleatoria binaria, $y(t)$ será una señal aleatoria ternaria para $N = 1$. La dependencia entre intervalos adyacentes introducida por el filtro transversal altera la densidad espectral de potencia de $x(t)$, y estos filtros se utilizan para alterar la densidad espectral de potencia de una señal aleatoria.

Designando la salida del filtro $y(t)$ como

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k f(t - kT_b - T),$$

determine

a) la función de autocorrelación $R_{cc}(k)$, y

b) La densidad espectral de potencia de $y(t)$ en términos de la densidad espectral de potencia de $x(t)$.

Solución a) Los c_k son estadísticamente independientes fuera de la longitud de restricción del filtro transversal, de modo que

$$R_{cc}(k) = 0 \text{ para } k > N.$$

Escribiendo unos cuantos términos para $k \leq N$, se halla que

$$\begin{aligned} c_k &= a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \cdots + a_N b_{k-N} \\ &= \sum_{i=0}^{N} a_i b_{k-i}. \end{aligned}$$

Usando este resultado y tomando k como parámetro de desplazamiento, se halla que la función de autocorrelación es

$$\begin{aligned} R_{cc}(k) = E\{c_\ell c_{\ell+k}\} &= \sum_{i=0}^{N} a_i \sum_{j=0}^{N} a_j E\{b_{\ell-i} b_{\ell+k-j}\} \\ &= \sum_{i=0}^{N-k} a_i a_{i+k}. \end{aligned}$$

Combinando las funciones anteriores, se obtiene el resultado buscado,

$$R_{cc}(k) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{N-k} a_i a_{i+k} & k \leq N \\ 0 & k > N \end{cases}.$$

b) La obtención del resultado deseado se facilita eligiendo primero $N = 2$ y después generalizando para N mayores. Al observar que lo que se busca es la magnitud del cuadrado de la función de transferencia en frecuencia del filtro [véase Ec. (4.21)], se halla que el procedimiento más directo es determinar la respuesta a un impulso, tomar la transformada de Fourier y después tomar la magnitud al cuadrado. Sin embargo, aquí se sigue un enfoque estadístico para ilustrar los métodos desarrollados en este capítulo. Se deja al lector comprobar que ambos enfoques conducen al mismo resultado.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Para el caso de $N = 2$,

$$y(t) = a_0x(t) + a_1x(t - T_b) + a_2x(t - 2T_b)$$

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= E\{[a_0x(t) + a_1x(t - T_b) + a_2x(t - 2T_b)] \\ &\quad \times [a_0x(t + \tau) + a_1x(t + \tau - T_b) + a_2x(t + \tau - 2T_b)]\} \\ &= (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2)R_{xx}(\tau) + (a_0a_1 + a_1a_2) \\ &\quad \times [R_{xx}(\tau - T_b) + R_{xx}(\tau + T_b)] + (a_0a_2)[R_{xx}(\tau - 2T_b) + R_{xx}(\tau + 2T_b)]. \end{aligned}$$

Del inciso (a) y $N = 2$,

$$\begin{aligned} R_{cc}(0) &= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2, \\ R_{cc}(1) &= a_0a_1 + a_1a_2, \\ R_{cc}(2) &= a_0a_2, \\ R_{cc}(k) &= 0 \quad \text{for } k > 2, \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= R_{cc}(0)R_{xx}(\tau) + R_{cc}(1)[R_{xx}(\tau - T_b) + R_{xx}(\tau + T_b)] \\ &\quad + R_{cc}(2)[R_{xx}(\tau - 2T_b) + R_{xx}(\tau + 2T_b)]. \end{aligned}$$

Tomando la transformada de Fourier en ambos lados y utilizando el teorema del retardo, se obtiene

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= R_{cc}(0)S_x(\omega) + R_{cc}(1)S_x(\omega)[e^{-j\omega T_b} + e^{j\omega T_b}] \\ &\quad + R_{cc}(2)S_x(\omega)[e^{-j2\omega T_b} + e^{j2\omega T_b}] \end{aligned}$$

o

$$S_y(\omega) = S_x(\omega)\left[R_{cc}(0) + 2\sum_{k=1}^{2} R_{cc}(k)\cos(k\omega T_b)\right].$$

Generalizando este resultado, se tiene

$$S_y(\omega) = S_x(\omega)\left[R_{cc}(0) + 2\sum_{k=1}^{N} R_{cc}(k)\cos(k\omega T_b)\right].$$

Nótese que los términos entre corchetes representan la forma espectral (el filtrado) producto de la dependencia entre N impulsos adyacentes.

★ EJEMPLO 8.13.4

Considere una señal binaria aleatoria $x(t)$ con las siguientes propiedades: (a) cada pulso tiene una duración T_b; (b) los dos estados posibles en cada intervalo están representados por las señales $f_1(t)$, $f_2(t)$ con sus transformadas de Fourier correspondientes $F_1(\omega)$, $F_2(\omega)$; (c) la probabilidad de que en cualquier intervalo se seleccione $f_1(t)$ es p y la de que se seleccione $f_2(t)$ es $q = (1 - p)$; (d) la elección en cualquier intervalo es

http://libreria-universitaria.blogspot.com

estadísticamente independiente de la de todos los demás. Determine la densidad espectral de potencia de esta señal binaria aleatoria.†

Solución Como primer paso, se denota el posible contenido periódico de $x(t)$ como $v(t)$:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [pf_1(t - nT_b) + qf_2(t - nT_b)].$$

Verificando, se observa que $v(t + T_b) = v(t)$ y, por tanto, $v(t)$ es periódica con periodo T_b. En consecuencia, puede expresarse en términos de una serie de Fourier cuyos coeficientes son los V_n. Los V_n pueden expresarse en términos de las transformadas de Fourier $F_1(\omega)$, $F_2(\omega)$ como [véase Ec. (3.15)]

$$V_n = \frac{1}{T_b}[pF_1(n\omega_b) + qF_2(n\omega_b)],$$

donde $\omega_b = 2\pi/T_b$. La densidad espectral de potencia resultante es [véase Ec. (4.20)]

$$S_v(\omega) = \frac{1}{T_b^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |pF_1(n\omega_b) + qF_2(n\omega_b)|^2 2\pi\,\delta(\omega - n\omega_b).$$

Para considerar el restante contenido (no periódico), se trunca la señal en un intervalo T y se procede a utilizar la ecuación (8.91). Si la señal truncada $x_T(t)$ se representa con

$$x_T(t) = \sum_{n=-N}^{N} x_n(t),$$

donde

$$x_n(t) = \begin{cases} f_1(t - nT_b) & \text{con probabilidad } p \\ f_2(t - nT_b) & \text{con probabilidad } q \end{cases}.$$

Sustrayendo el contenido periódico, sea $u_T(t) = x_T(t) - v_T(t)$, o

$$u_T(t) = \sum_{n=-N}^{N} u_n(t),$$

donde

$$u_n(t) = \begin{cases} f_1(t - nT_b) - pf_1(t - nT_b) - qf_2(t - nT_b) & \text{con probabilidad } p \\ f_2(t - nT_b) - pf_1(t - nT_b) - qf_2(t - nT_b) & \text{con probabilidad } q \end{cases}.$$

que se puede reescribir en la notación más compacta

$$u_n(t) = a_n[f_1(t - nT_b) - f_2(t - nT_b)],$$

† W. R. Bennett y J. R. Davey, *Data Transmission*, Nueva York, McGraw-Hill, 1965, págs. 317-319; véase también W. C. Lindsey y M. K. Simon, *Telecommunication Systems Engineering*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, Inc., 1973, págs. 17-19. La deducción de este ejemplo es semejante al método que se utiliza en Bennet y Davey.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

donde

$$a_n = \begin{cases} q & \text{con probabilidad } p \\ -p & \text{con probabilidad } q \end{cases}$$

Los $\{a_n\}$ forman una secuencia de amplitudes aleatorias con propiedades

$$E\{a_n\} = 0; \qquad E\{a_m a_n\} = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ pq & \text{para } m = n \end{cases}.$$

Efectuando un intercambio de la integración y la sumatoria, y utilizando la propiedad de retardo, se halla que la transformada de Fourier de $u_T(t)$ es

$$U_T(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{-jn\omega_b}[F_1(\omega) - F_2(\omega)].$$

Procediendo, escribimos

$$E\{|U_T(\omega)|^2\} = E\left\{\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=-N}^{N} a_m a_n e^{j(n-m)\omega_b}[F_1(\omega) - F_2(\omega)][F_1^*(\omega) - F_2^*(\omega)]\right\}.$$

Para evaluar el valor esperado, notamos que las únicas variables son las a, y el valor esperado no es cero para $n = m$, así que

$$\begin{aligned} E\{|U_T(\omega)|^2\} &= \sum_{n=-N}^{N} pq|F_1(\omega) - F_2(\omega)|^2 \\ &= (2N + 1)pq|F_1(\omega) - F_2(\omega)|^2. \end{aligned}$$

Usando la ecuación (8.91) y notando que $T = (2N + 1)T_b$, encontramos que la densidad espectral de potencia de $u(t)$ es

$$\begin{aligned} S_u(\omega) &= \lim_{N\to\infty} \frac{(2N + 1)pq|F_1(\omega) - F_2(\omega)|^2}{(2N + 1)T_b} \\ &= pq\frac{|F_1(\omega) - F_2(\omega)|^2}{T_b}. \end{aligned}$$

Combinando los resultados para los contenidos periódico y no periódico, se tiene

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= p(1 - p)\frac{1}{T_b}|F_1(\omega) - F_2(\omega)|^2 \\ &\quad + \frac{2\pi}{T_b^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |pF_1(n\omega_b) + (1 - p)F_2(n\omega_b)|^2 \delta(\omega - n\omega_b). \end{aligned}$$

Nótese que si las transformadas de Fourier tanto de $f_1(t)$ como de $f_2(t)$ desaparecen en el armónico de ω_b, o si las contribuciones ponderadas de las transformadas son iguales pero de signo contrario, no aparecerá ningún componente discreto en la densidad

http://libreria-universitaria.blogspot.com

espectral de potencia a la frecuencia de ese armónico. En el caso especial en que $p = \frac{1}{2}$ y $f_1(t) = -f_2(t)$, el resultado se simplifica a

$$S_x(\omega) = \frac{|F(\omega)|^2}{T_b}.$$

8.14 ★ CÁLCULO NUMÉRICO DE LOS ESPECTROS DE POTENCIA

En la sección anterior se expuso el concepto de densidad espectral de potencia como caso límite del promedio de conjunto de la densidad espectral de energía [véase Ec. (8.91)]

$$S_f(\omega) = \lim_{T\to\infty}\left(E\left\{\frac{|F_T(\omega)|^2}{T}\right\}\right).$$

En esta ecuación, $S_f(\omega)$ es la densidad espectral de potencia de la señal $f(t)$ cuya transformada de Fourier es $F_T(\omega)$ en $(-T/2, T/2)$. No es práctico llevar al límite cuando $T \to \infty$, por lo que habrá que examinar algunas consecuencias de usar un intervalo de observación finito. Aquí se destacan los métodos numéricos para calcular la densidad espectral de potencia.

La estimación de la densidad espectral de potencia de $f(t)$ se denota con $S_T(\omega)$ sobre un intervalo de observación de T unidades. Entonces, para una función de muestra dada, la ecuación (8.91) queda

$$S_T(\omega) = \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}. \tag{8.92a}$$

Con frecuencia es de interés el caso discreto, en el que la transformada de Fourier discreta (TFD) se usa para aproximar la transformada basándose en N datos de muestra discretos. Entonces, N sustituye a T y $F_N(\omega_n)$ a $F_T(\omega)$, donde $F_N(\omega_n)$ es la TFD de $f(kT/N)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, (N-1)$. Con estos cambios, la ecuación (8.92a) puede reescribirse como

$$S_N(\omega_n) = \frac{|F_N(\omega_n)|^2}{N}. \tag{8.92b}$$

Por conveniencia, se tratarán el caso continuo y el discreto, y la notación hará evidente de cuál de ellos se trata.

La estimación espectral dada por la ecuación (8.92) se llama a menudo *periodograma* porque en principio se usó para investigar la posible periodicidad de registros de datos. Su empleo para estimar los espectros de potencia a partir de datos numéricos está aumentando como resultado de la eficiencia y la conveniencia del algoritmo de la transformada de Fourier rápida para hallar $F_N(\omega_n)$.

Como se supone que los datos, al menos en parte, provienen de fuentes aleatorias (p. ej., ruido aditivo), surgirán diferentes valores de $S_N(\omega_n)$ de diferentes funciones de muestra $f(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, (N-1)$ para cada ω_n y la colección de estos valores forma

http://libreria-universitaria.blogspot.com

un conjunto. Es una característica deseable en el estimador que la media de este conjunto sea el valor real a esa frecuencia, es decir, que $E\{S_N(\omega_n)\} = S_f(\omega_n)$. Si esto es cierto, se habla de un estimador insesgado.

Usando la ecuación (8.92) y tomando el valor esperado, se tiene

$$\begin{aligned} E\{S_T(\omega)\} &= E\left\{\mathcal{F}\left\{\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \text{rect}\ (t/T) f(t+\tau)\ \text{rect}\ [(t+\tau)/T]\,dt\right\}\right\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} E\{f(t)f(t+\tau)\}\ \text{rect}\ (t/T)\ \text{rect}\ [(t+\tau)/T]\,dt\right\} \\ &= \mathcal{F}\left\{R_{ff}(\tau)\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\ (t/T)\ \text{rect}\ [(t+\tau)/T]\,dt\right\} \\ &= \mathcal{F}\{R_{ff}(\tau)[1 - |\tau|/T]\} \\ &= \mathcal{F}\{R_{ff}(\tau)\Lambda(\tau/T)\}\,. \end{aligned} \tag{8.93a}$$

En la notación de variable discreta, esto puede reescribirse como

$$E\{S_N(\omega_n)\} = \text{DFT}\{R_{ff}(k)\Lambda(k/N)\}\,. \tag{8.93b}$$

El segundo término entre llaves surge como resultado de truncar datos y se llama función *ventana*. Debido a esta función, el estimador espectral $S_N(\omega_n)$ proporciona una estimación *sesgada* de $S_f(\omega)$. Nótese que cuando $N \to \infty$ ($T \to \infty$), $S_N(\omega_n)$ [$S_T(\omega)$] se hace *asintóticamente insesgado*.

Los efectos de la función ventana no son diferentes de los que se examinaron en el capítulo 3 para la TFD y pueden mostrarse usando la propiedad de convolución de frecuencia en la ecuación (8.93):

$$E\{S_T(\omega)\} = S_f(\omega) \circledast T\ \text{Sa}^2\ (\omega T/2)\,. \tag{8.94}$$

La función ventana limita la resolución de frecuencia a $1/T$ o $(1/N)$ y tiene también algún efecto sobre el sesgo de la estimación espectral.

Otra propiedad deseable de un estimador es que la varianza de la estimación se haga pequeña cuando T (o N) crezca. Se dice que un estimador con esta propiedad es *consistente*. Obtener una relación para la varianza del estimador espectral implica momentos de cuarto orden y resulta difícil conseguir un resultado general. Si los datos consisten en valores de muestra de un proceso aleatorio gaussiano, puede mostrarse que la desviación estándar de la estimación de la densidad espectral es del mismo orden del de la estimación y no depende de N.[†] Esta conclusión es más o menos válida para datos no gaussianos, de lo que se concluye que el estimador descrito por la ecuación (8.92) produce una estimación *inconsistente* de la densidad espectral de potencia.

En la práctica, la varianza del estimador espectral puede reducirse por medio de suavizado. Una forma es suavizar un conjunto. Dados N datos de muestra, pueden usarse $N' = N/K$ puntos para cada uno de los K periodogramas y luego promediarse éstos para

[†] J. S. Bendat y A. G. Piersol, *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, 2a. ed., Nueva York, Wiley-Interscience, 1986.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

cada frecuencia. Suponiendo independencia estadística, la varianza disminuye en el factor K (véase Ej. 8.9.2). Nótese que la resolución de frecuencias también disminuye en el mismo factor (es decir, $1/N'$ en lugar de $1/N$).

Una segunda forma es suavizar las frecuencias, calculando un periodograma a partir de los N datos de muestra y promediando varias estimaciones adyacentes en frecuencia. Esto es análogo al filtrado pasabajas del periodograma y reduce la varianza a expensas de la disminución de la resolución en frecuencia.

En la práctica, las elecciones adecuadas para el cálculo de una densidad espectral de potencia se pueden hacer en forma sencilla si se conoce alguna información acerca de las características de la densidad espectral. Si se conoce poco, deberán hacerse algunas gráficas espectrales tentativas antes de obtener las mejores combinaciones de truncamiento, promediación y longitudes del registro de datos.

EJERCICIO 8.14.1

Una posible estimación de la función de autocorrelación $R_{ff}(\tau)$ basada en datos de observación finita en $(-T/2, T/2)$ es

$$\hat{R}_{ff}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t+\tau)\,dt\,.$$

(a) ¿Es $\hat{R}_{ff}(\tau)$ un estimador insesgado de $R_{ff}(\tau)$? (b) Compare $\hat{R}_{ff}(\tau)$ y $R_{ff}(\tau)$ usado en la ecuación (8.93).

RESPUESTA: (a) Sí; (b) En $\hat{R}_{ff}(\tau)$ el traslapo de $f(t)$ y $f(t+\tau)$ se trunca en $(-T/2, T/2)$; en la ecuación (8.93), *cada función* se trunca en este intervalo.

8.15 RESUMEN

La probabilidad es una forma de medir el número de resultados favorables de un experimento en relación con el número total de posibles resultados. La posibilidad de un resultado es positiva, de valor real y acotada entre 0 y 1. Si la ocurrencia de un resultado implica la no ocurrencia de otro, entonces son mutuamente excluyentes. Cuando los resultados son mutuamente excluyentes, sus probabilidades son aditivas.

La probabilidad de determinado resultado con base en el conocimiento de un segundo resultado se llama probabilidad condicional. Dos resultados son estadísticamente independientes si la probabilidad condicional es igual a la probabilidad de ocurrencia. La probabilidad conjunta de varios resultados es la probabilidad de la ocurrencia conjunta. La probabilidad conjunta de resultados estadísticamente independientes es igual al producto de las probabilidades de ocurrencia individuales.

Una variable aleatoria es una regla (correspondencia) que asigna un número a cada posible resultado. Una variable aleatoria puede ser continua o discreta.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La función de distribución acumulativa de una variable aleatoria es la probabilidad de que ésta sea menor que determinado valor (que constituye el argumento) para un experimento dado. La función de densidad de probabilidad (fdp) es la derivada de la función de distribución acumulativa.

El valor esperado es un promedio estadístico ponderado por una fdp. El valor esperado de X^n se llama momento n-ésimo de la variable aleatoria X. Los momentos primero y segundo se llaman, respectivamente, valor medio y valor cuadrático medio. El segundo momento con respecto a la media se llama varianza y su raíz cuadrada es la *desviación estándar.*

Ejemplos de variables aleatorias continuas son las distribuciones uniforme y gaussiana. Las distribuciones binomial y de Poisson son ejemplos de variables aleatorias discretas.

Un histograma es la tabulación de la frecuencia de ocurrencia de una variable aleatoria en intervalos prefijados. El histograma puede emplearse para aproximar la fdp de la variable aleatoria. La transformación de una variable aleatoria a través de un *sistema se puede tomar como una correspondencia de la fdp usando la pendiente* diferencial de la característica de ganancia de entrada y salida del sistema.

Las distribuciones de probabilidad bivariadas describen variables aleatorias bidimensionales. La dependencia estadística de dos variables aleatorias se mide por la correlación entre ellas. Si el coeficiente de correlación es cero, se dice que las variables no están correlacionadas.

Un proceso aleatorio es una colección o "conjunto" de variables aleatorias ordenadas en forma cronológica. Cada señal graficada en función del tiempo se llama función de muestra. El proceso aleatorio es estacionario si sus estadísticos no varían con el tiempo y es ergódico si todos sus estadísticos pueden calcularse a partir de una sola función de muestra, así como a partir del conjunto.

Un momento conjunto es el valor esperado de la ocurrencia conjunta de dos o más resultados. La función de autocorrelación es el segundo momento conjunto de dos variables aleatorias. Para un proceso aleatorio, estas variables se especifican en dos instantes. Si el proceso es estacionario, sólo interesa la diferencia en tiempo.

La densidad espectral de potencia de un proceso aleatorio estacionario está dada por *la transformada de Fourier de la función de autocorrelación. Puede estimarse en forma* numérica calculando el cuadrado de la magnitud de la transformada de Fourier discreta y dividiendo entre el número de datos de muestra.

Referencias seleccionadas para lectura adicional

1. Beckmann, P., *Elements of Applied Probability Theory*, Nueva York, Harcourt, Brace & World, 1968.
   Excelente introducción a la probabilidad, a las variables aleatorias y a los procesos aleatorios, con bastantes ejemplos interesantes.
2. Peebles, P. Z., *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles*, Nueva York, McGraw-Hill, 1980.
   Buena introducción a la probabilidad, a las variables aleatorias y a los procesos aleatorios, con muchos ejercicios.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

3. Cooper, G. R. y McGillem, C. D., *Probabilistic Methods of Signal and System Analysis*, 2a. ed., Nueva York, Holt, Rinehart & Winston, 1986.
Introducción a la probabilidad, escrita para estudiantes de ingeniería, con aplicaciones en sistemas y filtrado; se dan referencias adicionales y comentarios al final del primer capítulo.

4. León-García, A., *Probability and Random Processes for Electrical Engineering*, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1989.
Escrito para estudiantes de ingeniería, con aplicaciones a problemas de ingeniería y métodos computacionales. El primer capítulo es una buena lectura para estudiantes interesados en sistemas de comunicación.

5. Helstrom, C. W., *Probability and Stochastic Processes for Engineers*, Nueva York, Macmillan, 1984.
Buen tratamiento introductorio de probabilidad y variables aleatorias, con énfasis adicional en pares de variables aleatorias; contiene aplicaciones a ingeniería y física.

6. Bendat, J. S. y Piersol, A. G., *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, 2a. ed., Nueva York, John Wiley & Sons, 1986.
Análisis de los requisitos y las limitaciones de la adquisición y medición de datos aleatorios, con aplicación a problemas físicos.

7. Stark, H. y Woods, J. W., *Probability, Random Processes and Estimation Theory for Engineers*, Englewoods Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1986.
Texto bien escrito sobre probabilidad para últimos cursos de licenciatura o para graduados, con algunas aplicaciones de ingeniería y énfasis en detección y estimación.

8. Papoulis, A., *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 2a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1984.
Texto de probabilidad muy utilizado entre graduados, con algunas aplicaciones de ingeniería. El capítulo 1 contiene un análisis interesante y de fácil lectura acerca de los diversos conceptos de probabilidad.

PROBLEMAS

8.1.1 Se elige una carta de una baraja de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta sea a) un diamante; b) un 2; c) el 2 de diamantes; d) un 2, un 4 o un 6?

8.1.2 ¿Cuál es la probabilidad de que el último dígito de un número telefónico sea a) impar; b) 5: c) 5 o 6? d) impar o divisible entre cuatro? (Suponga que todos los dígitos son igualmente probables.)

8.1.3 Una moneda legal es aquella en la cual cara y cruz son igualmente probables.

a) Se lanzan tres monedas legales. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos caras y una cruz?

b) Se lanzan cuatro monedas legales. ¿Cuál es la probabilidad de que la mitad sean caras?

8.1.4 Una caja llena de bolas blancas y negras contiene el doble de bolas blancas que de negras. Suponga que se mezclan y sólo se distinguen por el color. Suponga también que se extrae cierto número de bolas sin reemplazar y que todas ellas son negras. Si la probabilidad de extraer una bola adicional es exactamente 10% menor que si se hubiesen reemplazado las bolas negras, determine el número de bolas mínimo que había al principio en la caja.

8.2.1 Cierto transmisor operado en forma remota se programa para que se apague si los eventos A y B (p. ej., tensiones por encima de la tolerancia) ocurren de manera simultánea, o si

http://libreria-universitaria.blogspot.com

3. Cooper, G. R. y McGillem, C. D., *Probabilistic Methods of Signal and System Analysis*, 2a. ed., Nueva York, Holt, Rinehart & Winston, 1986.
Introducción a la probabilidad, escrita para estudiantes de ingeniería, con aplicaciones en sistemas y filtrado; se dan referencias adicionales y comentarios al final del primer capítulo.

4. León-García, A., *Probability and Random Processes for Electrical Engineering*, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1989.
Escrito para estudiantes de ingeniería, con aplicaciones a problemas de ingeniería y métodos computacionales. El primer capítulo es una buena lectura para estudiantes interesados en sistemas de comunicación.

5. Helstrom, C. W., *Probability and Stochastic Processes for Engineers*, Nueva York, Macmillan, 1984.
Buen tratamiento introductorio de probabilidad y variables aleatorias, con énfasis adicional en pares de variables aleatorias; contiene aplicaciones a ingeniería y física.

6. Bendat, J. S. y Piersol, A. G., *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, 2a. ed., Nueva York, John Wiley & Sons, 1986.
Análisis de los requisitos y las limitaciones de la adquisición y medición de datos aleatorios, con aplicación a problemas físicos.

7. Stark, H. y Woods, J. W., *Probability, Random Processes and Estimation Theory for Engineers*, Englewoods Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1986.
Texto bien escrito sobre probabilidad para últimos cursos de licenciatura o para graduados, con algunas aplicaciones de ingeniería y énfasis en detección y estimación.

8. Papoulis, A., *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 2a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1984.
Texto de probabilidad muy utilizado entre graduados, con algunas aplicaciones de ingeniería. El capítulo 1 contiene un análisis interesante y de fácil lectura acerca de los diversos conceptos de probabilidad.

PROBLEMAS

8.1.1 Se elige una carta de una baraja de 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta sea a) un diamante; b) un 2; c) el 2 de diamantes; d) un 2, un 4 o un 6?

8.1.2 ¿Cuál es la probabilidad de que el último dígito de un número telefónico sea a) impar; b) 5: c) 5 o 6? d) impar o divisible entre cuatro? (Suponga que todos los dígitos son igualmente probables.)

8.1.3 Una moneda legal es aquella en la cual cara y cruz son igualmente probables.

a) Se lanzan tres monedas legales. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan dos caras y una cruz?

b) Se lanzan cuatro monedas legales. ¿Cuál es la probabilidad de que la mitad sean caras?

8.1.4 Una caja llena de bolas blancas y negras contiene el doble de bolas blancas que de negras. Suponga que se mezclan y sólo se distinguen por el color. Suponga también que se extrae cierto número de bolas sin reemplazar y que todas ellas son negras. Si la probabilidad de extraer una bola adicional es exactamente 10% menor que si se hubiesen reemplazado las bolas negras, determine el número de bolas mínimo que había al principio en la caja.

8.2.1 Cierto transmisor operado en forma remota se programa para que se apague si los eventos A y B (p. ej., tensiones por encima de la tolerancia) ocurren de manera simultánea, o si

http://libreria-universitaria.blogspot.com

ocurre el evento C. La probabilidad de que ocurra A es de 0.001, la probabilidad de que ocurra B es de 0.002 y la probabilidad de que ocurra C es de 10^{-5}.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se apague el transmisor?

b) Si $P(A|B) = 0.01$, ¿son los eventos A y B estadísticamente independientes?

c) ¿Cuál es el valor de $P(B|A)$?

8.2.2 Se compra una parte electrónica a tres vendedores. Los registros muestran que las tasas promedio de partes defectuosas son de 0.02% para el vendedor A, de 0.013% para el vendedor B y de 0.01% para el vendedor C. De 50 000 partes compradas, 10 000 son del vendedor A, 15 000 del vendedor B y 25 000 del vendedor C. Las partes se combinan y utilizan en producción.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una parte dada en el inventario combinado, seleccionada al azar, sea defectuosa?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la parte defectuosa provenga del vendedor A?

8.2.3 Encuentre la posibilidad de derribar un avión si se lanzan tres misiles de manera sucesiva, cada uno con 1/3 de probabilidad de dar en el blanco. Suponga que el avión cae al ser alcanzado. Resuelva este problema mediante dos métodos diferentes, comenzando cada uno como sigue:

a) Encuentre la probabilidad de que ocurran tres errores; éstos son estadísticamente independientes.

b) Escriba una expresión, en términos de una cadena de probabilidades condicionales, para la probabilidad total de un acierto.

8.2.4 Cierto sistema binario PCM transmite los dos estados binarios +1, −1 con igual probabilidad (p. ej., utilizando la modulación de fase de una senoidal). Sin embargo, como resultado del ruido, el receptor comete algunos errores de reconocimiento; suponga que $P(+1|-1) = 0.10$ y $P(-1|+1) = 0.20$. Otra posibilidad es que, como resultado de la distorsión por trayectoria, el receptor pierda la fuerza de la señal necesaria para tomar una decisión. Por tanto, se identifican tres posibles estados del receptor: +1, 0, −1, donde 0 corresponde a "pérdida de señal". Para la última condición, sea $P(0|+1) = P(0|-1) = p$, donde p es la probabilidad de pérdida.

a) ¿Cuáles son las probabilidades de unos y ceros para el receptor si $p = 0$?

b) Si el receptor hace una decisión de +1, y $p = 0$, ¿cuál es la probabilidad de que se haya enviado realmente un +1?

c) Repita la parte (b) si $p \neq 0$.

8.3.1 Considere el experimento de lanzar cuatro monedas legales; asigne 1 a "cara", 0 a "cruz", y luego súmelos para formar el número N. La variable aleatoria se define asignando $X = \log(1 + N^3)$.

a) Determine y grafique la función de distribución acumulativa de X en (0, 2).

b) De su resultado, determine $P(X \leq 1)$ e indíquelo en la gráfica.

8.3.2 La función de distribución acumulativa para cierta variable aleatoria X es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -\pi \\ [1 + \operatorname{sen}(x/2)]/2 & -\pi \leq x < \pi \\ 1 & \pi < x \end{cases}.$$

Determine: (a) $P(X \leq 2)$; (b) $P(-1 \leq X < +1)$; (c) $P(1 \leq X < 3)$; (d) los valores mínimo y máximo de X.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

8.3.3 Un generador de números aleatorios produce los dígitos de igual probabilidad $N = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Determine y grafique la función de distribución acumulativa de:

a) La variable aleatoria X definida por $X = -1$ si $N \leq 3$; $X = +1$ si $N \geq 7$; $X = 0$ en otro caso.

b) La variable aleatoria Y definida por $Y = +1$ si $N \leq 3$; $Y = -1$ si $N \geq 7$; $Y = 0$ en otro caso.

c) La variable aleatoria Z = parte entera de $\{N/2\}$.

8.4.1 Cierta variable aleatoria X tiene la siguiente fda:

$$F_X(x) = x^2u(x) + (1 - x^2)u(x - 1).$$

a) Encuentre $P(1/4 \leq X)$.

b) Encuentre $P(1/4 \leq X < 3/4)$.

c) Determine y grafique la fdp de X.

8.4.2 Una variable aleatoria X tiene la siguiente fdp:

$$p_X(x) = \begin{cases} kx(1 - x) & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}.$$

a) Encuentre el valor numérico de k.

b) Encuentre $P(1/4 \leq X)$.

c) Determine y grafique la fda de X.

8.4.3 Una variable aleatoria X tiene la siguiente fdp:

$$p_X(x) = k(1 - x^2) \text{ rect } (x/2).$$

a) Encuentre el valor numérico de k.

b) Encuentre $P(-1/2 \leq X < 1/2)$.

c) Determine y grafique la fda de X.

8.4.4 La fdp Rayleigh está dada por

$$p_X(x) = kx \exp[-x^2/(2\sigma^2)]u(x).$$

a) Encuentre $P(\sigma \leq X)$ y $P(\sigma \leq X < 2\sigma)$.

b) Determine la fda de X.

c) Encuentre la constante a tal que $P(X > a) = 0.00033$.

8.4.5 La fdp de la amplitud X de cierta señal $x(t)$ está dada por $p_X(x) = k \exp(-|x|)$.

a) Grafique la fdp de X.

b) Determine y grafique la fda de X.

c) La señal $x(t)$ se aplica a la entrada de un amplificador con ganancia unitaria; la salida correspondiente es $y(t)$. Sin embargo, este amplificador no puede aceptar los (ocasionales) picos de alta tensión en la señal de entrada y se satura ("recorta") en los niveles $Y = \pm A$. Determine y grafique la fdp y la fda de la salida, Y.

8.5.1 Determine la moda, la mediana y el valor medio de la variable aleatoria cuya fdp está dada en

a) el problema 8.4.2;

b) el problema 8.3.2;

c) el problema 8.4.4.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

8.5.2 Considere la fdp triangular mostrada en la figura P-8.5.2.

a) Encuentre $P(X > a/2)$.

b) Determine σ_X si $a = 1$.

c) Suponga que $a = 1$ y divida el intervalo de X en ocho subintervalos iguales (es decir, $0 \le X < 0.25, 0.25 \le X < 0.50$, etc.). Reemplace cada área definida por estos subintervalos y $p_X(x)$ mediante un impulso con la misma área que la región que reemplaza, y en el punto medio del subintervalo. Este procedimiento de reemplazo de una fdp continua por una discreta se llama "cuantificación". Nótese que la cuantificación requiere una definición de los subintervalos de X, y los puntos en los cuales se colocarán las representaciones discretas. Dibuje la fdp discreta resultante para este caso.

d) Calcule la desviación estándar usando el resultado de la parte (c) y compárela con la desviación estándar de la parte (b).

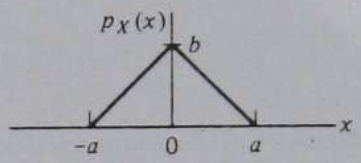


Figura P–8.5.2.

8.5.3 La fdp de una variable aleatoria dada es $p_X(x) = 2 \exp(-2x)u(x)$.

a) Encuentre la media y la varianza de X.

b) La variable aleatoria Y se define por la transformación $Y = 2X + 5$. Encuentre la media y la varianza de Y.

8.5.4 a) Encuentre los momentos primero y segundo de la variable aleatoria X cuya fdp se muestra en la figura P-8.5.4.

b) Determine el máximo valor de la razón $\gamma = \sigma_X/m_X$, y encuentre el valor correspondiente de ρ.

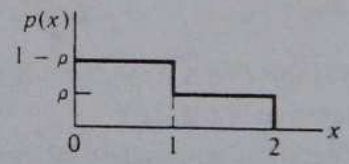


Figura P–8.5.4.

8.5.5 La señal $x(t)$ del problema 8.4.5 se aplica a un rectificador de media onda, por lo que la salida $y(t)$ se define con

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & X > 0 \\ 0 & X \le 0 \end{cases}.$$

a) Encuentre y grafique la fda de Y.

b) Encuentre y grafique la fdp de Y.

c) Encuentre la media y la varianza de Y.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

8.5.6 A veces los métodos desarrollados en probabilidad se pueden adaptar provechosamente en sistemas lineales. Por ejemplo, la media es una medida del punto del 50% en la fda, mientras que la desviación estándar es una medida del ancho efectivo de una fdp. Demuestre, con analogías propias, que el retardo t_0 y el tiempo de elevación t_r de un sistema lineal invariable en el tiempo con respuesta al impulso $h(t)$ se puede escribir como [véase Ec. 3.80)]:

$$t_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t|h(t)|^2\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2\,dt}, \qquad t_r = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2|h(t)|^2\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2\,dt}\right]^{1/2}$$

Explique esta analogía con la fdp y con la fda.

8.6.1 La señal periódica $x(t)$ mostrada en la figura P-8.6.1 tiene un tiempo de inicio aleatorio con distribución uniforme.

a) Dibuje la fda y la fdp de la amplitud X.

b) Calcule la media y la varianza de X.

c) Calcule el valor rms de $x(t)$, tanto a partir de la fdp como de los promedios en el tiempo [véase Ec. (4.24)].

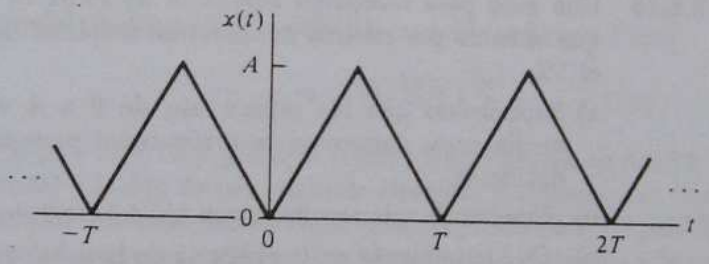


Figura P–8.6.1.

8.6.2 a) Usando las fórmulas para las sumas parciales dadas en el apéndice A, determine la media y la varianza de la variable aleatoria discreta uniforme definida por $x_i = 1, 2, \ldots, n$.

b) Repita la parte (a), con la excepción de que la variable aleatoria se define por medio de $x_i = a, 2a, \ldots, na$.

8.6.3 a) Encuentre la media y la varianza de la variable aleatoria discreta X que tiene dos valores posibles a, b con probabilidad $P(X = a) = p$.

b) ¿En qué condiciones su resultado concuerda con el dado para la distribución binomial?

8.6.4 a) Usando distribución binomial, encuentre la probabilidad de que aparezcan exactamente 50% de caras cuando se lanzan cuatro monedas legales.

b) Repita la parte (a), excepto que se lanzan 16 monedas.

c) Repita la parte (a), excepto que se lanzan 64 monedas.

d) Encuentre $P(|X - m_X| \leq \sigma_X)$ para cada uno de los tres casos anteriores.

8.6.5 a) Escriba la fdp para una variable aleatoria X definida en los enteros $x_i = 0, 1, 2, \ldots, n$ y con la distribución de Poisson dada en la ecuación (8.49).

b) Demuestre que la fdp de la parte (a) tiene área unitaria.

c) Demuestre que el valor medio de X es igual a ν.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

8.6.6 Compare la aproximación de Poisson con las probabilidades binomiales para $v = 1$ e $i = 0$, 1, 2, 3 para cada uno de los siguientes casos: (a) $n = 10$; (b) $n = 100$.

8.6.7 Se sabe que el tiempo promedio que debe esperar un estudiante en una ventanilla de información es de 4 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante seleccionado con una llegada aleatoria tenga que esperar 4 minutos exactos? (Suponga una variable aleatoria de Poisson.)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante en (a) tenga que esperar $4 \pm 1\sigma$ minutos?

8.6.8 Cierto sistema para transmisión de datos tiene una probabilidad de error promedio de 10^{-6} por dígito. Determine la probabilidad de que en un mensaje de 2×10^6 dígitos haya

a) exactamente dos errores;

b) menos de dos errores;

c) más de dos errores.

8.6.9 Determine la constante k y la media de la variable aleatoria gaussiana X cuya fdp es

$$p_X(x) = \{\exp[-(x-1)^2/3]\}/\sqrt{15} + k\,\delta(x).$$

[*Sugerencia*: Ordene en la forma estándar y luego encuentre las respuestas sin integrar.]

8.6.10 Una guía para recepción aceptable de PPM en banda base es que la probabilidad de que el ruido por encima del nivel de amplitud del pulso (sin pulso presente) no exceda el 1%.

a) Suponiendo que los pulsos van de 0 a A volts y que el ruido es gaussiano con media cero, determine la razón señal pico a ruido cuadrático medio (potencia) en decibeles.

b) ¿Concuerda este resultado con los del capítulo 7? [Véanse Ecs. (7.22) y (7.23)].

c) ¿Qué incremento en la potencia de la señal pico (en dB) es necesario para reducir la probabilidad de que el ruido exceda el nivel de amplitud del pulso, cuando se compara con la parte (a), por un orden de magnitud (es decir, 0.1%)?

8.6.11 El ruido de salida de un amplificador de alta ganancia tiene distribución gaussiana con media cero y disipa una potencia promedio de 100 mW en una carga resistiva de 50 Ω.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la amplitud del ruido de salida sea menor que −1 V?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la amplitud del ruido de salida sea mayor que +1 V?

c) Repita las partes (a) y (b) si el valor promedio del ruido de salida es de 1 V.

8.6.12 Durante el otoño en el norte de Estados Unidos, un fabricante de limpiadores de nieve hace la siguiente oferta.† Si usted compra un limpiador y nieva menos del 20% del promedio ese invierno, se le devuelve todo el dinero pagado (y usted conserva el limpiador). Si nieva menos del 50% del promedio, usted recupera el 50% de dinero. (¡Si nieva más que esto se encontrará satisfecho de haber comprado el limpiador!) Suponga que la cantidad de nieve es una variable aleatoria X que se puede aproximar por distribución gaussiana con media m_X. Suponga también que los costos de producción de los limpiadores es del 50%, los costos de distribución son el 40% y los márgenes de utilidad usuales representan el 10% del precio de venta. Determine el porcentaje de ganancia esperado de la compañía en las condiciones anteriores de esta promoción si

a) $\sigma_X = 0.2m_X$;

b) $\sigma_X = 0.3m_X$.

† Esto se basa en una propaganda para el Toro Snowthrower en el otoño de 1983.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

8.6.13 Una característica importante en los amplificadores lineales para potencia de salida (p. ej., en sistemas de audio) es cuán bien responden a picos súbitos en el material de programación sin recortar la señal de salida. Suponga aquí que la potencia promedio necesaria de dicho amplificador es de 5 W. Nos interesa encontrar la potencia pico (instantánea) necesaria si la señal se recorta, en promedio, no más del 0.01% del tiempo. Por ejemplo, la potencia pico necesaria para cumplir con esta condición para una entrada senoidal sería $(5)(\sqrt{2})^2 = 10$ W. Determine la potencia pico requerida si la distribución de la señal de entrada se puede describir por medio de una variable aleatoria con media cero y es

a) uniformemente distribuida;

b) gaussiana;

c) laplaciana [es decir, $p_X(x) = k \exp(-\alpha|x|)$, var $\{X\} = \alpha/2$].

✓★ **8.7.1**† El acervo de subrutinas para la mayoría de los computadores contiene un generador de números aleatorios que se puede utilizar para producir los números x_i uniformemente distribuidos en (0, 1). Calcule y grafique el histograma en (0, 1) para este generador de números aleatorios. Utilice 20 intervalos espaciados por igual y genere un mínimo de 2500 muestras (x_i).

✓★ **8.7.2**† Para las x_i del problema 8.7.1, defina la variable aleatoria Y por medio de $y_i = x_i + x_{i-1}$. Grafique el histograma de Y en (0, 2). Esta gráfica debe parecerse a la fdp triangular (para saber la razón, véase Prob. 8.9.3). Así mismo, calcule la media y la varianza de Y a partir de sus datos.

✓★ **8.7.3**† Para las x_i del problema 8.7.1, defina la variable aleatoria Y con

$$y_i = 1/(\sqrt{12N}) \sum_{n=0}^{N-1} (x_{i-n} - 0.5).$$

Calcule y_i para $N = 10$ y grafique como un histograma en (−0.25, 0.25). Esta gráfica se debe parecer a la fdp de una variable aleatoria gaussiana, aun con recursos de cómputo limitados. [Tal vez desee referirse a la nota del problema 8.7.2 para $N = 1$ como verificación del programa para este problema.] Además, calcule la media y la varianza de Y a partir de sus datos.

★ **8.8.1** La variable aleatoria X que representa cierta señal $x(t)$ tiene una fdp como la mostrada en la figura P-8.8.1(a). Esta señal es la entrada a un amplificador cuya característica de ganancia de entrada y salida se muestra en la figura P-8.8.1(b).

a) Sea Y la salida del amplificador; encuentre y grafique la fdp de Y.

b) Determine el valor rms de X y el valor rms de Y. ¿Están relacionados en forma lineal por la ganancia del amplificador? Explique.

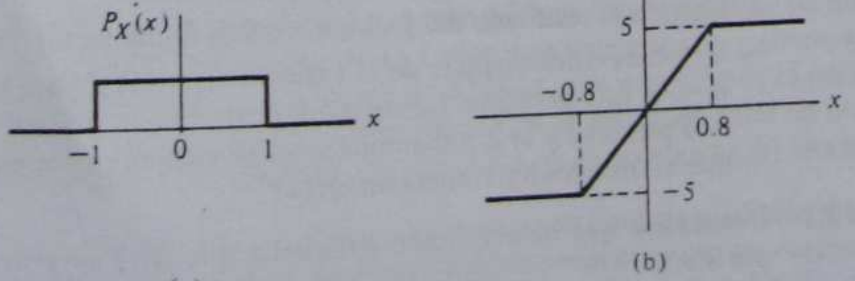


Figura P-8.8.1.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

★ **8.8.2** Una variable aleatoria X, distribuida de manera uniforme en (0, 1), se aplica a la entrada de un sistema que tiene una característica de ganancia de entrada y salida: $y = \text{sen}\ (\pi x/2)$. Determine y grafique la fdp de la salida Y.

✓★ **8.8.3** a) Para las x_i del problema 8.7.1, sea $y_i = \text{sen}\ (\pi x_i/2)$; calcule y grafique y_i como un histograma en (0, 1).

b) Compare esta gráfica con el resultado del problema 8.8.2.

★ **8.8.4** Determine y grafique la fdp de $y = A \cos x$, donde X está uniformemente distribuida en $(-\pi, \pi)$. [*Sugerencia*: Considere los intervalos $(-\pi, 0)$ y $(0, \pi)$ en forma separada.]

8.9.1 La fdp conjunta de las variables aleatorias X, Y está dada como

$$p_{XY}(x, y) = k \exp\,[055(x + 2y)]u(x)u(y)\,.$$

a) ¿Son X y Y estadísticamente independientes? Explique.

b) Determine el valor de la constante k.

c) Encuentre $P(X < 2, Y < 2)$.

d) Determine $p_X(x)$ y $p_Y(y)$.

8.9.2 La fdp conjunta de las variables aleatorias X, Y está dada como

$$p_{XY}(x, y) = x \exp\,[-x(1 + y)]u(x)u(y)\,.$$

a) Encuentre $p_X(x)$ y $p_Y(y)$.

b) ¿Son X y Y estadísticamente independientes? Explique.

c) Encuentre $P(X < 1, Y < 1)$.

d) Determine la fdp de Y, dado $X = 1$.

8.9.3 En algunas situaciones, la teoría desarrollada para sistemas lineales invariables en el tiempo se puede adaptar, con ventajas, a la probabilidad. Por ejemplo, suponga que para la variable aleatoria X se identifica $E\{e^{j\omega X}\}$ como la transformada de Fourier de su fdp. Sea la variable aleatoria Z la suma de las variables aleatorias X, Y con fdp conjunta conocida. Demuestre que la fdp de Z está dada por la convolución de la fdp de X con la fdp de Y [es decir, $p_Z(x) = p_X(x) \circledast p_Y(x)$] si X, Y son estadísticamente independientes.

8.9.4 Use el resultado del problema 8.9.3 y convolución repetida a fin de generar la fdp para la distribución binomial.

8.9.5 Sea X una variable aleatoria que toma los valores $\pm A$ con igual probabilidad. Sea Y una variable aleatoria gaussiana con media cero y varianza σ^2. Suponga que X y Y son estadísticamente independientes, y que $A > \sigma$.

a) Usando el resultado del problema 8.9.3, dibuje la fdp de $Z = X + Y$.

b) Un observador dispone de la variable aleatoria Z para hacer una estimación si $X = A$ o $X = -A$ está presente. La regla adoptada es que si $Z > 0$ entonces la decisión es que $+A$ está presente y si $Z < 0$ entonces $-A$ se encuentra presente. ¿Cuál es la probabilidad de que el observador cometa un error?

★ **8.10.1** Demuestre que es condición suficiente que X, Y no estén correlacionados en el ejemplo 8.9.1.

★ **8.10.2** Encuentre la correlación de X, Y en a) el problema 8.9.1; b) el problema 8.9.2.

✓★ **8.10.3** Suponga que en el examen del ejemplo 8.5.3 existen dos problemas con igual peso. La tabulación de los resultados, identificados por las variables aleatorias X, Y, Z, se muestran en seguida.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

N	Total Z	Problema 1 X	Problema 2 Y
1	33	10	23
2	47	20	27
3	58	18	40
4	67	30	37
5	75	35	40
6	82	38	44
7	88	38	50
8	94	49	45
9	100	50	50

a) Calcule la media y la desviación estándar de X, Y, Z. ¿Se cumple aquí la igualdad $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$? Explique.

b) Calcule el coeficiente de correlación y los coeficientes de regresión lineal para (X, Z) y (Y, Z).

c) Para el estudiante núm. 5, encuentre la mejor estimación para la calificación total basado sólo en (1) el resultado del problema 1; (2) el resultado del problema 2.

d) Basado sólo en estadística, ¿cuál cree que es el mejor problema del examen? ¿Por qué?

✓★ **8.10.4** a) Calcule el coeficiente de correlación de muestras sucesivas de la parte fraccional de $\sqrt{N}$ para $1 \le N \le 1000$.

b) Repita para la parte fraccional de $10\sqrt{N}$. ¿Quitar el primer dígito decimal hace que los demás valores estén menos correlacionados?

c) ¿Qué podría esperarse si se usara $\sqrt{N}$? (¡Inténtelo!)

★ **8.11.1** Encuentre una expresión para $p(x|y)$ para el caso especial en el que $\rho = 0$ en la ecuación (8.78). ¿Implica $\rho = 0$ independencia estadística para la distribución gaussiana conjunta? Explique.

★ **8.11.2** a) Escriba la fdp gaussiana bivariada, en la forma más simplificada posible, para $m_X = m_Y = 1$; $\sigma_X = \sigma_Y = 1$; $E\{XY\} = 1 + \sqrt{3}/2$.

b) Escriba $p_X(x)$ y $p_Y(y)$ para este caso.

★ **8.11.3** Demuestre cómo se obtiene la ecuación (8.79) a partir de las ecuaciones (8.65) y (8.78).

8.12.1 La actividad solar varía en intervalos de tiempo de varias horas a años, y afecta las comunicaciones de alta frecuencia (HF, *high-frequency*) que utilizan la propagación espacial por la ionosfera. La mayor parte de la actividad de las manchas solares es cíclica, con un ciclo de alrededor de 11.1 años. Las tormentas magnéticas asociadas con la actividad solar son cíclicas, con ciclos de 27 días, que constituyen el periodo de rotación del Sol. ¿Podría usted clasificar estos efectos de la actividad solar en la propagación ionosférica como procesos aleatorios estacionarios en a) un minuto; b) una semana? Explique.

8.12.2 Una variable aleatoria gaussiana X en un sistema de medición tiene varianza σ^2 y un valor medio que se desplaza con lentitud en proporción a una constante de tiempo térmica τ. Como medida de estabilidad, se decide que las probabilidades $P(X > k\sigma)$, $k = 1, 2, 3$ no deben variar más del 1% de sus valores nominales durante la medición Δt con el fin de hacer una medición válida. Determine el máximo valor de Δt, en términos de τ, que se debe utilizar.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

8.12.3 En el proceso aleatorio $z(t) = X \cos \omega_c t - Y \operatorname{sen} \omega_c t$, X y Y son variables aleatorias gaussianas independientes, cada una con media cero y varianza σ^2.

a) Determine m_z y σ_z^2.

b) ¿Es válido su resultado si sólo se sabe que X y Y no están correlacionadas y que tienen media cero e iguales varianzas?

c) Demuestre que esto satisface la ecuación (5.66) si el proceso aleatorio que describe $n(t)$ es ergódico.

8.12.4 Dibuje un diagrama de bloques de un sistema que lleve a cabo las operaciones mostradas en la figura 8.15 si $x(t)$ es ergódica y si sólo se permite un dispositivo de umbral en el diseño.

8.13.1 a) Encuentre $R_{zz}(\tau)$ para el problema 8.12.3.

b) Demuestre que el promedio en el tiempo de $R_{zz}(\tau)$ para $\sigma_X \neq \sigma_Y$ proporciona el resultado dado en la ecuación (5.67).

8.13.2 Sea $x(t)$ una función de muestra de un proceso aleatorio estacionario de valor real con función de autocorrelación $R_{xx}(\tau) = \Lambda(\tau)$.

a) Determine y grafique la densidad espectral de potencia de $x(t)$.

b) Determine la función de autocorrelación y la densidad espectral de potencia de $y(t) = x(t)e^{j\omega_c t}$.

c) Dibuje la parte real de la función de autocorrelación determinada en la parte (b).

8.13.3 Un sistema de comunicación binario transmite unos y ceros con igual probabilidad utilizando la señal A en $(0, T_b)$ para un uno y 0 en $(0, T_b)$ para un cero.

a) Determine la densidad espectral de potencia de la señal transmitida.

b) Determine la densidad espectral de potencia de esta transmisión binaria en presencia de la trayectoria múltiple descrita en el problema 3.10.2 (suponga que $\tau < T_b$.)

★ **8.13.4** Una fuente binaria aleatoria que genera unos y ceros con igual probabilidad y con niveles A, $-A$ en $(0, T_b)$ se filtra con el filtro transversal del problema 3.10.1. Determine la densidad espectral de potencia de la señal de salida (a) encontrando en primer lugar la función de autocorrelación y tomando luego la transformada de Fourier; (b) encontrando en primer lugar la función de transferencia del sistema y multiplicando luego la densidad espectral de potencia de la entrada por la magnitud al cuadrado de la función de transferencia.

★ **8.13.5** Un sistema de comunicación binario transmite unos y ceros con igual probabilidad utilizando la señal $f_1(t) = \cos(\pi t/T_b)$ en $(-T_b/2, T_b/2)$ para un uno y $f_2(t) = -f_1(t)$ para un cero.

a) Determine la densidad espectral de potencia de la señal transmitida.

b) Repita la parte (a) si $f_2(t) = 0$.

★ **8.13.6** (Filtrado por mínimos cuadrados) Un filtro lineal invariable en el tiempo con respuesta al impulso $h(t)$ y función de transferencia $H(\omega)$ se utiliza para filtrar $y(t) = x(t) + n(t)$. La señal $x(t)$ y el ruido aditivo $n(t)$ son funciones de muestra de procesos aleatorios ergódicos con media cero; suponga que no están correlacionados. El error $\epsilon(t)$ en el filtrado se toma como la diferencia entre la salida del filtro y la señal $x(t)$; es decir, $\epsilon(t) = x(t) - h(t) \circ y(t)$. Determine el mínimo valor de $R_\epsilon(0)$ si $H(\omega)$ se puede elegir en forma provechosa, sin restricciones de realización.

✓★ **8.14.1** a) Calcule una densidad espectral de potencia de 256 puntos para el generador de números aleatorios uniformemente distribuido en el acervo de su computador, después de haber eliminado el valor medio, y grafique el resultado entre 0 y 127.

b) Lleve a cabo un suavizado en frecuencia tomando cada punto de la densidad espectral calculada y reemplazándolo con el promedio aritmético de los siguientes tres puntos. Repita esta operación de suavizado tres veces y grafique el resultado en la misma escala de la parte (a).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

c) ¿Es la densidad espectral de potencia de su generador de números aleatorios más o menos "blanca" en este intervalo?

✓★ **8.14.2** a) Repita el problema 8.14.1 para la variable aleatoria Y, donde X es la variable aleatoria de media cero producida por el generador de números aleatorios y Y se define como

$$y_i = (\sigma_X/2)\,\text{sen}\,(100\pi i/N) + x_i.$$

b) ¿Mejora la identificación de la señal senoidal por el método de suavizado en frecuencia utilizado? Explique.

✓★ **8.14.3** a) Repita el problema 8.14.1(a) para el generador de números aleatorios del ejercicio 8.7.1, pero usando 128 puntos.

b) Realice el suavizado en el tiempo tomando cada punto del generador de números aleatorios y reemplazándolo con el promedio aritmético de los tres siguientes puntos. Repita esta operación dos veces, obtenga la densidad espectral de potencia y grafique el resultado a la misma escala que en la parte (a). Explique sus resultados.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

PROBLEMAS DE DISEÑO

Problema de diseño

8.1 Precisión en la localización de un sensor remoto por satélite

En los años setenta, se colocó una serie de paquetes de instrumentación en globos aerostáticos de alta presión (que aquí se llamarán "plataformas"), los cuales se dejaban a merced del viento. Estos paquetes de instrumentación enviaban transmisiones aleatorias al satélite Nimbus F, el cual daba vueltas a la Tierra en una órbita polar de 108 minutos. Algunas especificaciones de este sistema se describen en el texto de J.L. Coates, "The Nimbus F Random Access Measurement System (RAMS)", *IEEE Transactions on Geoscience Electronics*, vol. GE-13, núm. 1, enero de 1975, págs. 18-26.

En este experimento, cada plataforma transmite durante un segundo de cada minuto. La primera parte de esta transmisión consiste en una portadora sin modular (401.2 MHz). Como los parámetros de la órbita del satélite se conocen, el desplazamiento Doppler de esta portadora sin modular se puede utilizar para localizar la plataforma. Este desplazamiento Doppler aumenta conforme el satélite se aproxima al plano, normal a su trayectoria, en el que se ubica la plataforma, y disminuye al alejarse. La tasa del desplazamiento Doppler cerca de este plano es aproximadamente lineal (puede usted utilizar una aproximación en serie binomial para demostrarlo), con la pendiente dependiendo de la distancia entre la plataforma y el satélite. Por tanto, la plataforma se puede localizar, con cierta ambigüedad, respecto al flanco de la trayectoria del satélite. Esta ambigüedad se puede eliminar por medio de antenas de dirección, efectos de la rotación de la Tierra, o por la comparación de los registros en sucesivas pasadas del satélite. El último método se utilizó en el experimento RAMS.

Como los detalles se vuelven complicados en geometría esférica, aquí se supone que en espacios limitados la Tierra es plana y que la trayectoria del satélite es paralela a esta superficie plana. El problema es estimar la precisión con la cual se puede localizar una plataforma si la trayectoria del satélite es conocida pero el oscilador de la plataforma tiene un error de frecuencia Δf y una componente de ruido aleatorio (supóngalo gaussiano) con densidad espectral de potencia $(k/2) \exp(-k|\omega|)$. Algunos detalles sobre satélites se pueden encontrar en la referencia 2 del capítulo 4. Especifique las suposiciones que haga. Tome en cuenta que los resultados incluirán tanto un error de sesgo como una componente de ruido aleatorio.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

CAPÍTULO

9 Información y transmisión digital

Ahora que disponemos de cierto conocimiento de la probabilidad, volveremos al análisis de la modulación de código de pulsos (PCM, *pulse code modulation*). Es de particular importancia el comportamiento de la PCM en presencia de ruido y su comparación no sólo con otros sistemas de modulación sino con el sistema de comunición ideal cuyo funcionamiento sólo está restringido por ruido de banda limitada.

9.1 UNA MEDIDA DE LA INFORMACIÓN

El propósito de un sistema de comunicación es, en el más amplio sentido, la transmisión de información de un punto a otro en el espacio y en el tiempo. En capítulos anteriores se describieron varias formas de conseguir este objetivo utilizando señales eléctricas. Sin embargo, no se ha definido lo que realmente significa el término *información*, aunque se ha hecho referencia a él y a temas relacionados con mensajes, ancho de banda, etcétera. En esta sección y las dos siguientes se desarrollarán de manera breve ideas básicas sobre lo que es información, cómo puede medirse y cómo se relacionan estas ideas con el ancho de banda, la razón señal a ruido, etcétera. Esto es necesario para hacer comparaciones significativas de la PCM con los sistemas analógicos y de modulación de pulsos analógica en presencia de ruido.

La cantidad de información sobre un evento sè relaciona estrechamente con la probabilidad de su ocurrencia. Los mensajes que contienen noticias de gran probabilidad de ocurrencia (es decir, que indican muy poca incertidumbre en el resultado), llevan relativamente poca información. Por el contrario, los que contienen noticias con baja probabilidad de ocurrencia conducen grandes cantidades de información. O sea que la medida de la información recibida del conocimiento de ocurrencia de un evento es inversamente proporcional a la probabilidad de su ocurrencia.

Para formular una ecuación matemática que corresponda a este razónamiento, debe notarse que si un evento es cierto (es decir, si ocurre con probabilidad uno), lleva cero información. En el otro extremo, si un evento es improbable (es decir, si ocurre con probabilidad cercana a cero), su ocurrencia lleva una cantidad infinita de información. Es deseable también que la medida de la información tenga valor real y sea monotónica, además de ser aditiva para eventos estadísticamente independientes. Sobre esta base, la

http://libreria-universitaria.blogspot.com

medida de la información asociada a un evento A que ocurre con probabilidad P_A se define como[†]

$$I_A = \log \frac{1}{P_A}. \tag{9.1}$$

La base del logaritmo en la ecuación (9.1) se ha dejado indefinida por ahora; se examinará en el siguiente análisis.

Considérense dos eventos equiprobables A y B y un sistema binario para transmitir su ocurrencia. Se requiere un mínimo de un pulso o una señal binarios, y esta unidad básica de información se llama *bit*. Cuatro eventos equiprobables requieren cuatro esquemas distintos de pulsos binarios, o dos bits, mientras que ocho eventos equiprobables requieren tres bits, etcétera. En general, cualquiera de n mensajes equiprobables contiene $\log_2 n$ bits de información. Como se ha supuesto que los n mensajes son equiprobables, la probabilidad de ocurrencia de cada uno es $P_i = 1/n$ y la información asociada a cada mensaje es

$$I_i = \log_2 n, \tag{9.2}$$

$$I_i = \log_2 \frac{1}{P_i} \qquad \text{bits.}$$

La ecuación (9.2) confirma lo que se expresaba en la ecuación (9.1) y proporciona las unidades en términos de logaritmos de base 2. Incluso si el número de posibilidades no es una potencia de dos, podemos usar la ecuación (9.2) para expresar la información en bits, aunque la respuesta sea una fracción. Para cálculos numéricos, a menudo es conveniente usar logaritmos de base 10 y después hacer la conversión,

$$\log_2 N = (\log_{10} N)(\log_2 10) = (\log_{10} N)/\log_{10} 2,$$

$$\log_2 N \cong 3.322 \log_{10} N. \tag{9.3}$$

Estos resultados definen la medida de la información para el caso un tanto especial en que todos los mensajes son igualmente probables. Para generalizar, se define una *información promedio*, llamada *entropía H*, de cada mensaje tomando el valor esperado de la ecuación (9.2),[‡]

$$H \triangleq I_{\text{avg}} = E\{I_i\},$$

o

$$H = \sum_{i=1}^{n} P_i \log_2 \frac{1}{P_i} \qquad \text{bits.} \tag{9.4}$$

Así, a cada evento o mensaje se le asigna un contenido de información promedio, aunque la información para cada evento puede fluctuar en forma considerable.

[†] No hemos demostrado que la ecuación (9.1) se obtenga de estas condiciones, sólo lo hemos enunciado. La demostración se puede encontrar en las referencias sobre este tema (véase, por ejemplo, R. Ash, *Information Theory*, Nueva York, Wiley-Interscience, 1965, Cap. 1).

[‡] El nombre *entropía* y su símbolo H se tomaron de ecuaciones similares de mecánica estadística.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Ahora surge un problema en la terminología. Antes se había hecho referencia a los pulsos binarios como bits; ahora se define el bit como una medida del contenido de información. Para eventos equiprobables, las dos definiciones coinciden, pero esto es, sin duda, un caso especial. Una forma de soslayar este problema es utilizar la contracción *binit* por *dígito binario* (*binary digit*) para distinguirlo del bit (que se reserva para la medida del contenido de información), de hecho, se puede demostrar con facilidad que el bit es siempre igual o menor que el binit porque, con base en la teoría de la probabilidad, puede escribirse

$$E\{I_i\} \leq I_i|_{\text{máx}},$$

o

$$H \leq I_i|_{\text{máx}}. \tag{9.5}$$

La igualdad rige si todos los eventos o mensajes son equiprobables [esto se puede demostrar sustituyendo las ecuaciones (9.2) y (9.4) en la (9.5)]. En otras palabras, si todos los mensajes son equiprobables, un binit es igual a un bit. Éste es un enfoque atractivo, pero el término *bit* está tan arraigado en ambos sentidos que aquí se empleará con los dos significados. Es decir, el término *bit* será tanto un dígito binario como una medida de la información, y será el contexto el que defina cuál de ambos significados es aplicable. La justificación es que ambas definiciones coinciden para el caso equiprobable.

EJEMPLO 9.1.1

Los símbolos *A, B, C* y *D* ocurren con probabilidades 1/2, 1/4, 1/8 y 1/8, respectivamente. Calcule la información en el mensaje de tres símbolos $X = BDA$, suponiendo que éstos son estadísticamente independientes.[†]

Solución Como los símbolos son independientes, la medida de la información es aditiva y puede escribirse

$$I_X = \log_2 4 + \log_2 8 + \log_2 2,$$
$$I_X = 2 + 3 + 1,$$
$$I_X = 6 \text{ bits}.$$

[†] En la construcción de lenguajes, se está restringido a ciertas reglas del habla y gramaticales que limitan la elección de símbolos en sucesión. Por tanto, la elección de símbolos no es completamente independiente. Esto se puede explicar por el uso de probabilidades condicionales y, en consecuencia, por entropía condicional. Estos temas son interesantes por sí mismos, pero no se estudian aquí.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJEMPLO 9.1.2

Determine y grafique la entropía (es decir, la información promedio) del código binario en que la probabilidad de ocurrencia de los dos símbolos es p y $q = (1 - p)$.

Solución De la ecuación (9.4), se tiene

$$H = \sum_{i=1}^{2} P_i \log_2(1/P_i),$$

$$H = p \log_2(1/p) + (1 - p) \log_2[1/(1 - p)].$$

En la figura 9.1 se muestra una gráfica de H contra p. Nótese que la máxima entropía es de un bit/símbolo y ocurre para el caso equiprobable (es decir, $p = q = 1/2$). Véase la ecuación (9.5).

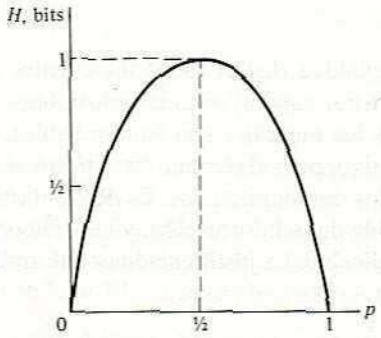


Figura 9.1 Entropía de una fuente binaria.

EJERCICIO 9.1.1

Determine la información promedio (entropía) por símbolo para (a) el código de cuatro símbolos del ejemplo 9.1.1; (b) el caso en que los cuatro símbolos son equiprobables.

RESPUESTA: (a) 1.75 bits; (b) 2 bits.

EJERCICIO 9.1.2

Un código binario eficiente para el ejemplo 9.1.1 es $A = 0$, $B = 10$, $C = 110$, $D = 111$. Ponderando cada uno con la probabilidad de ocurrencia adecuada, determine (a) la probabilidad de ocurrencia de ceros en el código; (b) la información promedio por palabra de código.

RESPUESTA: (a) 1/2; (b) 1.75 bits.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Los conceptos anteriores pueden ampliarse a mensajes continuos, pero esto produce expresiones matemáticas bastante abstractas, por lo que se usará el caso discreto, empleando el teorema del muestreo y la cuantificación para reducir los mensajes continuos analógicos a discretos.

En los sistemas de comunicación eléctricos, existe particular interés en la tasa de transmisión de la información, R, definida por

$$R = rH \qquad \text{bps}, \tag{9.6}$$

donde r es la tasa de símbolos (correspondiente a los símbolos en donde está determinada H), y bps es bits por segundo.

Aunque especificar las probabilidades del mensaje no corresponde generalmente al diseño del sistema de comunicación (dado que o se conocen o pueden aproximarse por mediciones), es de primordial interés la maximización de la tasa de transmisión de información del sistema, lo cual constituye el tema de la sección siguiente.

EJERCICIO 9.1.3

El límite de la tasa de transmisión de información R en presencia de ruido térmico y suponiendo que no hay restricciones en el ancho de banda, puede expresarse como†

$$R_{\text{máx}} = \frac{1.44P_r}{kT_{eq}} \qquad \text{bps},$$

donde P_r es la potencia recibida en watts, k es la constante de Boltzmann y T_{eq} es la temperatura de ruido equivalente del receptor en grados Kelvin. Calcule la mínima potencia del transmisor necesaria para enviar una imagen normal de televisión en blanco y negro con un contenido de información de 10^6 bits, desde una sonda espacial, en un intervalo de una hora si las pérdidas de atenuación son de 200 dB y $T_{eq} = 50$ K.

RESPUESTA: 13.3 watts.

Concluimos esta sección con una advertencia. Los conceptos de información y tasa máxima de transmisión de la información se han desarrollado estrictamente desde el punto de vista de la ingeniería. Por tanto, el contenido del mensaje se ha juzgado a partir de su calidad de incertidumbre, reduciendo el problema de la transmisión a una base altamente sistemática. Sin embargo, la validez de este enfoque puede cuestionarse si se intenta aplicarlo a problemas en que se involucra el comportamiento humano. La cuestión no es tanto el concepto de la medida de la información sino cómo se relaciona con los procesos humanos de valor y decisión y qué criterios están implicados. Por ejemplo, los sentidos artístico y estético no se satisfacen necesariamente por el concepto de la más eficiente transferencia de información. Ignorar alguno de estos factores y otros relacionados ha hecho que no pocos ingenieros se esfuercen en agotar hasta el final el rendimiento de un sistema de comunicación usando la teoría de la información, sólo para hallar que, en primer lugar, ¡nadie podría utilizar realmente los datos de salida!

† Esta relación se obtiene en el ejemplo 9.2.3.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

9.2 CAPACIDAD DEL CANAL

Ya se ha hecho referencia al vínculo entre el transmisor y el receptor, incluyendo las fuentes de ruido y el medio de transmisión. En la teoría de la información, es conveniente *tratar este vínculo como un filtro ruidoso más abstracto y general* (que puede ser no lineal, variable en el tiempo, etcétera) llamado *canal*. La tasa límite de transmisión de información a través de un canal se llama *capacidad del canal*.

La importancia de este concepto se basa en un teorema establecido y probado por C. E. Shannon, el cual establece que si la razón de entropía R es igual o menor que la capacidad del canal C, entonces existe una técnica de codificación que permite la transmisión por el canal con una frecuencia de errores arbitrariamente pequeña, o

$$R \leq C . \tag{9.7}$$

Esta restricción es válida aun en presencia de ruido en el canal. El inverso de este teorema establece que no es posible transmitir mensajes sin errores si $R > C$. Entonces, la capacidad del canal se define como la máxima razón de información confiable a través del canal.

Considérese una fuente que dispone de un alfabeto de α mensajes discretos. Se supone que cada mensaje enviado puede identificarse en el receptor, por lo que esto se llama "canal discreto no ruidoso". La máxima entropía de la fuente es $\log_2 \alpha$ bits y *si T es el tiempo de transmisión de cada mensaje, la capacidad del canal es*[†]

$$C = \frac{1}{T} \log_2 \alpha \qquad \text{bps} . \tag{9.8}$$

Para alcanzar este máximo, los mensajes deben ser equiprobables y estadísticamente independientes. Estas condiciones son la base de la codificación de la información transmitida por el canal.

En presencia de ruido, la capacidad de canal discreto disminuye debido a errores de la transmisión. Como la entropía es una medida de la aleatoriedad, esto se puede contrarrestar sustrayendo la tasa de entropía de los símbolos detectados en forma errónea a partir de la capacidad del canal discreto no ruidoso.

EJEMPLO 9.2.1

Una fuente binaria envía mensajes equiprobables e identificables utilizando los símbolos binarios 0 y 1 a razón de r símbolos en un tiempo T. Sin embargo, debido al ruido, un 0 puede tomarse por un 1 y viceversa. Para el caso conocido como "canal simétrico binario", las probabilidades de cometer estos dos tipos de error son iguales y se designan *con p. Determine la capacidad del canal.*

El número de mensajes equiprobables es $\alpha = 2^{rT}$, el cual, al usarse en la ecuación (9.8), da

[†] Para tiempos de transmisión de mensajes desiguales,

$$C = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \log_2 \alpha(T) .$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Solución

$$C = \frac{1}{T} \log_2 2^{rT} = r .$$

En presencia de ruido, los errores se cometerán con una razón de entropía R_e que, a partir de los resultados del ejemplo 9.1.2, es

$$R_e = rH_e = rp \log_2(1/p) + r(1 - p) \log_2[1/(1 - p)] .$$

Entonces, la capacidad del canal es

$$\begin{aligned} C &= r - R_e \\ &= r[1 + p \log_2 p + (1 - p) \log_2(1 - p)] . \end{aligned}$$

Nótese que para $p = 0.5$, $C = 0$ y no puede transmitirse información. Para $p = 0.001$, $C = 0.989r$, por lo que C se acerca a 989 bps para r de 1000 símbolos por segundo.

Al comparar diversos tipos de sistemas de comunicación, es conveniente considerar un canal descrito en términos de ancho de banda y razón señal a ruido. Otro teorema de la teoría de la información, conocido como de Hartley-Shannon, establece que la capacidad de un canal gaussiano blanco de banda limitada es

$$C = B \log_2(1 + S/N) \qquad \text{bps} , \tag{9.9}$$

donde B es el ancho de banda del canal y S/N es la razón señal a ruido cuadrática media. Aunque restringido al caso gaussiano, este resultado es de gran importancia en sistemas de comunicación porque muchos canales pueden modelarse con el gaussiano. Es aplicable tanto al canal discreto como al continuo.

La prueba del teorema de Hartley-Shannon no es fácil y sí bastante complicada. Aquí se seguirá una explicación intuitiva basada en el razonamiento anterior sobre el canal discreto.

Sea una señal de banda limitada a B Hz. Del teorema del muestreo, ésta puede describirse por sus muestras tomadas a razón de

$$r = 2B . \tag{9.10}$$

¿Cuántos niveles habrán de usarse para describir cada muestra en presencia de ruido? Una elección aceptable es aquella en la que cada nivel discernible esté espaciado una desviación estándar del ruido. Para ruido de media cero con potencia N, esto da espaciamientos de $\sigma_n = \sqrt{N}$. Usando el valor rms del valor observado de señal más ruido, $y(t)$, para la gama de posibles señales, el número M de niveles discernibles puede formularse como

$$M = \frac{\sigma_y}{\sigma_n} = \frac{\sqrt{S + N}}{\sqrt{N}} = \sqrt{1 + \frac{S}{N}} . \tag{9.11}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La capacidad del canal en $(0, T)$, con base en la ecuación (9.8), es

$$C = \frac{1}{T} \log_2 M^{rT} = r \log_2 M . \tag{9.12}$$

Usando las ecuaciones (9.10) y (9.11) en la (9.12), se obtiene

$$\begin{aligned} C &= 2B \log_2 \sqrt{1 + S/N} \\ &= B \log_2 (1 + S/N) . \end{aligned}$$

Una aplicación de este resultado revela que si $S/N = 1$, entonces $C = B$; en otras palabras, la capacidad del canal en bps es igual al ancho de banda del canal en Hz. Sin embargo, si $S/N = 3$, entonces $C = 2B$; si $S/N = 7$, entonces $C = 3B$, etcétera. Por tanto, la capacidad del canal se incrementa cuando S/N aumenta. De otra manera, para una capacidad fija de canal, el ancho de banda B se puede reducir a cambio de un aumento en la razón señal a ruido, S/N. En un caso ideal, los resultados indican que este cambio es aproximadamente exponencial.

EJEMPLO 9.2.2

Una imagen de televisión en blanco y negro puede considerarse compuesta por aproximadamente 3×10^5 elementos de imagen. Supóngase que cada elemento es equiprobable entre 10 niveles de brillantez distinguibles. Se transmiten 30 cuadros por segundo. Calcule el ancho de banda mínimo para transmitir la señal de vídeo suponiendo que se necesita una razón señal a ruido de 30 dB para una reproducción satisfactoria de la imagen.

Solución Información por elemento de imagen = $\log_2 10 = 3.32$ bits.

Información por cuadro de imagen = $(3.32)(3 \times 10^5) = 9.96 \times 10^5$ bits.

Tasa de información $R = (30)(9.96 \times 10^5) = 29.9 \times 10^6$ bps.

Como R debe ser menor o igual que C, se hace $R = C = 29.9 \times 10^6$ y la ecuación (9.9) da

$$B_{\text{mín}} = \frac{C}{\log_2 (1 + S/N)},$$

$$B_{\text{min}} = \frac{29.9 \times 10^6}{(3.32)\,(3.0004)} \approx 3 \text{ MHz} .$$

En el apéndice D, se ve que las transmisiones comerciales de televisión utilizan realmente un ancho de banda de 4 MHz.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJERCICIO 9.2.1

¿Cuál es el tiempo mínimo necesario para la transmisión por facsímil de una imagen por un circuito telefónico normal? Deben transmitirse cerca de 2.25×10^6 elementos de imagen y usarse alrededor de 12 niveles de brillantez para una buena reproducción. Suponga que todos los niveles de brillantez son equiprobables y que el circuito telefónico tiene un ancho de banda de 3 kHz y una razón señal a ruido de 30 dB (estos parámetros son típicos).

RESPUESTA. 4.5 minutos.

Aunque el compromiso potencial señal a ruido con un aumento en el ancho de banda es exponencial en la PCM, su comportamiento en la conducción de información aún está lejos del predicho por la ley de Hartley-Shannon. Una de las razones es que esta ley no suponía limitación en el número de niveles de pulsos excepto los restringidos por la razón señal a ruido del canal. Por tanto, dicho sistema utilizaría más niveles a medida que mejorara la relación señal a ruido. Por el contrario, los sistemas prácticos PCM hacen uso de un número (fijo) finito de niveles de pulsos y su transmisión máxima de información está limitada por este hecho.

Una segunda razón es que PCM, como los otros sistemas de comunicación de banda ancha examinados, sufre un efecto de umbral. Por tanto, para una mejora significativa de la señal a ruido, hace falta un aumento de la señal a ruido mínima del orden de 6–8 dB. Este efecto de umbral se considerará en una sección posterior, cuando se estudie la probabilidad de error en PCM.

EJEMPLO 9.2.3

Partiendo de la ley de Hartley-Shannon, deduzca una relación de la capacidad del canal en presencia de ruido blanco a medida que aumenta sin límite el ancho de banda.

Solución Para el ruido blanco con densidad espectral de potencia $\eta/2$, la ley de Hartley-Shannon es

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{\eta B}\right)$$
$$= \frac{S}{\eta}\left(\frac{\eta B}{S}\right)\log_2\left(1 + \frac{S}{\eta B}\right),$$

por lo que deseamos investigar el límite,

$$\lim_{B\to\infty}\left[\frac{S}{\eta}\log_2\left(1 + \frac{S}{\eta B}\right)^{\eta B/S}\right].$$

Sin embargo, también se puede escribir

$$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e,$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

e, identificando x como $x = S/(\eta B)$, se tiene

$$\lim_{B\to\infty} C = \frac{S}{\eta}\log_2 e\,,$$

o

$$\lim_{B\to\infty} C = 1.44\frac{S}{\eta} = \frac{S}{0.69\eta}.$$

Éste es un resultado interesante porque da la máxima tasa de transmisión de información posible de un sistema de potencia dada pero sin limitaciones de ancho de banda. Este resultado es útil para el diseño de sistemas de potencia mínima como los sistemas de comunicación por satélite y las sondas espaciales, para los cuales el ancho de banda no se especifica o es de importancia secundaria. La densidad espectral de potencia puede especificarse en términos de la temperatura de ruido equivalente por $\eta = kT_{eq}$.

9.3 GANANCIA DE DETECCIÓN DEL DEMODULADOR IDEAL

La ley de Hartley-Shannon proporciona una medida de la máxima tasa de transmisión de información por un canal de banda limitada en presencia de ruido blanco gaussiano, pero también proporciona la relación entre el ancho de banda y la razón señal a ruido para un sistema óptimo. Y como rige para canales tanto continuos como discretos, los resultados pueden aplicarse a ambos para hacer comparaciones entre tipos de sistemas.

Considérese una señal mensaje de banda limitada a f_m Hz y con un contenido de información de I bits. Antes de transmitir esta información, puede elegirse un modulador (o codificador). Si se efectúa correctamente, el proceso de modulación (codificacion) no alterará el contenido de la información del mensaje; se diseña para combatir los efectos de degradación del canal. Sea B Hz el ancho de banda transmitido y supóngase que la tasa de transmisión de información R está ajustada al canal de modo que $R = C$, donde C es la capacidad del canal. En el receptor, la señal transmitida se recibe en un ancho de banda B en presencia de ruido blanco gaussiano, y puede escribirse

$$C = B\,\log_2(1 + S_i/N_i)\,. \tag{9.13}$$

Aquí, S_i/N_i designa la razón señal a ruido en la entrada del receptor.

En el receptor, la señal modulada se aplica a la entrada de un demodulador ideal (véase Fig. 9.2), en el que no hay pérdida de información, por lo que la tasa de

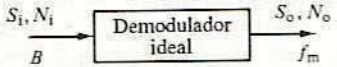


Figura 9.2 Receptor ideal.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

transmisión de información en la salida es idéntica a la de la entrada (suponiendo que no hay escala de tiempo). Entonces, también puede escribirse

$$C = f_m \log_2(1 + S_o/N_o), \tag{9.14}$$

donde S_o/N_o es la razón señal a ruido en la salida del receptor.

Igualando los términos a la derecha de las ecuaciones (9.13) y (9.14), se tiene

$$B \log_2(1 + S_i/N_i) = f_m \log_2(1 + S_o/N_o),$$

o

$$(1 + S_o/N_o) = (1 + S_i/N_i)^{B/f_m}. \tag{9.15}$$

Para S_i/N_i, $S_o/N_o \gg 1$, se obtiene

$$\frac{S_o}{N_o} \approx \left(\frac{S_i}{N_i}\right)^{B/f_m} \tag{9.16}$$

Se concluye que en el sistema óptimo la razón señal a ruido en la salida del receptor crece en forma *exponencial* con el ancho de banda transmitido B, a diferencia de la modulación de ángulo (FM, PM) y la de regulación de pulso (PPM, PWM), en las cuales la razón señal a ruido aumenta en proporción al cuadrado del ancho de banda. Aunque superiores en este aspecto a la AM y la PAM, que no ofrecen ventajas en el intercambio señal a ruido por ancho de banda, dichos sistemas están lejos de ser óptimos cuando $B \gg f_m$. Como se verá más adelante, la mejora de la señal a ruido en sistemas PCM está lejos de los compromisos óptimos.

9.4 RUIDO DE CUANTIFICACIÓN

En la PCM, la información que ha de transmitirse está contenida en el código. El ruido se agrega en la transmisión y puede causar errores en la identificación de los símbolos enviados. No obstante, si los pulsos de señal se reciben por encima de cierto umbral señal a ruido (que se analizará más adelante en este capítulo), la razón promedio de error puede mantenerse muy baja.

Sin embargo, para codificar una señal continua, antes debe cuantificarse en un número finito de niveles de amplitud discretos. Una vez cuantificada, los valores instantáneos de la señal continua nunca podrán reconstruirse con exactitud. Los errores aleatorios introducidos se llaman *ruido de cuantificación*. Este ruido, a diferencia del de transmisión, se genera artificialmente en el proceso de cuantificación anterior a la transmisión, y puede reducirse a voluntad eligiendo el número y la distribución de los niveles de cuantificación.

Para calcular el ruido de cuantificación cuadrático medio, se suponen incrementos de igual amplitud entre niveles. En concreto, si la señal de entrada se cuantifica en n niveles, espaciados por un incremento de amplitud a (para la PCM binaria, n se elige como potencia de 2), y suponiendo que la amplitud de la señal es bipolar y que no hay

http://libreria-universitaria.blogspot.com

nivel de cd que deforme las amplitudes, una distribución razonable de los niveles de cuantificación es $\pm a/2, \pm 3a/2, \pm 5a/2, \ldots, \pm(n-1)a/2$ (véase Fig. 9.3).

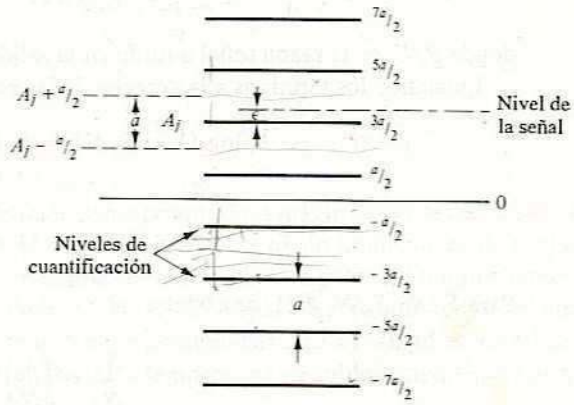


Figura 9.3 Incertidumbre de la cuantificación para señales de entrada continuas.

Suponiendo que el número de niveles es par y que todos estos son equiprobables, la función de densidad de probabilidad de los niveles es

$$p(x) = \sum_{\substack{i=-n \\ \text{impar}}}^{n} \left(\frac{1}{n}\right) \delta(x - ia/2)\,. \tag{9.17}$$

La señal cuadrática media después de la cuantificación es

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx \\ &= 2\int_{0}^{\infty} x^2 p(x)\,dx \\ &= \frac{2}{n}\{(a/2)^2 + (3a/2)^2 + \cdots + [(n-1)a/2]^2\} \\ &= \frac{2}{n}\frac{n(n-1)(n+1)}{6}(a/2)^2 \end{aligned}$$

$$S = \frac{n^2 - 1}{12}a^2. \tag{9.18}$$

Puede aplicarse el mismo método si los niveles no son equiprobables, aunque el resultado correspondiente a la ecuación (9.18) no pueda expresarse en forma tan compacta.

En el proceso de cuantificación, cada muestra de la señal continua de entrada se aproxima al nivel más cercano permitido, lo que se muestra en la figura 9.3, donde la señal de entrada se encuentra a ϵ unidades del nivel de cuantificación más próximo A_j. En la salida del receptor, el nivel A_j podría deberse a cualquier amplitud de la señal en

http://libreria-universitaria.blogspot.com

el intervalo $A_j - a/2$ a $A_j + a/2$. Esta incertidumbre podría deberse también a ruido aditivo, por lo que se tratará como fuente de ruido aditivo.

El error de cuantificación ϵ es la diferencia entre el nivel de la señal y el nivel de cuantificación más cercano permitido, como se muestra en la figura 9.3. A falta de información en contrario, se supone que todos los valores de ϵ son igualmente probables en cualquier parte del intervalo $-a/2 \le \epsilon < a/2$ y pueden describirse por medio de la función de densidad de probabilidad uniforme,

$$p(\epsilon) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & -a/2 \le \epsilon < a/2, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{9.19}$$

En realidad, el resultado no depende mucho de esta suposición si la función de densidad de probabilidad no se destaca notablemente en algún punto del intervalo (p. ej., véase Ejer. 9.4.2). El ruido de cuantificación cuadrático medio se obtiene con facilidad:

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon^2 p(\epsilon)\, d\epsilon \\ &= \int_{-a/2}^{a/2} \frac{1}{a} \epsilon^2\, d\epsilon \\ \overline{\epsilon^2} &= \frac{a^2}{12}. \end{aligned} \tag{9.20}$$

Como la amplitud pico de la señal es $na/2$, la razón señal a ruido pico (en potencia) es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk qnt}} = \frac{(na/2)^2}{a^2/12} = 3n^2. \tag{9.21}$$

Expresada en decibeles, esto se convierte en

$$\left[\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk qnt}}\right]_{\text{dB}} = 4.8 + 20 \log_{10} n\,. \tag{9.22a}$$

En un código binario se tiene $n = 2^m$ de manera que, en el caso binario, la ecuación (9.22a) se convierte en

$$\left[\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk qnt}}\right]_{\text{dB}} = 4.8 + 6m \qquad \text{(sistema binario).} \tag{9.22b}$$

Por tanto, la razón señal pico a ruido de cuantificación rms aumenta 6 dB por cada bit adicional usado en un sistema binario.

En el caso en que todos los niveles de la señal son equiprobables, la señal cuadrática media está dada por la ecuación (9.18); dividiendo entre la ecuación (9.20), se obtiene

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{qnt}} = n^2 - 1 \approx n^2. \tag{9.23}$$

La calidad del rendimiento, sobre una base cuadrática media, aumenta con el cuadrado del número de niveles empleados y difiere sólo por una constante de la razón *S/N*

http://libreria-universitaria.blogspot.com

dada en la ecuación (9.21). En ambos casos, la razón señal a ruido de cuantificación aumenta alrededor de 6 dB por cada bit adicional que se use. Sin embargo, es difícil definir un criterio general de rendimiento. Resultados experimentales indican que de 8 a 16 niveles bastan para la inteligibilidad, $n = 128$ a $n = 256$ (es decir, $m = 7$ a $m = 8$) es normal en telefonía, mientras que en audio de calidad musical se utiliza 4096 ($m = 12$) a 65 536 ($m = 16$).

El cálculo anterior supuso que todos los niveles de la señal eran equiprobables. No obstante, éste quizá no sea el caso (y a menudo no lo es en la práctica). Esto produce algunos incrementos en la amplitud de la señal, con una razón señal a ruido de cuantificación más pobre que en otros. Por ejemplo, experimentalmente se observa que las amplitudes instantáneas típicas del habla son inferiores a 1/4 del valor rms durante el 50% del tiempo.† Por tanto, al codificar voz las señales de amplitud pequeña, que ocurren la mayor parte del tiempo, tienen un ruido de cuantificación relativamente grande, lo que provoca una razón señal a ruido de cuantificación global más bien pobre.

Esto puede remediarse usando un cuantificador no lineal (es decir, no uniforme) con etapas de cuantificación derivadas (p. ej., véase Fig. 7.25). Un método usado a menudo en la práctica para obtener un efecto equivalente es ponderar la señal de entrada antes de la cuantificación con un cuantizador lineal (uniforme). En el receptor se aplica una ponderación inversa para que la transmisión no tenga distorsiones.

En la figura 9.4 se muestra la característica de entrada y salida de un sistema de predistorsión no lineal que podría utilizarse para señales como la voz. El efecto de la característica no lineal es comprimir las mayores amplitudes de la señal, por lo que tal sistema se llama *compresor*‡ La operación inversa en el receptor se llama *expansor*. La combinación de un compresor y un expansor se llama *compansor*. Los sistemas de compansión se obtienen a menudo con circuitos activos cuyas ganancias se controlan

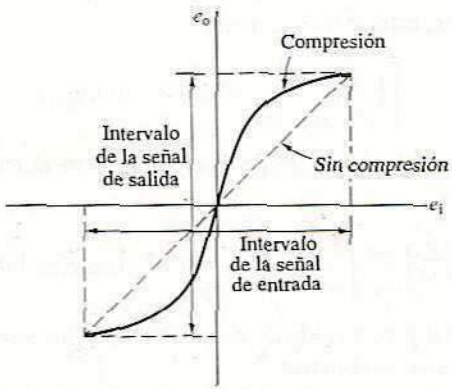


Figura 9.4 Característica de entrada y salida de un compresor de señales.

† J. A. Betts, *Signal Processing, Modulation and Noise*, Nueva York, American Elsevier Publishing Co., 1970, Cap. 7.

‡ Este tipo de compresión de señales se utiliza algunas veces en sistemas AM de comunicación de voz para obtener en forma efectiva los efectos de un índice de alta modulación sin exceder el límite pico de modulación. En general, se prefiere una graduación logarítmica para aplicaciones de voz.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

por medio de redes de diodos polarizados.† Por este medio puede aproximarse la característica no lineal requerida por una aproximación lineal por tramos.

EJEMPLO 9.4.1

Una señal de entrada continua tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$p(x) = \begin{cases} 1 - |x| & -1 \le x \le +1, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

a) Determine las dimensiones y los niveles de las etapas de un cuantificador si se usa un cuantizador lineal (uniforme) de 8 niveles ($n = 8$).

b) Determine los niveles de las etapas de un cuantificador no lineal neçesarios para que los niveles de la señal cuantificada sean equiprobables. Además, trace la característica del compresor que precede a un cuantificador lineal.

Solución a) El intervalo neto de la señal es 2, por lo que el tamaño del paso, a, es $a = 2/n = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Entonces, los niveles de cuantificación se ajustan en $\pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{8}, \pm\frac{5}{8}, \pm\frac{7}{8}$, y los límites de redondeo del cuantificador se colocan en $0, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm 1$.

b) Debido a la simetría, sólo se verá el caso para $x > 0$. A fin de hacer todos los niveles de la señal equiprobables, se ajustan los niveles de las etapas del cuantificador de manera que el área bajo $p(x)$ se divida en partes iguales (véase Fig. 9.5a). Designando las etapas del cuantificador como a, b, c, d, respectivamente, se tiene

$$\int_0^a (1 - x)\,dx = \int_d^1 (1 - x)\,dx = \tfrac{1}{16},$$

y

$$\int_a^b (1 - x)\,dx = \int_b^c (1 - x)\,dx = \int_c^d (1 - x)\,dx = \tfrac{1}{8}.$$

Resolviendo sucesivamente, se obtienen las etapas del cuantificador,

$$a = 1 - (\sqrt{7/2})/2 = 0.065,$$
$$b = 1 - (\sqrt{5/2})/2 = 0.209,$$
$$c = 1 - (\sqrt{3/2})/2 = 0.388,$$
$$d = 1 - (\sqrt{1/2})/2 = 0.646$$

† En los sistemas telefónicos PCM en Estados Unidos, la ley de compansión es $e_o = [\log (1 + 255e_i)]/ [\log (256)]$, donde e_i, e_o se normalizan a un intervalo (0, 1). Esto se aproxima usando 15 segmentos lineales en la característica de ganancia de un amplificador.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

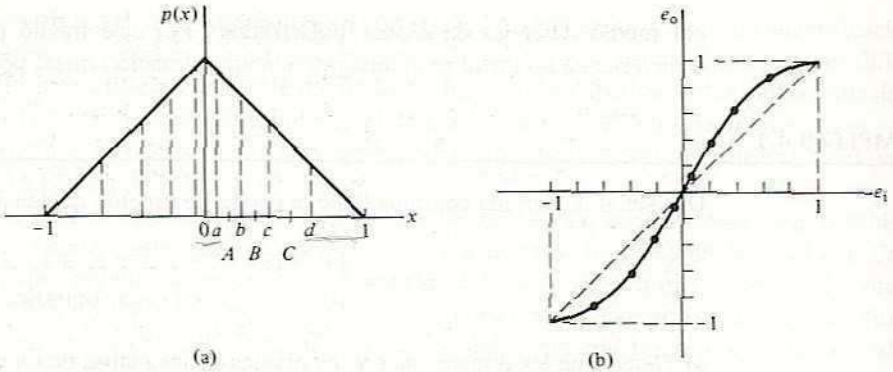


Figura 9.5 Función de densidad de probabilidad y característica del compresor para el ejemplo 9.4.1.

La característica correspondiente del compresor que precede a un cuantificador lineal (uniforme) para obtener los mismos resultados se halla graficando los puntos (0.065, 0.125), (0.209, 0.375), etc., como aparece en la figura 9.5(b). De manera análoga, los límites de redondeo del cuantificador son 0, $\pm A$, $\pm B$, $\pm C$, ± 1, donde A, B, C se determinan a partir de

$$\int_0^A (1 - x)\,dx = \int_A^B (1 - x)\,dx = \int_B^C (1 - x)\,dx = \int_C^1 (1 - x)\,dx = \tfrac{1}{8},$$

o

$$A \approx 1 - \sqrt{3}/2 = 0.134,$$
$$B \approx 1 - \sqrt{2}/2 = 0.293,$$
$$C \approx 1 - 1/2 = 0.500.$$

EJERCICIO 9.4.1

Las características del compresor determinadas por una gráfica de densidad de probabilidad uniforme, como se ilustra en el ejemplo 9.4.1, pueden tender a comprimirse demasiado si hay grandes diferencias en $p(x)$ de una región a otra. Esto puede corregirse utilizando el área bajo $[p(x)]^{1/3}$ en lugar de $p(x)$ entre incrementos.[†] Recalcule los puntos del cuantificador del ejemplo 9.4.1 utilizando este método (en este caso no hay grandes diferencias entre regiones adyacentes, por lo que es de esperar que los resultados *sean similares a los del ejemplo* 9.4.1).

RESPUESTA: 0.095, 0.297, 0.521, 0.790.

[†] Véase, por ejemplo, J. J. Spilker, Jr., *Digital Communications by Satellite*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, Inc., 1977, pág. 45.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJERCICIO 9.4.2

(a) Calcule el ruido de cuantificación cuadrático medio para la señal descrita por la fdp del ejemplo 9.4.1 si hubiera sólo dos niveles de cuantificación (±0.5). No suponga que la fdp del error de cuantificación es constante en cada nivel. (b) Calcule el ruido de cuantificación cuadrático medio usando la ecuación (9.20) y compare.

RESPUESTA: $\frac{1}{12}$ (en ambos casos).

El método de elección de las etapas de cuantificación sugerido en el ejemplo 9.4.1 es relativamente fácil de aplicar. Sin embargo, no garantiza resultados óptimos, aunque para muchas aplicaciones pueden ser satisfactorios. Un método más adecuado es elegir los puntos de cuantificación en forma tal que el error de cuantificación se minimice desde un punto de vista cuadrático medio. Una solución a este problema puede hallarse de manera similar al caso de las representaciones de señales ortogonales en la sección 2.5.[†] Sin embargo, los límites de la integración dependen de los puntos de cuantificación, y debe usarse un procedimiento numérico iterativo para hallar una solución (véase Problema 9.4.7).

9.5 PROBABILIDAD DE ERROR EN LA TRANSMISIÓN

Ahora se dedicará alguna atención a los detalles de la transmisión de mensajes codificados digitalmente, examinando en principio el uso del tipo de señal digital destinada a la transmisión directa por una línea. Estas señales se llaman de *banda base*. El caso de pulsos modulados para transmitir por medio de la propagación de frecuencias de radio se examina en el capítulo 10.

En un sistema PCM binario, los dos niveles de pulsos pueden representarse como una señal encendida-apagada, (es decir, con una amplitud A y una amplitud 0 como los posibles niveles) o como pulsos de igual amplitud y polaridades opuestas (es decir, con amplitudes $-A/2$ y $A/2$). Esta última se conoce como señal binaria *polar*. La señal encendida-apagada produce un nivel medio distinto de cero que depende de las proporciones relativas de unos y ceros transmitidos. En una secuencia aleatoria de pulsos de encendido-apagado, la ligera variación del nivel medio da lugar a un espectro de línea además del espectro continuo de frecuencias de la información. La componente espectral en la tasa de bits puede utilizarse para sincronizar el receptor. Por otra parte, la representación de la señal polar requiere menos potencia transmitida para una tasa de error dada en presencia de ruido. Su empleo también facilita el ajuste del umbral de decisión en el receptor si las frecuencias de ocurrencia relativas de ambas señales binarias son iguales. Ambos temas se analizarán más adelante en esta sección.

[†] Véase, por ejemplo, F. Haber, *An Introduction to Information and Communication Theory* (Advances in Modern Engineering Series, vol. 4), Reading, Mass., Addison-Wesley, 1974. Cap. 6.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En la figura 9.6 se muestra un diagrama de bloques para un sistema de comunicación en banda base. Debido a que el ancho de banda de la línea de transmisión está severamente limitado por la capacitancia y la inductancia de la línea, se emplea igualación en intervalos regulares a lo largo de la línea. Esto contrarresta los efectos de la capacitancia y la inductancia, y amplía el ancho de banda utilizable de la línea. Sin embargo, aun con la igualación, la respuesta de la frecuencia de transmisión no se aproxima mucho a un filtro pasabajas ideal; se emplean los métodos de formación de pulsos analizados en la sección 7.3 para minimizar la interferencia entre símbolos (ISI, *intersymbol interference*).

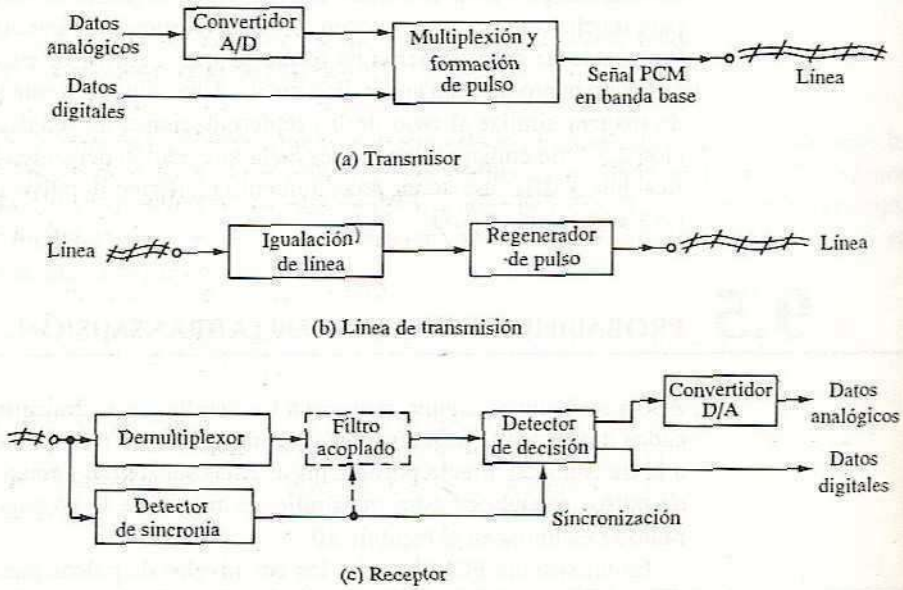


Figura 9.6 Sistema de comunicación de PCM en banda base.

Nótese que al usar los métodos de formación de pulso para minimizar la ISI de transmisión, se está más interesado en combatir las limitaciones de ancho de banda de la línea de transmisión que los efectos del ruido de transmisión. El filtro acoplado que se vio en el capítulo 7 puede emplearse para maximizar la razón señal a ruido del receptor. Sin embargo, este filtro obliga a un diseño diferente de la forma del pulso. En el diseño de sistemas de radio que manejen señales digitales, deben tomarse en cuenta ambos tipos de requisitos, haciendo las concesiones adecuadas. En sistemas de línea, la razón señal a ruido es suficientemente alta para poder suprimir el filtro acoplado. En su lugar, la atención debe centrarse en ensanchar la banda efectiva usando igualación para obtener velocidades de datos más altas, y en minimizar la interferencia entre símbolos con una formación de onda apropiada.

Comenzamos el análisis de la probabilidad de error sin usar receptor de filtro acoplado. Supongamos que los niveles binarios en el receptor son 0 y A; es decir, la

http://libreria-universitaria.blogspot.com

señal recibida $f(t)$ se encuentra tanto en el nivel 0 como en el A. La onda observada $y(t)$ en el receptor contiene también ruido aditivo $n(t)$, o sea,

$$y(t) = f(t) + n(t). \tag{9.24}$$

En un momento dado $t = t_1$, las posibles entradas al receptor son

$$y(t_1) = A + n(t_1) \qquad \text{(señal presente)}, \tag{9.25}$$

o

$$y(t_1) = n(t_1) \qquad \text{(señal ausente)}. \tag{9.26}$$

La decisión correcta de si $f(t)$ está presente o ausente podría realizarse con facilidad a partir de las ecuaciones (9.25) y (9.26) de no ser por el hecho de que $n(t_1)$ es aleatorio. Por tanto, para describir el funcionamiento se utiliza la probabilidad. Advirtiendo que hay una probabilidad distinta de cero de que la amplitud del ruido pueda exceder a la de la señal, se prefiere hablar de *probabilidad de error* al tomar la decisión correcta.

Para calcular la probabilidad de error, se establece una regla de decisión. Designando el umbral de decisión como μ, en el momento $t = t_1$, se utiliza la regla siguiente:

$$\left.\begin{array}{ll} y(t_1) > \mu: & \text{"señal presente"} \\ y(t_1) < \mu: & \text{"señal ausente"} \\ y(t_1) = \mu: & \text{"duda"}^{\dagger} \end{array}\right\}. \tag{9.27}$$

El siguiente paso para determinar el umbral de decisión μ óptimo dependerá de la forma de la función de densidad de probabilidad de $n(t_1)$.

Se supone que el ruido $n(t_1)$ tiene distribución gaussiana con valor medio cero y valor cuadrático medio

$$\overline{n^2(t_1)} = \sigma^2. \tag{9.28}$$

De las ecuaciones (9.28) y (8.50), se halla que la función de densidad de probabilidad en la entrada cuando no hay señal presente, designada por $p_0(y)$, es

$$p_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-y^2/(2\sigma^2)}. \tag{9.29}$$

La función de densidad de probabilidad en la entrada cuando la señal $f(t)$ está presente, designada por $p_1(y)$, es también gaussiana pero tiene valor medio igual a A [véase Ec. (9.25)],

$$p_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(y-A)^2/(2\sigma^2)}. \tag{9.30}$$

Estas funciones de densidad de probabilidad se muestran en la figura 9.7.

---

† Pronto será evidente que, excepto en casos sumamente inusuales, esta alternativa ocurre con probabilidad cero, así que esto no tiene mayores consecuencias.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

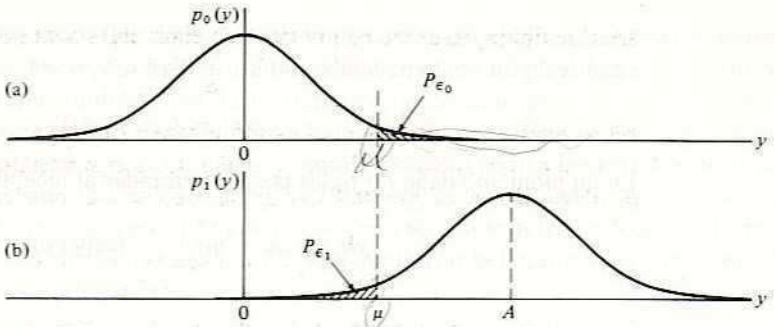


Figura 9.7 Funciones de densidad de probabilidad para el caso de decisión binaria.

El umbral de decisión es μ, y en la figura 9.7 se ve que hay casos en que $y > \mu$ aunque la señal esté ausente. Este tipo de error se llama "falsa alarma" porque el receptor decide que la señal está presente aunque no lo esté. La probabilidad de falsa alarma, designada por P_{ϵ_0}, corresponde al área sombreada en la figura 9.7(a). En forma de ecuación, puede expresarse como

$$P_{\epsilon_0} = \int_{\mu}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-y^2/(2\sigma^2)}\, dy. \tag{9.31}$$

En forma similar, en la figura 9.7(b) se ve que hay casos en que $y < \mu$ aunque la señal esté presente. Este error se llama "falsa supresión" porque el receptor decide que la señal está ausente aunque no lo esté. La probabilidad de falsa supresión, designada por P_{ϵ_1}, está dada por el área sombreada de la figura 9.7(b), o

$$P_{\epsilon_1} = \int_{-\infty}^{\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(y-A)^2/(2\sigma^2)}\, dy. \tag{9.32}$$

Se podría continuar hablando de las probabilidades de errores de falsa alarma y falsa supresión, pero es más conveniente definir una probabilidad neta de error que comprenda ambos tipos. Por comodidad, el dígito binario 1 se asociará a la condición "señal presente" y el 0 a la condición "señal ausente" (la definición podría haberse invertido; el orden es arbitrario). Sean P_0 y P_1, respectivamente, las probabilidades de ceros y unos de la fuente; es decir, P_0 es la probabilidad de que se envíe un 0 binario. El caso usual es $P_0 = P_1 = 1/2$ (aunque pueden ser diferentes siempre que la suma sea uno; debe enviarse un 0 o un 1). En estos términos, la *probabilidad de error* neta, P_ϵ se define como

$$P_\epsilon = P_0 P_{\epsilon_0} + P_1 P_{\epsilon_1}. \tag{9.33}$$

Suponiendo que los niveles binarios (ceros y unos) son equiprobables (esto es, $P_0 = P_1 = 1/2$), la probabilidad de error neta es igual a la mitad de la suma de las dos áreas sombreadas de la figura 9.7:

$$P_\epsilon = \tfrac{1}{2}(P_{\epsilon_0} + P_{\epsilon_1}). \tag{9.34}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

De esta figura, es obvio que la suma de estas áreas será mínima si

$$\mu = A/2 . \tag{9.35}$$

Esto determina el umbral de decisión μ para mínima probabilidad de error (nótese que este valor no es tan obvio si $P_0 \neq P_1$). Con este umbral de decisión, las dos áreas sombreadas de la figura 9.7 son iguales debido a la simetría, y puede escribirse

$$P_\epsilon = \int_\mu^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-y^2/(2\sigma^2)}\, dy . \tag{9.36}$$

Con el cambio de variable $z = y/\sigma$, esto se convierte en

$$P_\epsilon = \int_{\mu/\sigma}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz . \tag{9.37}$$

Con referencia a la ecuación (8.56), la ecuación (9.37) puede reescribirse como

$$P_\epsilon = Q(\mu/\sigma) . \tag{9.38}$$

Insertando el valor del umbral de decisión $\mu = A/2$, se obtiene

$$P_\epsilon = Q[A/(2\sigma)] . \tag{9.39}$$

En la figura 9.8 se muestra una gráfica de P_ϵ como función de $A/(2\sigma)$. Nótese que A es la separación (en tensión) entre los estados binarios y 2σ es el ancho efectivo de la

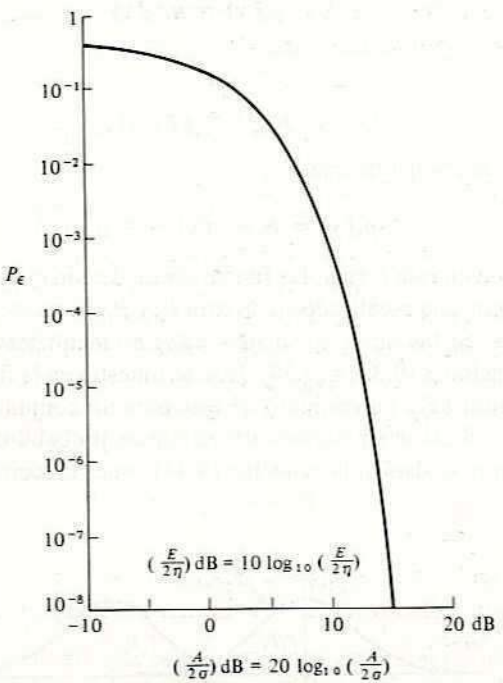


Figura 9.8 Probabilidad de error contra $A/(2\sigma)$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

densidad de probabilidad del ruido aditivo. Por tanto, se ve que es la separación entre estados, dividida por el ancho efectivo de la fdp del ruido, la que controla la probabilidad de error en la transmisión.

Estos resultados pueden ponerse en unidades más familiares para el caso encendido-apagado haciendo que la potencia media de la señal S sea $S = (\frac{1}{2})(0)^2 + (\frac{1}{2})(A)^2 = A^2/2$. Se tiene también que la potencia de ruido promedio es: $N = \sigma^2$, por lo que la ecuación (9.39) puede escribirse, para el caso encendido-apagado, como

$$P_\epsilon = Q\left(\sqrt{\frac{S}{2N}}\right) \qquad \text{(encendido-apagado binario).} \tag{9.40}$$

El caso polar binario se obtiene de la misma forma excepto que $S = (A/2)^2$, de modo que

$$P_\epsilon = Q\left(\sqrt{\frac{S}{N}}\right) \qquad \text{(polar binario).} \tag{9.41}$$

Por tanto, la potencia media transmitida para la señal binaria encendido-apagado debe ser el doble que en la polar para obtener la misma probabilidad de error neta. La señal binaria polar tiene también la ventaja de que el umbral de decisión óptimo se halla en cero para $P_0 = P_1$, mientras que el receptor para la señal binaria encendido-apagado debe ajustar el umbral a la mitad de la amplitud de la señal recibida.

Las ecuaciones anteriores se pueden reescribir explícitamente en términos de las probabilidades condicionales

$$p_0(y) = p_{Y|0}(y) \tag{9.42}$$

y

$$p_1(y) = p_{Y|1}(y), \tag{9.43}$$

y la observación adicional de que

$$p_Y(y) = P_0 p_{Y|0}(y) + P_1 p_{Y|1}(y). \tag{9.44}$$

Cuando se escribe en esta forma, las funciones de densidad de probabilidad mostradas en la figura 9.8, con una escala adecuada para P_0 y P_1, se pueden trazar juntas en un solo conjunto de ejes. Si las áreas adecuadas $p_Y(y)$ se identifican como $P_0 P_{\epsilon_0}, P_1 P_{\epsilon_1}$, se obtienen las ecuaciones (9.35) a (9.39). Esto se muestra en la figura 9.9. Con frecuencia es conveniente usar sólo un conjunto de ejes para un conjunto de condiciones dadas. Sin embargo, se deberá tener cuidado de incluir las probabilidades de los dígitos en la fuente P_0, P_1, como se dan en la ecuación (9.44), antes de combinar las dos densidades de probabilidad.

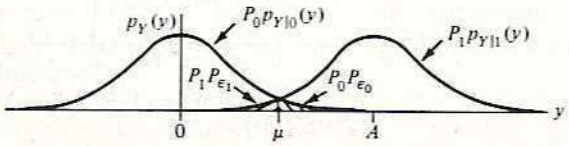


Figura 9.9 Funciones de densidad de probabilidad condicional para el caso binario.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJEMPLO 9.5.1

El concepto de probabilidad neta de error puede ampliarse al problema de detección multinivel (M–ario), y para ruido gaussiano el cálculo es directo. Tómese la señal polar ternaria de ruido aditivo gaussiano cuyas funciones de densidad de probabilidad se muestran en la figura 9.10, representando los dígitos ternarios 0, 1 y 2. Calcule la probabilidad neta de error si los umbrales de decisión se ajustan a $\pm A/4$ y las probabilidades de los dígitos en la fuente son iguales.

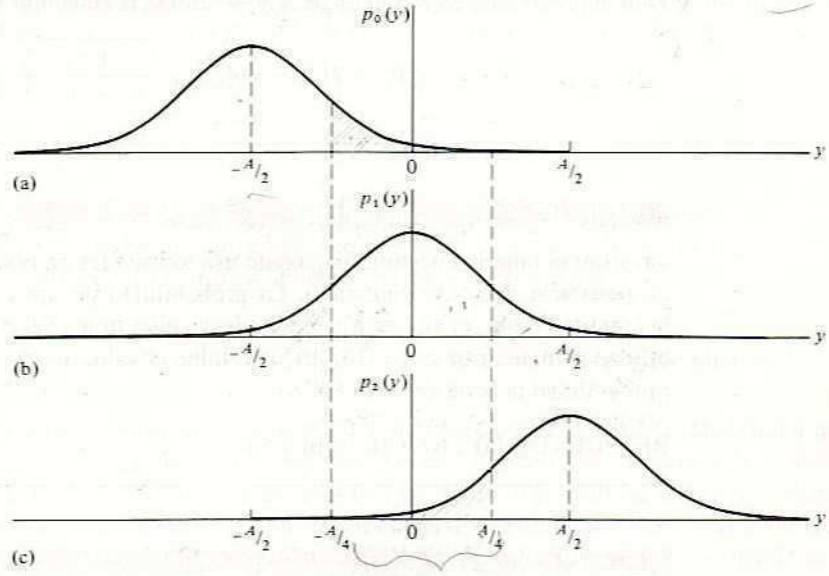


Figura 9.10 Funciones densidad de probabilidad para la señal polar ternaria.

Solución Con referencia a la figura 9.10, puede escribirse

$$P_{\epsilon_0} = \int_{-A/4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(y+A/2)^2/2\sigma^2}\, dy = Q[A/(4\sigma)].$$

de manera similar, se tiene

$$P_{\epsilon_2} = Q[A/(4\sigma)] \quad \text{y} \quad P_{\epsilon_1} = 2Q[A/(4\sigma)].$$

Como $P_0 = P_1 = P_2 = 1/3$, entonces

$$P_\epsilon = \tfrac{4}{3} Q[A/(4\sigma)].$$

EJEMPLO 9.5.2

Suponiendo que sólo se cometen errores entre niveles adyacentes, calcule la probabilidad neta de error del cuantificador de n niveles ilustrado en la figura 9.3, para el caso del ruido aditivo gaussiano con media cero y varianza $\sigma^2 = N$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Solución Con referencia al resultado del ejemplo 9.5.1, se nota que el factor 4/3 surge debido a que había que contar $2(n - 1)$ áreas al determinar la probabilidad de error y que cada una estaba ponderada por $1/n$ debido a que todas eran equiprobables. Generalizando el resultado del ejemplo 9.5.1 y haciendo $a = A/2$, puede escribirse

$$P_\epsilon = \frac{2(n-1)}{n} Q[a/(2\sigma)] .$$

Para expresar esto en términos de S/N, se utiliza la ecuación (9.18) a fin de obtener

$$P_\epsilon = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3}{n^2 - 1} \cdot \frac{S}{N}}\right) .$$

EJERCICIO 9.5.1

Un sistema binario encendido-apagado usa los niveles de la señal 0 y A para transmitir en presencia de ruido gaussiano. La probabilidad de unos y ceros es la misma. Si la amplitud de la señal A es K veces la desviación típica del ruido, (a) calcule la probabilidad neta de error si $K = 10$. (b) Determine el valor necesario de K para obtener una probabilidad neta de error de 10^{-5}.

RESPUESTA: (a) 2.87×10^{-7}; (b) 8.53.

EJERCICIO 9.5.2

Asigne los dígitos binarios equiprobables 0, 1 a las funciones de densidad de probabilidad de la figura 9.10(a) y (c), reduciendo el caso polar ternario a binario. Con el umbral de decisión ajustado en cero, repita los cálculos del ejercicio 9.5.1 para el caso polar binario.

RESPUESTA: Igual a la del ejercicio 9.5.1.

La probabilidad de error depende de la razón señal a ruido en un momento dado. Como el filtro acoplado que se analizó en el capítulo 7 es el mejor sistema invariable en el tiempo para maximizar la razón señal pico a raíz cuadrática media de ruido en presencia de ruido blanco, ahora se verá este caso.

Considérese la señal encendido-apagado $f(t)$ en $(0, T)$, en presencia de ruido blanco $n(t)$. Haciendo que $y(t)$ sea la salida del filtro acoplado, se tiene

$$y(t) = f_o(t) + n_o(t) , \tag{9.45}$$

donde $f_o(t)$, $n_o(t)$ son las salidas del filtro acoplado debidas a la señal de entrada y al ruido, respectivamente. El filtro está diseñado para maximizar la razón señal a ruido en

http://libreria-universitaria.blogspot.com

$t = t_m$ y se supondrá que $t_m = T$. De la ecuación (7.53), la salida del filtro acoplado en $t_m = T$ es E, la energía de $f(t)$. Por tanto, la ecuación (9.45) para $f(t)$ presente, se vuelve

$$y(T) = E + n_o(T) \qquad \text{(señal presente)}. \tag{9.46}$$

Por otra parte, si $f(t)$ está ausente, la salida del filtro es

$$y(T) = n_o(T) \qquad \text{(señal ausente)}. \tag{9.47}$$

La comparación de las ecuaciones (9.46) y (9.47) con la (9.25) y la (9.26), muestra que este problema ya se ha resuelto, con la excepción de que ahora A se reemplaza por E. Además, suponiendo que el ruido de salida es gaussiano con media cero, se tiene, de la ecuación (7.54),[†]

$$\sigma^2 = \overline{n_o^2(t)} = \frac{E\eta}{2}, \tag{9.48}$$

donde $\eta/2$ es la densidad espectral de potencia (bilateral) de ruido blanco en la entrada del filtro acoplado. Sustituyendo E por A y $\sqrt{E\eta/2}$ por σ en la ecuación (9.39), se tiene la probabilidad de error para la detección en el filtro acoplado:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E}{2\eta}}\right) \qquad \text{(encendido-apagado binario)}. \tag{9.49}$$

Esto también se indica en la figura 9.8, donde se observa que la probabilidad neta de error empieza a decrecer muy rápidamente con aumentos de la energía de la señal más allá de $E/(2\eta) \approx 10$ dB. Por encima de este nivel, la probabilidad de error disminuye alrededor de un orden de magnitud para cada dB de aumento en la energía de la señal.

El caso polar binario es similar excepto en que la salida del filtro acoplado es

$$y(T) = \pm E + n_o(T). \tag{9.50}$$

Sustituyendo $2E$ por A y $\sqrt{E\eta/2}$ por σ en la ecuación (9.39), se obtiene

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{\eta}}\right) \qquad \text{(polar binario)}. \tag{9.51}$$

La elección de un receptor de filtro acoplado, como se usa aquí, se justifica en sistemas en los que el ruido aditivo es un factor de diseño más dominante que la ISI. Si la ISI es el factor dominante, deben elegirse la característica de transferencia en frecuencia del filtro transmisor, el canal y el filtro receptor, para minimizar la ISI. Si no se conocen completamente las características del canal, o éstas pueden variar, suele hacerse un ajuste en el receptor para corregir la función de transferencia global a fin de obtener una ISI mínima. Este ajuste se llama igualación, tema de una sección posterior. Si se deben considerar los efectos tanto de la ISI como del ruido aditivo, el siguiente método es útil.

[†] Debido a que el filtro acoplado es un sistema invariable en el tiempo, entonces $n_i(t)$ también es gaussiana, aunque no se demostrará aquí.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Sean $f(t)$ la señal de pulso generada por una fuente binaria y $g(t)$ la señal de pulso recibida, que se supone es una señal de Nyquist para minimizar la ISI. Se supone que el sistema de transmisión es lineal e invariable en el tiempo y que el ruido es aditivo y gaussiano (aunque no necesariamente blanco) con media cero. En la figura 9.11 se muestra un modelo del sistema. Aquí $H_T(\omega)$ y $H_R(\omega)$ son los filtros de transmisión y recepción, mientras que $H_C(\omega)$ es el filtro del canal. Se supone que la magnitud en banda media de $H_C(\omega)$ está normalizada a la unidad y que las pérdidas del canal se toman en cuenta para un factor de ganancia global.

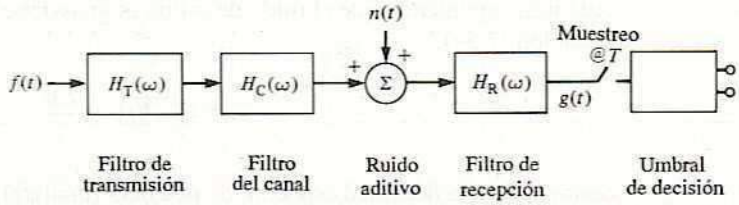


Figura 9.11 Modelo de canal lineal para señalización de pulso.

Se nota que $g(0) = 1$ porque $g(t)$ es una señal de Nyquist, y se asignan una amplitud A y un retardo t_d como parámetros. Por tanto, la transformada de Fourier de $g(t)$ es

$$AG(\omega)e^{-j\omega t_d} = F(\omega)H_T(\omega)H_C(\omega)H_R(\omega)\,. \tag{9.52}$$

Aquí el objetivo es optimizar la elección de $H_T(\omega)$ y $H_R(\omega)$, sujetos a la restricción de una energía finita por símbolo transmitido:

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 |H_T(\omega)|^2\, d\omega\,, \tag{9.53}$$

manteniendo una formación de pulso de Nyquist global. El uso de la ecuación (9.52) en la (9.53) da

$$E = \frac{A^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(\omega)|^2}{|H_C(\omega)|^2|H_R(\omega)|^2}\, d\omega\,, \tag{9.54}$$

o

$$A^2 = E\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(\omega)|^2}{|H_C(\omega)|^2|H_R(\omega)|^2}\, d\omega\right]^{-1}. \tag{9.55}$$

El ruido cuadrático medio en el umbral de decisión es

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega)\,|H_R(\omega)|^2\, d\omega\,. \tag{9.56}$$

La probabilidad neta de error para un sistema polar binario con unos y ceros equiprobables y ruido aditivo gaussiano es [véase Problema 9.5.1]:

$$P_\epsilon = Q(A/\sigma)\,. \tag{9.57}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Como $Q(A/\sigma)$ es una función decreciente monótona de A/σ, la probabilidad de error se minimiza si σ/A se maximiza. Utilizando las ecuaciones (9.55), (9.56) y tomando por conveniencia el cuadrado de esta razón, se tiene

$$\frac{\sigma^2}{A^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega)\,|H_R(\omega)|^2\,d\omega\,\frac{1}{2\pi E}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|G(\omega)|^2}{|H_C(\omega)|^2|H_R(\omega)|^2}\,d\omega\,. \tag{9.58}$$

Si se identifican las dos integrales del lado derecho de la ecuación (9.58) con las dos de la ecuación (7.46) y se utiliza luego la desigualdad de Schwarz, se obtiene

$$\frac{\sigma^2}{A^2} \geq \left|\frac{1}{2\pi\sqrt{E}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{S_n(\omega)}\,|G(\omega)|}{|H_C(\omega)|}\,d\omega\right|^2, \tag{9.59}$$

con igualdad si, y sólo si [véase Ec. (7.47)]:

$$|H_R(\omega)|^2 = k_R\frac{|G(\omega)|}{\sqrt{S_n(\omega)}\,|H_C(\omega)|}. \tag{9.60}$$

Esto proporciona el filtro de recepción óptimo en términos de la raíz cuadrada de la densidad de energía de $g(t)$, la raíz cuadrada de la densidad espectral de potencia del ruido aditivo y la magnitud de la función de transferencia del filtro de canal. Se usan las ecuaciones (9.52), (9.60) para obtener la magnitud de la función de transferencia correspondiente del filtro transmisor:

$$|H_T(\omega)|^2 = k_T\frac{|G(\omega)|\sqrt{S_n(\omega)}}{|H_C(\omega)|\,|F(\omega)|^2}. \tag{9.61}$$

En el caso de ruido blanco, $S_n(\omega) = \eta/2$ y los cuadrados de las magnitudes de la función de transferencia de los filtros óptimos de recepción y transmisión están especificados por

$$|H_R(\omega)|^2 = k_R\frac{|G(\omega)|}{|H_C(\omega)|}, \tag{9.62}$$

$$|H_T(\omega)|^2 = k_T\frac{|G(\omega)|}{|H_C(\omega)|\,|F(\omega)|^2}. \tag{9.63}$$

Nótese que si $|F(\omega)|$ no varía mucho sobre el ancho de banda del canal, un diseño de filtro puede satisfacer tanto $|H_R(\omega)|$ como $|H_T(\omega)|$.

Por último, la mínima probabilidad de error para la elección de filtros óptimos se encuentra sustituyendo la raíz cuadrada de la ecuación (9.59) en la (9.57):

$$P_{\epsilon_{\min}} = Q\left\{\sqrt{E}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{S_n(\omega)}\,|G(\omega)|}{|H_C(\omega)|}\,d\omega\right]^{-1}\right\}. \tag{9.64}$$

Para $S_n(\omega) = \eta/2$, $|H_C(\omega)| = 1$, y notando que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|G(\omega)|\,d\omega = 1$, esto da

$$P_{\epsilon_{\min}} = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{\eta}}\right), \tag{9.65}$$

lo cual coincide con la ecuación (9.51) para el caso polar binario.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

9.6 COMPORTAMIENTO *S/N* DE LA PCM

Ahora se examinará el comportamiento *S/N* de la PCM en presencia de ruido blanco gaussiano (p. ej., ruido térmico). Para simplificar, se hacen algunas suposiciones casi siempre válidas en condiciones de operación típicas. Primero, se supone que la probabilidad de error, P_ϵ, es lo bastante pequeña para que la probabilidad de más de un bit en una palabra de código sea despreciable. Por ejemplo, si $P_\epsilon = 10^{-4}$ y se emplea una palabra de código de 10 bits ($m = 10$), la probabilidad de más de un error es del orden de (usando la aproximación de Poisson) $1 - P_0 - P_1 = 1 - (1.001) \exp(-0.001) = 5 \times 10^{-7}$.

Hay m dígitos binarios para describir $n = 2^m$ niveles y a es el incremento de amplitud cuantificada. Se supone que las palabras de código formadas por los m dígitos binarios están ordenadas de acuerdo con el valor numérico de cada palabra de código. Usando una regla lineal de cuantificación, el error que ocurre en el bit menos significativo corresponde a un error en la amplitud a, el que ocurre en el siguiente bit más significativo corresponde a un error $2a$, etcétera. El ruido cuadrático medio de salida debido al error en un bit es

$$\overline{(\Delta m)^2} = \frac{1}{m}[(a)^2 + (2a)^2 + (4a)^2 + (8a)^2 + \cdots + (2^{m-1}a)^2]. \tag{9.66}$$

La suma de la progresión geométrica en la ecuación (9.66) es

$$\overline{(\Delta m)^2} = \frac{2^{2m} - 1}{3m} a^2. \tag{9.67}$$

La probabilidad de que determinado bit sea erróneo es P_ϵ y existen m bits por palabra de código. Por tanto, el ruido térmico cuadrático medio por palabra de código es

$$\overline{n_{\text{th}}^2(t)} = mP_\epsilon\overline{(\Delta m)^2} = P_\epsilon(2^{2m} - 1)a^2/3. \tag{9.68}$$

Aplicando las ecuaciones (9.18) y (9.20) para la señal cuadrática media y el ruido de cuantificación presente, y usando la ecuación (9.68), se tiene

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{\overline{s^2(t)}}{\overline{n_{\text{qnt}}^2(t)} + \overline{n_{\text{th}}^2(t)}}, \tag{9.69}$$

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{2^{2m} - 1}{1 + 4P_\epsilon(2^{2m} - 1)} = \frac{n^2 - 1}{1 + 4P_\epsilon(n^2 - 1)}. \tag{9.70}$$

Para el caso polar binario, se utiliza la ecuación (9.41) en la (9.70) para obtener

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{n^2 - 1}{1 + 4(n^2 - 1)Q(\sqrt{S_i/N_i})} \tag{9.71}$$

donde S_i/N_i se mide en la entrada del receptor. En la figura 9.12 se muestra una gráfica de la ecuación (9.71). Hay dos modos distintos de comportamiento, uno limitado por el ruido de transmisión (térmico) y el otro por el ruido de cuantificación. En general, los sistemas PCM se operan en la región donde la cuantificación comienza a ser el factor predominante.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

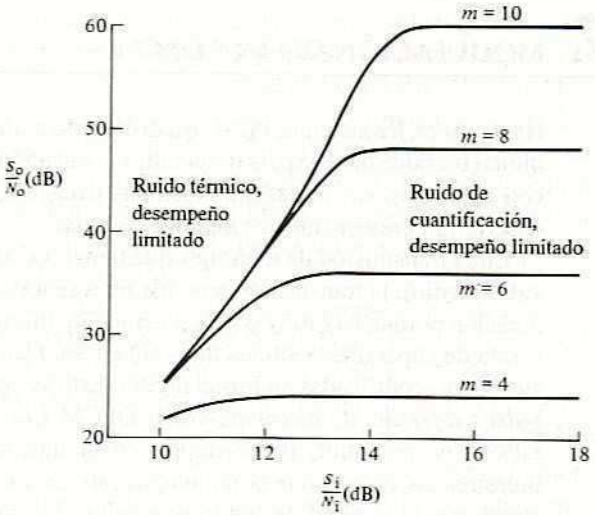


Figura 9.12 Comportamiento de la PCM en presencia de ruido.

Una manera de obtener una indicación cualitativa bastante buena del comportamiento de un sistema PCM es visualizar la corriente de bits en un osciloscopio. La escala de tiempo se ajusta para que se dispare a la velocidad de los bits con una duración de barrido de algunos bits. Si no hay ruido aditivo o limitaciones de banda, la pantalla del osciloscopio aparecerá como en la figura 9.13(a). En la figura 9.13(b) se ilustran los efectos de una banda limitada y en la 9.13(c) los de ruido aleatorio aditivo. El modelo resultante sugiere un ojo, y se llama *modelo ocular*. Para determinado sistema, el ojo se cierra al añadirse más ruido.

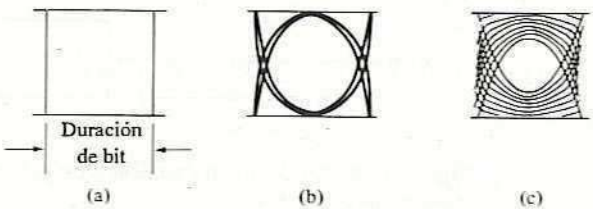


Figura 9.13 Modelos oculares para PCM: (a) de banda ancha, sin ruido; (b) con limitaciones de ancho de banda, sin ruido; (c) con limitaciones de ancho de banda y ruido aditivo.

El mejor momento para muestrear la señal recibida es cuando la apertura ocular es mayor. La presencia de ISI también hace que el ojo se cierre, y la cantidad relativa de cierre en el mejor momento de muestreo da una indicación de la degradación causada por la ISI. Por ejemplo, el cierre ocular de 20% debido a la presencia de ISI representa una degradación S/N equivalente de $-20 \log_{10} (1 - 0.20) = 1.94$ dB. Por tanto, dicho sistema requerirá 1.94 dB adicionales de razón señal a ruido por encima de la necesaria para una tasa de error específica y cero ISI.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

9.7 MODULACIÓN DELTA Y DPCM

Hasta ahora, los sistemas PCM se han descrito como aquellos en los que se usa un código digital bastante directo para transmitir información. Hay algunos sistemas PCM alternos con características lo bastante distintas para justificar una notación especial. Aquí se describirán brevemente dos de tales sistemas.

En la transmisión de mensajes que tienen valores de muestra repetidos (es decir, un valor medio), la transmisión repetida representa un desperdicio de capacidad de comunicación porque hay muy poco contenido de información en los valores repetidos. Una forma de superar esta situación es enviar sólo las diferencias entre valores de muestra sucesivos, codificadas en forma digital. Esto se conoce como *modulación de código de pulsos diferencial*, abreviada como DPCM (*differential pulse-code modulation*). La DPCM es muy útil, por ejemplo, en la transmisión de información de imágenes muestreadas porque una porción apreciable del código asignado a cada nivel describe simplemente el nivel de fondo promedio. Así, una imagen cuantificada en 6 bits (es decir, 64 niveles de brillantez por elemento de imagen) puede transmitirse con comparable fidelidad usando DPCM de 4 bits. En la figura 9.14 se muestran los diagramas de bloques de un modulador y un demodulador DPCM.

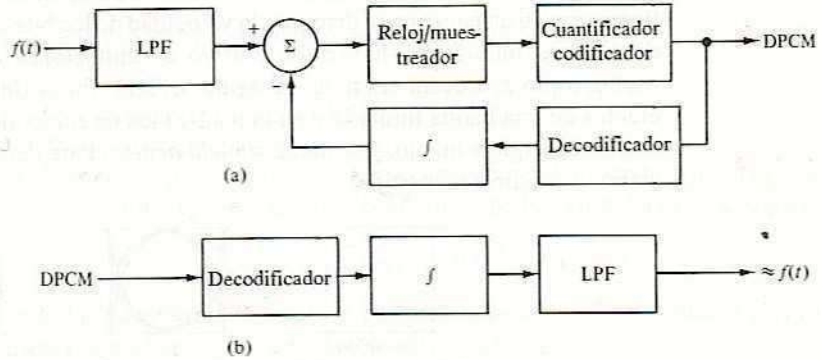


Figura 9.14 Modulación de código de pulsos diferencial: (a) modulador; (b) demodulador.

Entre las desventajas de la DPCM está el hecho de que si se comete un error, se mantiene una polaridad incorrecta hasta que se corrija. Además, estos sistemas adolecen de una posible sobrecarga por tasa de elevación debido a las operaciones de diferenciación y truncamiento. Por ejemplo, si dos muestras de imagen adyacentes difieren en más de ±7 niveles (en el código de 4 bits uno se reserva para el signo), el sistema podría enviar sólo ±7, y la sobrecarga resultante podría causar un error en la reconstrucción. Este problema puede reducirse anteponiendo un filtro lineal (p. ej., un filtro *RC*) al codificador para limitar la máxima tasa de elevación o descenso de la señal (por supuesto, ello también reduce la resolución de la imagen reconstruida). Es posible detectar la sobrecarga y variar el filtrado cuando ésta aparece (es decir, filtrado no lineal). Más aún, puede hacerse que el procedimiento se ajuste en función de los datos de entrada.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Desde una perspectiva más amplia, el propósito de la trayectoria de retroalimentación del codificador DPCM es predecir el valor de la muestra siguiente. El sentido de esto es que si el sistema puede hacer una buena predicción del siguiente valor muestreado, no hace falta que el codificador envíe tanta información (es decir, el codificador ha eliminado alguna redundancia en los datos). Se ha concentrado considerable investigación en mejorar los algoritmos de predicción. Se han usado con éxito los sistemas lineales de predicción que emplean líneas de retardo con derivaciones de ganancia ajustable para suprimir redundancia de los datos antes de la transmisión, pero a costa de cierta complejidad adicional.

Un sistema de codificación que es especialmente simple de construir es aquel que utiliza un sistema DPCM con un solo bit de salida que indica el signo de la diferencia entre muestras. Este sistema PCM se conoce como *modulación delta* y se abrevia DM o ΔM. Los sistemas DM tienen la ventaja de que los circuitos para la modulación en el transmisor y la demodulación en el receptor son más simples que los de otros sistemas PCM.

En la figura 9.15(a) se muestra un diagrama de bloques del sistema de modulación delta para aplicaciones de línea. El transmisor consiste en un comparador-modulador cuya entrada es la diferencia entre su salida acumulada y la señal de entrada $f(t)$. El

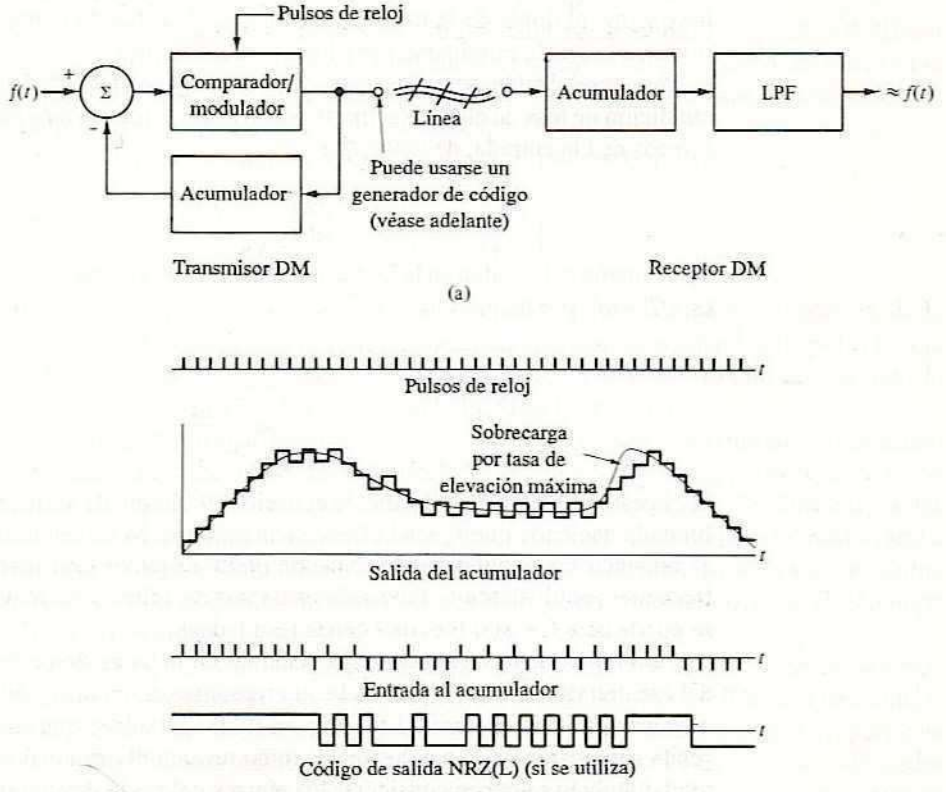


Figura 9.15 Sistema de modulación delta.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

modulador es accionado por los pulsos de reloj. Si la amplitud de la señal de entrada $f(t)$ es mayor que la salida acumulada en el tiempo de reloj, se produce un pulso de salida positivo. Al contrario, si $f(t)$ es menor que la señal retroalimentada, se genera un pulso de salida negativo. La figura 9.15(b) indica que la salida del acumulador en el transmisor es una aproximación escalonada de la señal de entrada continua $f(t)$. Por tanto, un acumulador similar en el receptor, suavizado por un filtro pasabajas, producirá una salida que se aproximará a la señal original $f(t)$. El sistema DM de la figura 9.15 está concebido para aplicaciones de línea donde la razón señal a ruido es alta. Para condiciones de ruido más elevadas, el acumulador del receptor puede estar precedido por un filtro acoplado y un umbral de decisión.

La DM, como la DPCM, está sometida a problemas de sobrecarga por tasa de elevación siempre que la entrada cambia con demasiada rapidez como para que la señal escalonada pueda seguirla [véase Fig. 9.15(b)]. Como resultado del acumulador, finalmente se "empareja" y no se presenta un error de polaridad a largo plazo si la entrada no es ruidosa.

En la figura 9.15 se observa que si el nivel de la señal se mantiene constante, la señal DM reconstruida muestra un comportamiento fluctuante conocido como *ruido vano*, el cual es una señal cuadrada de la mitad de la tasa del reloj. Si la tasa del reloj es mucho mayor que el doble de la mayor frecuencia de la señal de entrada, la mayor parte del ruido vano puede eliminarse por filtrado en el receptor.

Para modulación senoidal, puede obtenerse con facilidad una estimación de la condición de tasa de elevación límite o *sobrecarga de la pendiente* para la DM. Sea $f(t) = b \cos \omega_m t$ la entrada, de modo que

$$\left|\frac{df}{dt}\right|_{\text{máx}} = b2\pi f_m . \tag{9.72}$$

Si el tamaño del escalón en la DM es a, la máxima tasa de elevación que puede manejarse es $a/T = af_s$, por lo que

$$af_s \geq b2\pi f_m ,$$

$$f_s \geq \frac{2\pi f_m}{a/b} . \tag{9.73}$$

Si el peso espectral es uniforme, la ecuación (9.73) puede aplicarse a señales de banda limitada haciendo que f_m sea la frecuencia máxima. Si no es uniforme, pero disminuye al aumentar las frecuencias, la ecuación (9.73) se puede usar reemplazando f_m por una frecuencia equivalente f_0. Para señales de voz en aplicaciones telefónicas, se halla que se puede usar $f_0 \approx 800$ Hz con buenos resultados.

Para reproducir con precisión la señal de entrada, es deseable un tamaño pequeño del escalón. Sin embargo, esto debe acompañarse de una tasa del reloj alta para evitar la sobrecarga de pendiente. La ecuación (9.73) establece que si $af_s/(bf_m) \geq 2\pi$, entonces la sobrecarga de la pendiente del ruido no será el principal contribuyente al ruido total. También se deben considerar los efectos del ruido de cuantificación.

Se supondrá que en la DM el ruido de cuantificación está distribuido de manera uniforme en $(-a, a)$, por lo que el error cuadrático medio de cuantificación es $a^2/3$. Para obtener una medida del ruido de cuantificación, se supone también que su densidad

http://libreria-universitaria.blogspot.com

espectral de potencia es plana hasta $f_s = 1/T$. Filtrando este ruido a un ancho de banda f_m (donde $f_m < f_s$), se tiene

$$\overline{n_{qnt}^2(t)} = \frac{a^2}{3}\frac{f_m}{f_s}. \tag{9.74}$$

El valor cuadrático medio de la señal es $\overline{f^2(t)}$, por lo que la razón señal a ruido de cuantificación para DM es

$$\frac{S}{N} = \frac{3f_s}{a^2 f_m}\overline{f^2(t)}. \tag{9.75}$$

Como $\overline{f^2(t)} = b^2/2$ para señales senoidales, usando la ecuación (9.73) para eliminar a y suponiendo un espectro plano de la señal de entrada, la ecuación (9.75) puede reescribirse como

$$\frac{S}{N} = \frac{3}{8\pi^2}\left(\frac{f_s}{f_m}\right)^3. \tag{9.76}$$

Por tanto, la razón señal a ruido de cuantificación aumenta en $10 \log_{10} 2^3 = 9$ dB por cada aumento de una octava en la frecuencia de muestreo. Sin embargo, esta mejora se consigue sólo en las aproximaciones hechas y no se puede esperar que aumente indefinidamente con razones de muestreo cada vez más altas.

Por último, si se usa $f_s = 2B$, la ecuación (9.76) se convierte en

$$\frac{S}{N} = \frac{3}{\pi^2}\left(\frac{B}{f_m}\right)^3. \tag{9.77}$$

De esta ecuación se concluye que el desempeño *S/N* de la DM es superior al de la modulación de ángulo (p. ej., FM) y al de la modulación de regulación de pulso (p. ej., PPM) pero inferior a la característica exponencial de la PCM, lo que es más notorio cuando el número de niveles usados en la PCM se hace grande.

Se han realizado análisis y pruebas experimentales más extensos usando varias clases de señales en sistemas DM. En la figura 9.16 se muestra un resultado típico de la razón señal a ruido neta. Una búsqueda considerable ha producido métodos DM adaptables que intentan minimizar los efectos de la sobrecarga de la pendiente y del ruido vano a costa de una mayor complejidad. En estos métodos, el tamaño del escalón varía en forma automática y predeterminada de acuerdo con las características de variación en el tiempo de la señal de entrada.

La modulación delta se usa principalmente para transmisiones de voz en sistemas telefónicos y de telemetría. Se ha encontrado que la PCM es preferible para transmisiones de voz de alta calidad, mientras que la DM es más fácil de instalar y proporciona transmisiones de aceptable calidad. Una aplicación interesante es usar un codificador DM seguido de un contador binario ascendente-descendente (un contador que se incrementa con pulsos positivos y disminuye con pulsos negativos). Con las condiciones de reinicio apropiadas, esta combinación puede servir como un convertidor A/D comparativamente simple para aplicaciones telefónicas y de telemetría.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

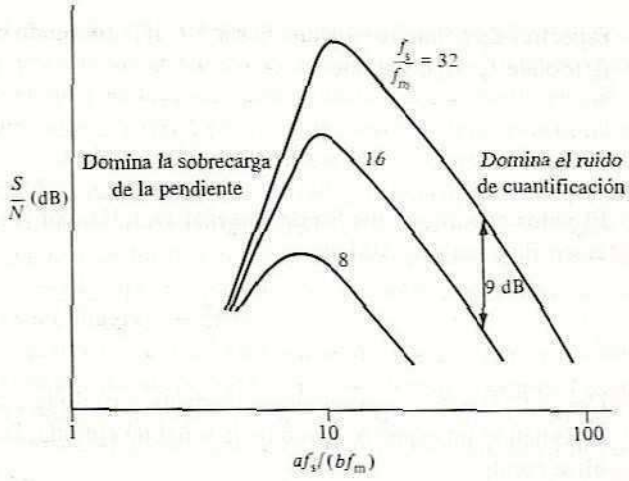


Figura 9.16 Características de razón señal a ruido típicas de la salida para sistemas de modulación delta.

EJERCICIO 9.7.1

A partir de la ecuación (9.75), desarrolle una expresión para el desempeño *S/N* de la DM para transmisiones de voz típicas y calcule para el caso en que $f_0 = 800$ Hz; $f_m = 3.3$ kHz; $f_s = 32$ kHz.

RESPUESTA: 27.7 dB.

9.8 ★ ANÁLISIS DE ERRORES DE LOS REPETIDORES PCM

Todos los canales de comunicación causan alguna atenuación y distorsión de las señales que pasan a través de ellos. Para asegurar la recepción satisfactoria de las señales en su destino final, suelen situarse repetidores adecuadamente espaciados a lo largo de la línea de transmisión. Esto proporciona la amplificación y la corrección de la distorsión del canal (es decir, la igualación) necesarias para permitir un reconocimiento satisfactorio de la señal en el receptor.

En los repetidores analógicos, la señal que se encuentra al final de cada segmento de la trayectoria de transmisión se iguala y amplifica antes de enviarse al siguiente segmento. El espaciamiento de los repetidores a lo largo de la ruta de transmisión *depende de las pérdidas de trayectoria y del intervalo dinámico del repetidor. Si éste no* debe ser en sí mismo una fuente primaria de distorsión, su intervalo dinámico está limitado por características de amplificación tal vez no lineales a los niveles más altos.

La ganancia neta del repetidor también está limitada por la posible alimentación de la salida a la entrada. En los sistemas repetidores analógicos modulados (p. ej., FM) con antenas, la retroalimentación puede ser un aspecto importante. Para minimizar la retroalimentación, los repetidores pueden utilizar antenas separadas sumamente direccionales para la recepción y la transmisión. También pueden desplazar un poco la

http://libreria-universitaria.blogspot.com

frecuencia portadora y filtrar la frecuencia portadora original antes de la transmisión, para obtener un mejor aislamiento entre la entrada y la salida (los sistemas que operan así se llaman *duplexores*). Nótese que en el repetidor analógico los efectos del ruido aditivo de todas las trayectorias precedentes (y los repetidores) se amplifican, junto con la señal, antes de enviar la señal más el ruido.

Una ventaja significativa de usar transmisión totalmente digital es que las señales digitales se prestan a condicionamiento y transformación periódicos. Por tanto, cada repetidor puede usarse para regenerar las señales de pulso en cada tiempo de muestreo. Este tipo de repetidor se llama *repetidor regenerativo*. El interés primordial en esta sección es comparar las tasas de error relativas de los sistemas que utilizan repetidores analógicos y repetidores regenerativos en la transmisión digital. Se supone transmisión en banda base y se pasan por alto los posibles procesos de modulación y demodulación necesarios para transmitir la señal a través de un canal.

Supóngase que las señales binarias son polares NRZ y que el ruido aditivo tiene valor medio cero y varianza σ^2. Sea la señal más el ruido en la entrada del primer repetidor analógico en un tiempo de muestra dado

$$y_1 = \pm\frac{A}{2} + n_1 .$$

Esta señal se amplifica para contrarrestar la atenuación y se envía al segundo repetidor. En la entrada de éste, se tiene

$$y_2 = \pm\frac{A}{2} + n_1 + n_2 .$$

Esto continúa hasta que, tras m trayectorias de transmisión, la señal más el ruido en la entrada del receptor es

$$y = \pm\frac{A}{2} + n_1 + n_2 + \cdots + n_m ,$$

$$y = \pm\frac{A}{2} + n . \tag{9.78}$$

Se supone que los términos de ruido aditivo son estadísticamente independientes de modo que (véase Ej. 8.9.1)

$$\sigma_n^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_m^2 .$$

Además, se supone que los amplificadores de los repetidores analógicos son idénticos y que el ruido del amplificador domina a las demás fuentes de ruido. En estas condiciones se tiene

$$\sigma_n^2 = m\sigma^2 .$$

Si, además, se supone que $n(t)$ tiene distribución gaussiana, la probabilidad de error es exactamente igual que la calculada en la sección 9.5, reemplazando σ^2 por $m\sigma^2$:

$$P_\epsilon = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi m}\,\sigma} e^{-(y+A/2)^2/(2m\sigma^2)}\, dy ,$$

$$P_\epsilon = Q[A/(2\sqrt{m}\,\sigma)] . \tag{9.79}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Ahora se considera un repetidor regenerativo. Suponiendo repetidores idénticos y ruido gaussiano, la probabilidad de error en cada repetidor es

$$p = Q[A/(2\sigma)]. \tag{9.80}$$

La probabilidad de cometer i errores en m ensayos está dada por la distribución binomial [véase Ec. (8.46)]

$$P_i = \binom{m}{i} p^i (1 - p)^{m-i}. \tag{9.81}$$

Sin embargo, se comete un error sólo en el receptor si se hace un número impar de decisiones incorrectas a lo largo de toda la trayectoria de transmisión. La probabilidad neta de error se obtiene sumando sobre todos los valores de i, de donde se obtiene

$$P_\epsilon = \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ impar}}}^{m} \binom{m}{i} p^i (1 - p)^{m-i} \tag{9.82}$$

$$= mp(1 - p)^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} p^3 (1 - p)^{m-3} + \ldots$$

$$\approx mp, \tag{9.83}$$

donde la aproximación es válida si $p \ll 1$ y $mp \ll 1$. Sustituyendo la ecuación (9.80) en la (9.83), se tiene

$$P_\epsilon \approx mQ[A/(2\sigma)]. \tag{9.84}$$

Se concluye que, con las aproximaciones señaladas, P_ϵ aumenta en forma lineal con m si se utilizan repetidores regenerativos.

En la figura 9.17 se comparan las ecuaciones (9.79) y (9.84) para diferentes tasas de error. Nótese que la ventaja relativa del uso de repetidores regenerativos se hace más notoria a medida que disminuye la tasa de error, p, de un repetidor.

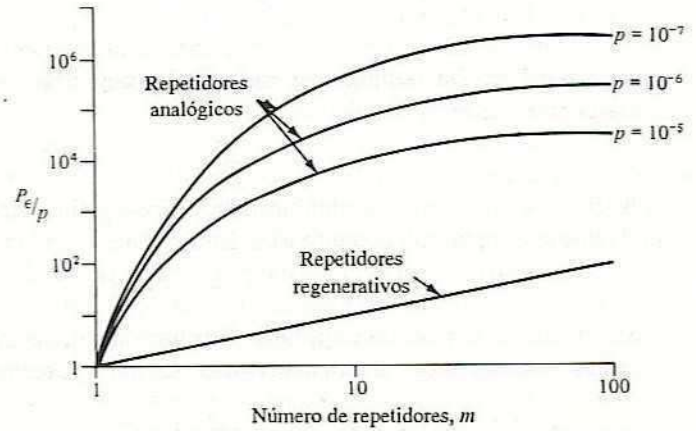


Figura 9.17 Probabilidad neta de error en función del número de repetidores.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

9.9 ★ DENSIDADES ESPECTRALES DE POTENCIA DE LAS SEÑALES DE DATOS

La densidad espectral de potencia de la señal transmitida en un sistema PCM depende del formato de señalización usado. Los principales tipos de formatos de señalización PCM se examinan en el capítulo 7 (véase Fig. 7.33). La elección del formato está condicionada a las características de la transmisión. Como éstas suelen especificarse en términos de la frecuencia, se examinarán las densidades espectrales de los formatos de señalización PCM más utilizados.

Con este propósito, se supone que los ceros y unos son generados con la misma probabilidad por una fuente y luego se codifican en uno de los formatos de señalización PCM mostrados en la figura 7.33. La señal de pulso $f_1(t)$ se usa para señalar un 0 y la señal de pulso $f_2(t)$, un 1. El intervalo de bit es $(0, T_b)$, y en cada caso, la señal de pulso está limitada a un intervalo de tiempo igual a T_b. Se cuenta con los resultados de los ejemplos 8.13.2 a 8.13.4 para determinar las densidades espectrales de potencia con las restricciones establecidas. En todos los casos, las densidades espectrales de potencia se normalizan a una resistencia de un ohm.

9.9.1 No regreso a cero (NRZ)

En el NRZ, el nivel de salida tiene un valor constante específico ($\pm A$) durante el intervalo de bit. Para unos y ceros igualmente probables, el resultado del ejemplo 8.13.2 para la señal transmitida $y(t)$ es

$$S_y(\omega) = A^2 T_b \, \mathrm{Sa}^2(\omega T_b/2) . \tag{9.85}$$

Esto se muestra en la figura 9.18. La función $\mathrm{Sa}^2(x)$ aparece a menudo en los sistemas de datos digitales. En esta densidad espectral de potencia, aproximadamente 77% de la potencia está contenido en las componentes de frecuencia $(-\pi/2, \pi/2)$, 90% en $(-\pi, \pi)$ y 94.8% en $(-2\pi, 2\pi)$.

Los datos aleatorios en NRZ no tienen componentes espectrales discretas. Por tanto, se requiere un reloj externo o un procesamiento no lineal en el receptor para la tasa de adquisición de bits.

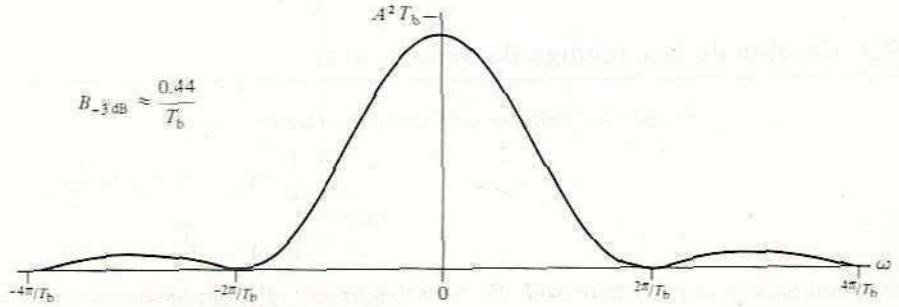


Figura 9.18 Densidad espectral de potencia de datos aleatorios (formato de señalización NRZ).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

9.9.2 Regreso a cero (RZ)

En esta forma de señalización se tiene

$$f_1(t) = 0\,,$$

$$f_2(t) = \begin{cases} A & 0 < t \le \dfrac{T_b}{2} \\ 0 & \dfrac{T_b}{2} < t \le T_b \end{cases}$$

Usando el resultado del ejemplo 8.13.4 para ceros y unos igualmente probables, puede escribirse

$$S_y(\omega) = \frac{A^2 T_b}{16}\,\mathrm{Sa}^2(\omega T_b/4) + \frac{\pi A^2}{8}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}^2(n\pi/2)\,\delta(\omega - 2\pi n/T_b)\,. \qquad (9.86)$$

Esto se muestra en la figura 9.19.

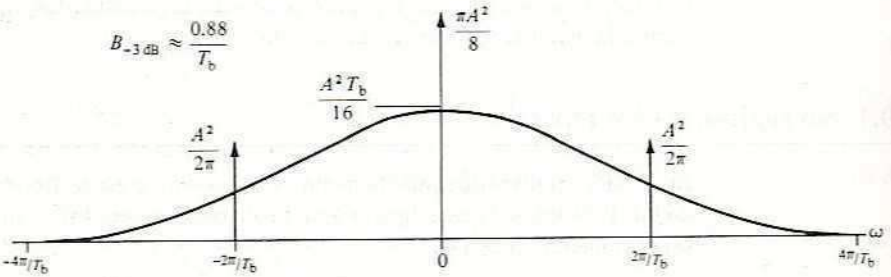


Figura 9.19 Densidad espectral de potencia de datos aleatorios (formato de señalización RZ).

Los primeros cruces por cero de la densidad espectral de potencia del RZ ocurren al doble de frecuencia que los del caso NRZ. Además de la densidad espectral continua, los datos aleatorios en RZ tienen un valor promedio distinto de cero y líneas discretas en múltiplos impares de la tasa de bits. Aunque requiere el doble del ancho de banda del NRZ, la presencia de líneas discretas permite una sincronización simple en el formato de señalización RZ.

9.9.3 División de fase (código de Manchester)

En este formato de señalización se tiene

$$f_1(t) = \begin{cases} -A & 0 < t \le \dfrac{T_b}{2} \\ A & \dfrac{T_b}{2} < t \le T_b \end{cases}$$

$$f_2(t) = -f_1(t)\,.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Usando el resultado del ejemplo 8.13.4 para ceros y unos igualmente probables, puede escribirse

$$S_y(\omega) = A^2 T_b \, \mathrm{Sa}^2(\omega T_b/4) \, \mathrm{sen}^2(\omega T_b/4) . \tag{9.87}$$

Esto se muestra en la figura 9.20.

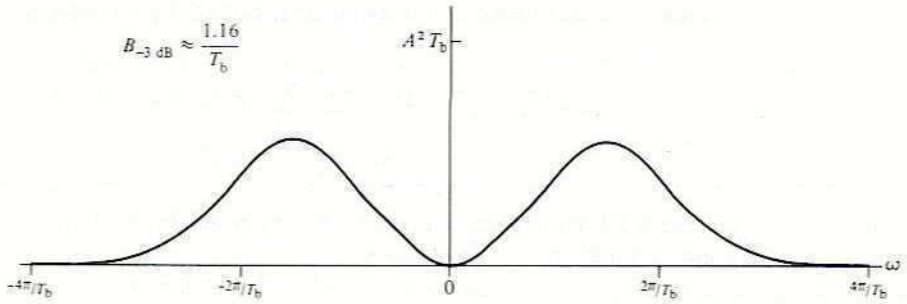


Figura 9.20 Densidad espectral de potencia de datos aleatorios (formato de señalización de fase dividida o código de Manchester).

A diferencia de los RZ y NRZ, la densidad espectral de potencia del formato de señalización de división de fase tiene baja ponderación relativa a bajas frecuencias (y cero en frecuencia cero). La densidad espectral de potencia es máxima a una frecuencia (en Hz) de $0.743/T_b$ y se reduce en 3 dB a una frecuencia de $1.16/T_b$. No hay líneas discretas, y la ocupación de ancho de banda es similar a la del RZ a frecuencias más altas.

9.9.4 Regreso a cero bipolar (BRZ)

El formato de señalización BRZ usa tres niveles de amplitud: A, 0 y $-A$, y en ocasiones se clasifica como una señal seudoternaria. Para inversión alterna de marca, se tiene

$$f_1(t) = 0 ,$$

$$f_2(t) = \begin{cases} A & 0 < t \le \dfrac{T_b}{2} \\ 0 & \dfrac{T_b}{2} < t \le T_b \end{cases} \quad \text{primer 1,}$$

$$\begin{cases} -A & 0 < t \le \dfrac{T_b}{2} \\ 0 & \dfrac{T_b}{2} < t \le T_b \end{cases} \quad \text{siguiente 1,}$$

etcétera.

Este caso se puede modelar como un generador binario aleatorio cuya salida se filtra con un filtro transversal de una etapa para obtener una salida ternaria (véase Ej. 8.13.3).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Por conveniencia, se supone que la salida puede tomar cualquiera de los niveles: $-1, 0, +1$. Suponiendo que $P(0) = \frac{1}{2}$, $P(-1) = P(+1) = \frac{1}{4}$,

$$R_{cc}(0) = \sum_{i=-1}^{1} i^2 P(c_k = i) = \tfrac{1}{2}.$$

La correlación entre símbolos de salida sucesivos para el caso de la inversión alterna de marca se puede evaluar con la ayuda de la tabla 9.1 para obtener

$$\begin{aligned} R_{cc}(1) &= \sum_{i=-1}^{1} \sum_{j=-1}^{1} ijP(c_k = i, c_{k+1} = j) \\ &= -\tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Como el filtro tiene una sola etapa ($N = 1$) (véase Ej. 8.13.3),

$$R_{cc}(k) = 0 \text{ para } k > 1 .$$

Usando el resultado del ejemplo 8.13.3 y designando con $S_x(\omega)$ la densidad espectral de potencia de la entrada del filtro, se tiene

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= S_x(\omega)[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(\omega T_b)] \\ &= S_x(\omega)\,\text{sen}^2(\omega T_b/2) . \end{aligned}$$

Utilizando el resultado del ejemplo 8.13.2 y haciendo una escala de la salida al intervalo $(-A, A)$, se tiene

$$S_y(\omega) = \frac{A^2 T_b}{4}\,\text{Sa}^2(\omega T_b/4)\,\text{sen}^2(\omega T_b/2) . \tag{9.88}$$

Esto se se muestra en la figura 9.21.

No hay líneas discretas en la densidad espectral de potencia del formato de señalización BRZ (o inversión alterna de marca). Ocupa el mismo ancho de banda del NRZ a las frecuencias más altas.

TABLA 9.1 Enumeración de probabilidades conjuntas de símbolos sucesivos para BRZ (inversión alterna de marca)

Salida del generador binario		Salida del filtro transversal		Probabilidad
b_k	b_{k+1}	c_k	c_{k+1}	
0	0	0	0	$\frac{1}{4}$
0	1	0	1	$\frac{1}{4}$
1	0	1	0	$\frac{1}{4}$
1	1	1	−1	$\frac{1}{4}$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

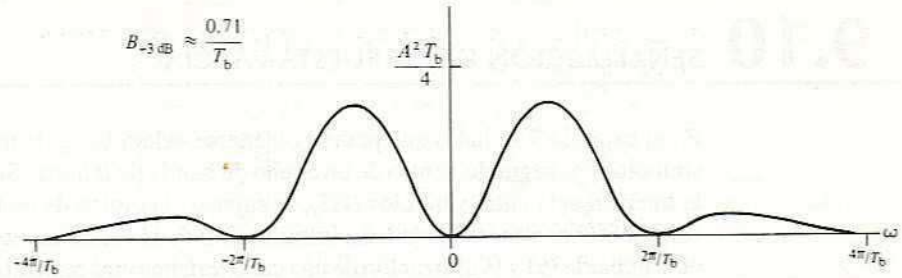


Figura 9.21 Densidad espectral de potencia de datos aleatorios (formato de señalización BRZ o de inversión alterna de marca).

9.9.5 Modulación de retardo (código de Miller)

La deducción de la densidad espectral de potencia del formato de señalización de modulación de retardo rebasa el nivel de este libro.† En la figura 9.22 se muestra una gráfica de la densidad espectral de potencia. La mayor onderación espectral se halla en las componentes de frecuencia mayores que cero pero menores que la mitad de la tasa de símbolos ($1/T_b$). Esto hace atractiva a la modulación de retardo para grabar en cinta magnética y para aplicaciones similares que están muy restringidas en ancho de banda y necesitan relativamente poca potencia a frecuencias muy bajas.

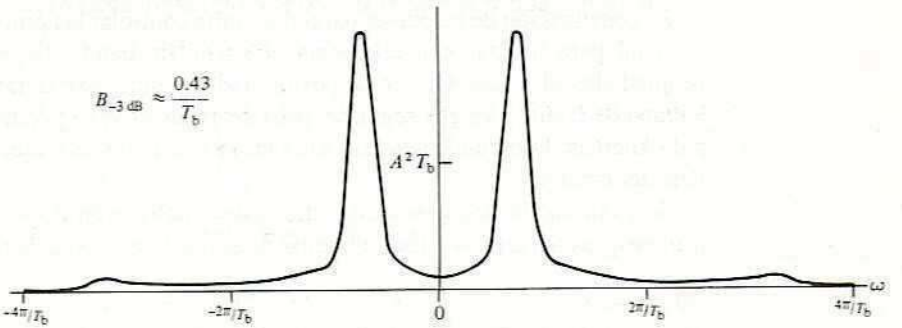


Figura 9.22 Densidad espectral de potencia de datos aleatorios (formato de señalización de modulación de retardo o código de Miller).

EJERCICIO 9.9.1

Determine la densidad espectral de potencia del formato de señalización RB (véase Fig. 7.33) en el que los niveles de la señal son $-A$, 0, A y los ceros y unos son equiprobables.

RESPUESTA: $S_y(\omega) = (A^2 T_b/4)\,\mathrm{Sa}^2\,(\omega T_b/4)$.

---

† Se dan algunos resultados en W. C. Lindsay y M. K. Simon, *Telecommunication Systems Engineering*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, Inc., 1973, Cap. 1.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

9.10 SEÑALIZACIÓN DE RESPUESTA PARCIAL

En el capítulo 7 se halló que podían obtenerse velocidades de transmisión de hasta $2B$ símbolos por segundo dentro de un ancho de banda de B hertz. Sin embargo, para evitar la interferencia entre símbolos (ISI), se supuso el empleo de un filtro pasabajas ideal a fin de obtener esta velocidad. La introducción de la forma espectral de coseno elevado para evitar la ISI y la utilización de una característica más realizable del filtro produjeron tasas de transmisión que disminuyeron de $2B$ a B símbolos por segundo.

Una alternativa es utilizar ex profeso cantidades controladas de ISI combinando varios pulsos binarios sucesivos antes de transmitir. Como éstos están combinados en una forma conocida, el receptor puede aislar de nuevo la corriente de datos correcta. Este método se llama *señalización de respuesta parcial* o bien *codificación correlativa*. Básicamente, un sistema de respuesta parcial genera una señal de nivel ℓ a partir de una corriente de datos binarios de entrada x_k utilizando una superposición lineal ponderada de los x_k. En la figura 9.23 se muestra un filtro transversal para conseguir esto. La memoria de superposición se extiende sobre $(N + 1)$ periodos de bit y está determinada por el número N de elementos de retardo (registros de desplazamiento) utilizados. La velocidad de la corriente de datos de entrada es T^{-1}. Un filtro pasabajas (LPF) restringe el ancho de banda de la señal resultante a la frecuencia de Nyquist $(2T)^{-1}$ y el nivel ℓ de salida se designa como y_k.

La señalización de respuesta parcial permite controlar las propiedades espectrales de la señal para utilizar con eficiencia el ancho de banda disponible y adaptar estas propiedades al canal. Ofrece la posibilidad de aumentar la tasa de transmisión por encima de B símbolos por segundo, pero demanda algo de potencia transmitida adicional. Además, la redundancia conocida en la señal que se recibe puede utilizarse para detectar errores.

Se examinarán dos casos específicos de señalización de respuesta parcial.† En el primero, se añaden dos pulsos binarios de entrada sucesivos de modo que

$$y_k = x_k + x_{k-1}. \tag{9.89}$$

Esto se llama señalización *duobinaria*. En la figura 9.24(a) se muestra un filtro transversal $(N = 1)$ para efectuar esta operación. La función de transferencia en frecuencia resultante es

$$H(\omega) = (1 + e^{-j\omega T})_{\text{LP}} \tag{9.90}$$

$$H(\omega) = \begin{cases} 2e^{-j\omega T/2} \cos \dfrac{\omega T}{2} & |\omega| \leq \dfrac{\pi}{T} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}. \tag{9.91}$$

† Para mayor información, véase A. Lender, "Correlative Level Coding for Binary Data Transmission", *IEEE Spectrum*, vol. 3, núm. 2, febrero de 1966, págs. 104-115; E.R. Kretzmer, "Generalization of a Technique for Binary Data Communication", *IEEE Transactions in Communication Technology*, COM-14, febrero de 1966, págs. 67-68; S. Pasupathy, "Correlative Coding: A Bandwith-Efficient Signaling Scheme", *IEEE Communications Society Magazine*, vol. 15, núm. 4, julio de 1977, págs. 4-11.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

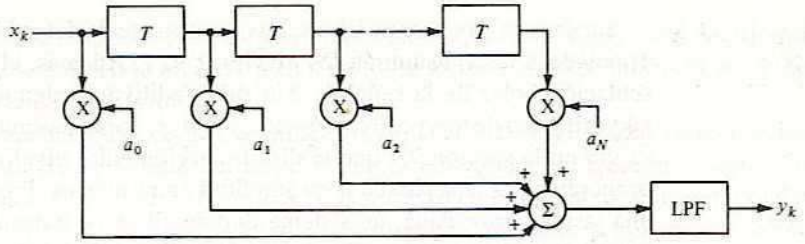


Figura 9.23 Filtro transversal para generar señalización de respuesta parcial.

La correspondiente respuesta al impulso es

$$h(t) = \frac{4\cos[\pi(t - T/2)/T]}{\pi T[1 - 4(t - T/2)^2/T^2]} \tag{9.92}$$

y se muestra en la figura 9.24(c). De este resultado se concluye que la señalización duobinaria introduce ISI, pero controlada de modo tal que la interferencia viene sólo del símbolo inmediato superior. Nótese que la operación de agregar dos símbolos sucesivos ha proporcionado una forma espectral efectiva para la señal transmitida. Aquí el ancho de banda total necesario, incluido el de la forma espectral, es $B = 1/(2T)$. Al contrario de la forma de pulso de Nyquist del capítulo 7, en la que es necesario un ancho de banda adicional (hasta de $B = 1/T$) para la forma espectral.

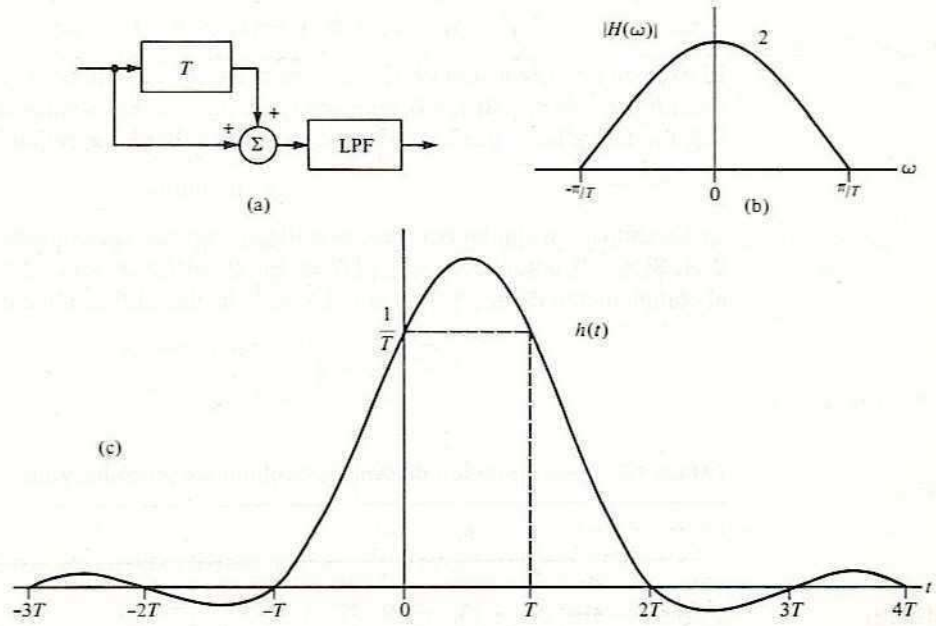


Figura 9.24 Señalización duobinaria: (a) disposición del filtro transversal; (b) magnitud de la función de transferencia en frecuencia; (c) respuesta a un impulso unitario.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Supóngase, por conveniencia, que la corriente de datos binarios x_k usa los niveles 0, 1; entonces las y_k asumirán los niveles 0, 1, 2. Además, el transmisor usa una representación polar de la señal y_k. Sin ruido aditivo ni atenuación, la señal recibida Y_k adquirirá uno de tres posibles niveles, $-A$, 0, A. Para una cantidad dada de ruido aditivo, se vio en la sección 9.5 que la discriminación entre niveles lógicos en el receptor es proporcional a la separación en amplitud entre niveles. Por tanto, se deduce que para una tasa de error dada, un sistema duobinario debe transmitir más potencia que uno binario para la misma cantidad de ruido aditivo. Sin embargo, el sistema duobinario permite el uso de una velocidad de transmisión más alta y también proporciona la ponderación espectral apropiada para conseguirla.

El papel del receptor es resolver la ecuación [véase Ec. (9.89)]

$$\tilde{x}_k = y_k - \tilde{x}_{k-1}, \tag{9.93}$$

donde $\tilde{x}_k$ es la corriente de datos binarios decodificada. Como $\tilde{x}_k$ se decodifica de acuerdo con el valor decodificado de $\tilde{x}_{k-1}$, los errores de decodificación tienden a propagarse en el sistema duobinario descrito. Un método propuesto por A. Lender elimina esta tendencia precodificando la corriente de datos binarios de entrada antes de la transmisión. En este procedimiento para sistemas duobinarios, la corriente de datos binarios de entrada x_k se convierte en otra corriente binaria b_k de acuerdo con la regla

$$b_k = x_k \oplus b_{k-1} \tag{9.94}$$

donde, como antes, el símbolo $\oplus$ representa una suma módulo -2 (OR EXCLUSIVO).

La corriente binaria b_k se aplica a la entrada de la operación de filtrado duobinario descrita por la ecuación (9.89), y da

$$y_k = b_k + b_{k-1} = (x_k \oplus b_{k-1}) + b_{k-1}. \tag{9.95}$$

El examen de la ecuación (9.95) muestra que si $x_k = 1$, entonces, $y_k = 1$ *sin importar* el valor binario de b_{k-1}. Si $x_k = 0$, tenemos $y_k = 0$ o $y_k = 2$. Estos valores se listan en la Tabla 9.2. Por tanto, las y_k pueden decodificarse para hallar las x_k según la regla

$$\tilde{x}_k = y_k \text{ módulo-2}. \tag{9.96}$$

Una situación similar ocurre si se utiliza la representación polar de la señal $Y_k = -A$, 0, A. Si $x_k = 0$, entonces $b_k = b_{k-1}$ [véase Ec. (9.94)], y Y_k será $-A$ o A. Si $x_k = 1$, b_k será el complemento de b_{k-1}, y Y_k será 0. La regla de decodificación correspondiente es

$$\tilde{x}_k = \begin{cases} 0 & \text{si } Y_k = \pm A \\ 1 & \text{si } Y_k = 0 \end{cases} \tag{9.97}$$

TABLA 9.2 Decodificación de señales duobinarias precodificadas.

x_k	b_{k-1}	y_k	Y_k
1	0	1	0
1	1	1	0
0	0	0	$-A$
0	1	2	A

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En cualquier caso, la precodificación permite al receptor tomar cada decisión binaria basándose sólo en la muestra recién recibida y, por tanto, se elimina la posibilidad de la propagación de errores.

En muchos sistemas de transmisión (p. ej., los sistemas telefónicos comerciales), la respuesta en frecuencia del canal no se extiende hasta la frecuencia cero. En tales sistemas es conveniente modificar la señalización duobinaria para obtener ponderación espectral cero a frecuencia cero y conservar la deseable propiedad de permitir la señalización hasta la velocidad de Nyquist. En un método llamado señalización *duobinaria modificada*, se sustraen pulsos binarios separados por dos periodos de muestra, obteniéndose [véase Fig. 9.25(a)]

$$y_k = x_k - x_{k-2}. \tag{9.98}$$

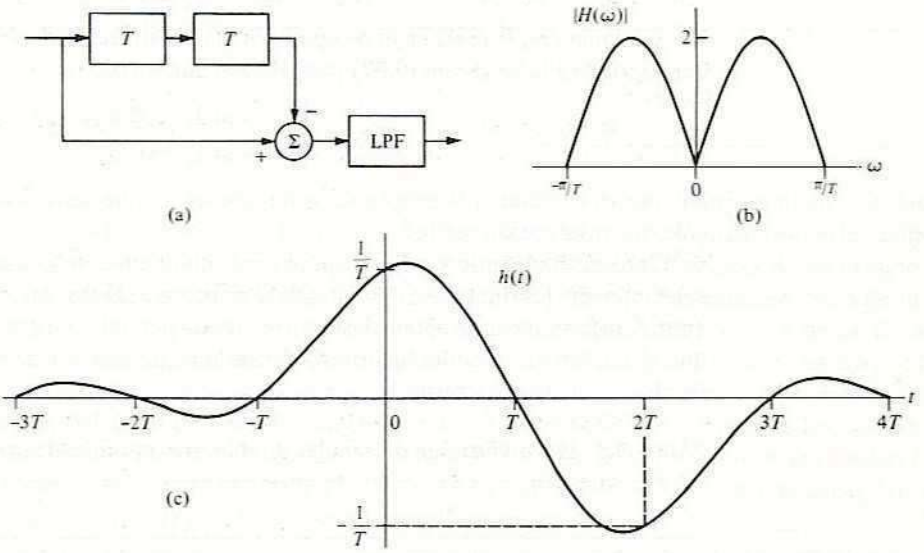


Figura 9.25 Señalización duobinaria modificada: (a) disposición del filtro transversal; (b) magnitud de la función de transferencia; (c) respuesta a un impulso unitario.

La función de transferencia resultante es

$$H(\omega) = (1 - e^{-j2\omega T})_{\text{LP}} \tag{9.99}$$

$$H(\omega) = \begin{cases} 2je^{-j\omega T} \operatorname{sen} \omega T & |\omega| \le \dfrac{\pi}{T} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}. \tag{9.100}$$

La correspondiente respuesta al impulso es

$$h(t) = (1/T)\{\text{Sa}(\pi t/T) - \text{Sa}\,[\pi(t - 2T)/T]\} \tag{9.101}$$

y se muestra en la figura 9.25(c). De este resultado, se concluye que la señalización duobinaria modificada introduce ISI controlada por medio de un solo símbolo suprimido

http://libreria-universitaria.blogspot.com

por dos periodos de muestra. Nótese que la transición un poco brusca de $h(t)$ en $t = T$ hace que este método de señalización sea más sensible a pequeños errores de tiempo.

De nuevo, la propagación de errores se vuelve un problema a menos que se utilice la precodificación, la cual, en el caso duobinario modificado, es

$$b_k = x_k \oplus b_{k-2}. \tag{9.102}$$

La corriente binaria b_k se aplica a la operación duobinaria modificada descrita por la ecuación (9.98), para obtener

$$y_k = b_k - b_{k-2} = (x_k \oplus b_{k-2}) - b_{k-2}. \tag{9.103}$$

Las posibilidades de utilizar la ecuación (9.103) se muestran en la tabla 9.3. En ésta se ve que y_k se puede decodificar para encontrar x_k si seguimos la regla

$$\tilde{x}_k = |y_k| = y_k \bmod 2. \tag{9.104}$$

De igual manera, la regla en el receptor para la señalización duobinaria modificada que corresponde a la ecuación (9.97) para el caso duobinario es

$$\tilde{x}_k = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_k = \pm A \\ 0 & \text{si } Y_k = 0 \end{cases}. \tag{9.105}$$

De nuevo, se elimina la propagación de errores porque cada decisión binaria depende sólo del valor recién recibido.

Tanto el duobinario como el duobinario modificado son casos de una más amplia selección de los métodos de señalización parcial. Estos métodos y algunos otros, considerados a menudo como clases de respuesta parcial, se listan en la tabla 9.4. Nótese que el duobinario y el duobinario modificado se denominan señalización de clase 1 y de clase 4, respectivamente.

TABLA 9.3 Decodificación de señales duobinarias modificadas precodificadas.

x_k	b_{k-2}	y_k	Y_k
1	0	1	A
1	1	−1	$-A$
0	0	0	0
0	1	0	0

TABLA 9.4 Clases de señalización de respuesta parcial

Clase	Ecuación generadora	Magnitud de la función de transferencia en frecuencia, $\lvert H(\omega)\rvert$
1	$y_k = x_k + x_{k-1}$	$2\cos \omega T/2$
2	$y_k = x_k + 2x_{k-1} + x_{k-2}$	$4\cos^2 \omega T/2$
3	$y_k = 2x_k + x_{k-1} - x_{k-2}$	$[(2 + \cos \omega T - \cos 2\omega T)^2 + (\operatorname{sen} \omega T - \operatorname{sen} 2\omega T)^2]^{1/2}$
4	$y_k = x_k - x_{k-2}$	$2 \operatorname{sen} \omega T$
5	$y_k = x_k - 2x_{k-2} + x_{k-4}$	$4\operatorname{sen}^2 \omega T$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJERCICIO 9.10.1

Determine la corriente de datos transmitida correspondiente a la secuencia de entrada $x_k = 0\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,0$, utilizando (a) señalización duobinaria precodificada y (b) señalización duobinaria modificada precodificada. Suponga que el precodificador b_k se encuentra inicialmente con unos y que los niveles del transmisor se designan como +, 0, –. Verifique también que la regla de decodificación del receptor proporcione las x_k.

RESPUESTA: (a) + 0 0 0 – – – 0 + 0 0 + +; (b) 0 – – + 0 0 0 – 0 + + 0 0.

EJERCICIO 9.10.2

Demuestre que la suma de los coeficientes de ponderación del filtro transversal de la figura 9.23 deben ser cero para que el espectro sea cero a frecuencia cero.

9.11 IGUALACIÓN

En las secciones anteriores se describieron los pasos para el mejoramiento de las ponderaciones espectrales de un canal de transmisión a fin de minimizar la interferencia entre símbolos (ISI). Sin embargo, en muchos sistemas las desviaciones de las características ideales no se conocen o pueden variar. Por ejemplo, las características de un canal telefónico pueden variar en función de determinada conexión y de la línea utilizada, además de las posibles variaciones con el tiempo. En tales sistemas es conveniente incluir un filtro que pueda ajustarse para compensar las características no ideales del canal de transmisión. Debido a que su propósito es compensar las características imperfectas de un canal de transmisión, estos filtros se llaman *igualadores*. Aunque los igualadores pueden incluirse en el transmisor, el receptor o el canal, para los efectos de este estudio se incluyen en el receptor.

Es difícil construir igualadores que compensen exactamente todas las imperfecciones del canal. Se han propuesto varios criterios para el diseño de igualadores. Se examinarán varios tipos que pretenden minimizar la ISI. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que el ruido aditivo es también un problema. Como el costo es proporcional al número de parámetros ajustables del igualador, el número de éstos debe dividirse cuidadosamente entre el filtrado acoplado (para minimizar los efectos del ruido aditivo) y la igualación (para minimizar la ISI). Por ejemplo, en un medio altamente ruidoso con poca ISI, podría ser mejor concentrarse en el filtrado acoplado. Por otra parte, en un medio poco ruidoso, como un canal telefónico, lo más importante es la minimización de la ISI.

Debido a su versatilidad y construcción relativamente simple, el filtro transversal es un diseño común de igualador. Además, el diseño de filtro transversal se presta a la compensación de canales en los que la dispersión en el tiempo de las señales de pulso ocurre sólo en un pequeño número de intervalos de símbolos. Como esto es típico de muchos canales de transmisión de datos (incluyendo el telefónico), el igualador en forma de filtro transversal es el único que se examina aquí. El igualador transversal consta de una línea de retardo con derivaciones, como se muestra en la figura 9.26. La línea

http://libreria-universitaria.blogspot.com

de retardo se deriva en intervalos de T segundos, con T como el intervalo de símbolos de la corriente de pulsos de entrada.† La salida de cada derivación está ponderada por un factor de ganancia variable a_n, y las salidas ponderadas se suman y muestrean para formar la salida. Por conveniencia, se supone que hay $(2N + 1)$ derivaciones con las ponderaciones correspondientes $a_{-N}, \ldots, a_0, \ldots, a_N$, como se indica en la figura 9.26.

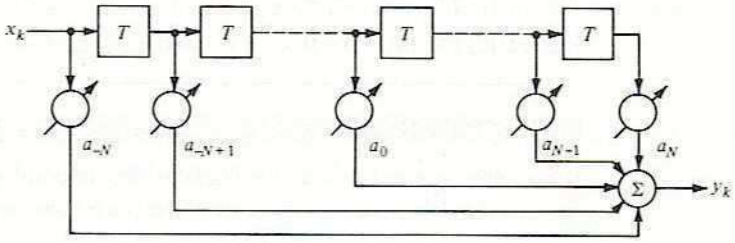


Figura 9.26 Diagrama de bloques de un igualador transversal.

El problema de minimizar la ISI se simplifica considerando sólo las señales en los tiempos de muestra correctos. Por tanto, la entrada al igualador transversal se representa como $x(kT) = x_k$ y la salida correspondiente con $y(kT) = y_k$. Para cero ISI, se requiere que

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{para } k = 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \tag{9.106}$$

La salida y_k puede expresarse en términos de la entrada x_k y la ponderación de las derivaciones a_n como

$$y_k = \sum_{n=-N}^{N} a_n x_{k-n}. \tag{9.107}$$

La ecuación (9.107) da $2N + 1$ ecuaciones independientes en términos de las a_n. Esto impone un límite de $2N + 1$ restricciones, por lo que la ecuación (9.106) debe modificarse así:

$$y_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N \end{cases} \tag{9.108}$$

Por tanto, el igualador transversal puede forzar a que la salida llegue a cero en N puntos de muestra en cualquier lado del pico de salida deseado (que por conveniencia se ha normalizado a la unidad). Por esta razón se le llama igualador *forzado a cero*. No hay garantía de que la salida sea cero en intervalos de T segundos más allá de $\pm N$, donde $2N + 1$ es el número de derivaciones usadas. Sin embargo, puede demostrarse que este igualador es óptimo en el sentido de que minimiza el pico de la ISI.‡

† El filtro transversal también se puede usar para el filtrado acoplado, espaciando las derivaciones sobre la línea de retardo en los intervalos de Nyquist más que en intervalos de símbolos.

‡ R. W. Lucky, J. Salz y E. J. Weldon, Jr., *Principles of Data Communication*, Nueva York, McGraw-Hill, 1968, Cap. 6.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Pueden combinarse las ecuaciones (9.107) y (9.108) para plantear las $2N + 1$ ecuaciones que pueden resolverse para la ponderación de las derivaciones a_n:

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_{-1} & \cdots & x_{-N} & \cdots & x_{-2N-1} & x_{-2N} \\ x_1 & x_0 & \cdots & x_{-N+1} & \cdots & x_{-2N} & x_{-2N+1} \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ x_N & x_{N-1} & \cdots & x_0 & \cdots & x_{-N-1} & x_{-N} \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ x_{2N-1} & x_{2N-2} & \cdots & x_{N-1} & \cdots & x_{-2} & x_{-1} \\ x_{2N} & x_{2N-1} & \cdots & x_N & \cdots & x_{-1} & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{-N} \\ a_{-N+1} \\ \vdots \\ a_0 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.109}$$

En el siguiente ejemplo se ilustra el cálculo de las ponderaciones de las derivadas requeridas, usando la ecuación (9.109).

EJEMPLO 9.11.1

Determine las ponderaciones de las derivaciones de un igualador forzado a cero de tres derivaciones para la entrada que se muestra en la figura 9.27(a), donde $x_{-2} = 0.0$, $x_{-1} = 0.2$, $x_0 = 1.0$, $x_1 = -0.3$, $x_2 = 0.1$, $x_k = 0$ para $|k| > 2$.

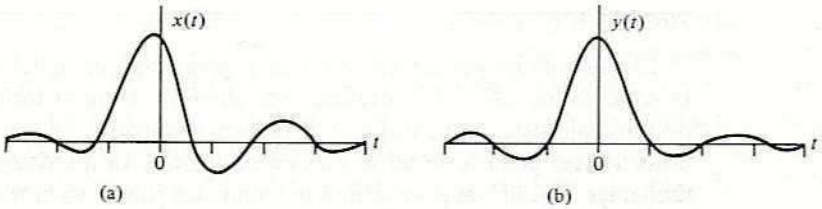


Figura 9.27 (a) Señal de pulso de entrada y (b) señal de pulso de salida (igualada) del igualador transversal forzado a cero de tres derivaciones, del ejemplo 9.11.1.

Solución Escribiendo las $2N + 1 = 3$ ecuaciones, las tres ponderaciones de las derivaciones a_{-1}, a_0, a_1 son soluciones del siguiente conjunto de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} a_{-1} + 0.2a_0 &= 0 \\ -0.3a_{-1} + a_0 + 0.2a_1 &= 1 \\ 0.1a_{-1} - 0.3a_0 + a_1 &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo, se obtienen las ponderaciones requeridas

$$\begin{aligned} a_{-1} &= -0.1779 \qquad a_1 = 0.2847 \\ a_0 &= 0.8897. \end{aligned}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Usando este igualador de tres derivaciones, se calculan los valores del pulso igualado de la ecuación (9.107) para hallar

$$\begin{aligned} y_{-3} &= 0.0 & y_1 &= 0.0 \\ y_{-2} &= -0.0356 & y_2 &= 0.0036 \\ y_{-1} &= 0.0 & y_3 &= 0.0285 \\ y_0 &= 1.0 & y_4 &= 0.0. \end{aligned}$$

La señal de pulso igualada resultante se muestra en la figura 9.27(b). Nótese que este pulso tiene los ceros deseados en cada lado del pico, pero que se ha introducido alguna ISI en puntos de muestra más retirados del pico. Excepto en casos especiales, el igualador de N finito forzado a cero no puede eliminar completamente la ISI. A medida que el número de filtros derivados se hace mayor, la ISI puede hacerse pequeña si los efectos de la dispersión de pulsos provocados por el canal no se extienden sobre demasiados intervalos de símbolos.

EJERCICIO 9.11.1

Sean $x_0 = 1$, $x_k = 0$ para $|k| > 1$ los valores muestreados de entrada de un pulso dado. Para este caso, obtenga una aproximación conveniente de las ponderaciones de las derivaciones de un igualador transversal forzado a cero de tres derivaciones si $|x_{-1}x_1| \ll 1$.

RESPUESTA: $a_n \approx (-1)^n x_n$ para $n = -1, 0, 1$.

El ajuste de las ponderaciones de las derivaciones del igualador transversal implica la solución de $2N + 1$ ecuaciones simultáneas. Usando técnicas iterativas, se han desarrollado sistemas para ajustar de manera automática las ponderaciones. En general, estos ajustes pueden dividirse en dos categorías. El *igualador prefijado* utiliza una secuencia especial de pulsos antes o durante las pausas en la transmisión de datos para determinar y ajustar las ponderaciones de las derivaciones. Por el contrario, las ponderaciones en el *igualador adaptable* se ajustan durante la transmisión de datos utilizando la propia señal de datos. Los sistemas híbridos utilizan ambos métodos.

Se estudian dos métodos de ajuste de igualadores. El primero se adapta mejor a igualadores prefijados, mientras que el segundo es aplicable tanto al prefijado como al adaptable. En el primer método de ajuste, el igualador prefijado usa pulsos de prueba muy separados para ajustar las ponderaciones de las derivaciones antes de la transmisión de datos. En la figura 9.28 se muestra un diagrama de bloques simplificado de un igualador prefijado de tres derivaciones. Tras la recepción de un pulso de muestra, se toma una decisión binaria en el separador de niveles en cada tiempo de muestra, y esos bits de decisión se cargan uno por uno en un registro de desplazamiento. El umbral en el separador de niveles es cero en todos los valores muestreados, excepto que el pico es detectado por un detector de picos y comparado con +1 (o con cualquier nivel de referencia que se desee). Al final de cada pulso de prueba, el contenido binario del registro de desplazamiento se usa como señal de corrección de las respectivas ponde-

http://libreria-universitaria.blogspot.com

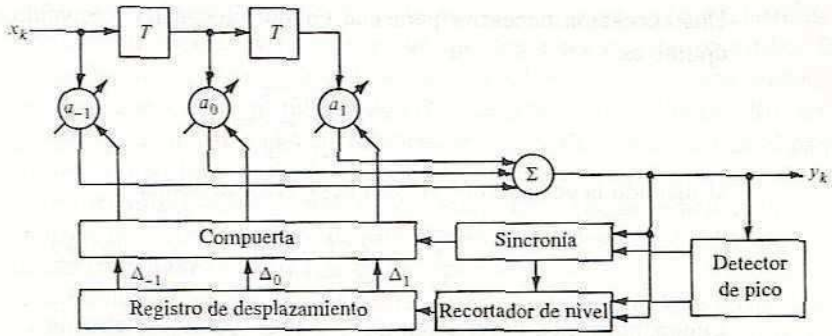


Figura 9.28 Ejemplo de un igualador transversal prefijado de tres derivaciones.

raciones en el filtro transversal. Como cada señal de error no es más que un valor binario (es decir, ±1), cada ponderación de derivaciones se ajusta en un incremento fijo, ±Δ, en cada iteración. En teoría, este algoritmo iterativo "de ensayo" continúa hasta que todas *las ponderaciones converjan hacia sus valores óptimos.*

En el procedimiento de ajuste de incremento fijo, la precisión con la que se ajustan las ponderaciones es proporcional a Δ. Por otra parte, el tiempo de ajuste del igualador es inversamente proporcional a Δ, por lo que la magnitud del incremento debe elegirse juiciosamente. Los efectos del ruido aditivo pueden reducirse promediando las señales de error generadas sobre varios pulsos de prueba, aunque esto aumenta el tiempo de ajuste necesario para la convergencia dentro de ciertos límites de precisión. Los refinamientos para reducir el tiempo de ajuste requerido incluyen el uso de incrementos variables en el ajuste de las ponderaciones y el uso de una secuencia de pulsos de ruido seudoaleatorio (PN, *pseudorandom noise*) en vez de pulsos muy separados en la etapa de ensayo. Una desventaja del igualador prefijado es que una vez completado el periodo de ensayo, la estabilidad de las ponderaciones debe ser tal que puedan mantenerse dentro de los límites de precisión del sistema hasta que ocurra el siguiente periodo de ensayo.

El segundo método de ajuste de las ponderaciones de derivaciones en un igualador transversal es minimizar el error cuadrático medio entre la secuencia de salida y una secuencia conocida (o deseada). Recuérdese que en el igualador forzado a cero, las *ponderaciones de las derivaciones se ajustan para dar N ceros a cada lado del pico de la* salida igualada. Por el contrario, este segundo método busca minimizar el error cuadrático medio en todas las derivaciones. En la práctica, los resultados de ambos métodos son muy similares cuando la distorsión del canal es relativamente pequeña. Sin embargo, dichos resultados proporcionan algoritmos diferentes para la conformación de igualadores automáticos.

Para investigar un criterio de la minimización cuadrática media, sea $c_k = c(kT)$ una secuencia de pulsos dada y $y_k = y(kT)$ la salida de un filtro transversal. Definiendo un error $e(kT)$ como la diferencia entre estos dos, se tiene

$$e(kT) = y(kT) - c(kT). \tag{9.110}$$

El error cuadrático medio para K muestras es

$$\overline{e^2} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}[y(kT) - c(kT)]^2. \tag{9.111}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Una condición necesaria para una ponderación dada a_n cuando se lleva a su ajuste óptimo es

$$\frac{\partial \overline{e^2}}{\partial a_n} = 0 . \tag{9.112}$$

Utilizando la ecuación (9.111) en la (9.112), se obtiene

$$\frac{\partial \overline{e^2}}{\partial a_n} = \frac{2}{K} \sum_{k=1}^{K} [y(kT) - c(kT)] \frac{\partial y(kT)}{\partial a_n} . \tag{9.113}$$

Luego, utilizando la ecuación (9.107) en la (9.113), se obtiene

$$\frac{\partial \overline{e^2}}{\partial a_n} = \frac{2}{K} \sum_{k=1}^{K} [y(kT) - c(kT)] x(kT - nT) . \tag{9.114}$$

La ecuación (9.114) se reescribe como

$$\frac{\partial \overline{e^2}}{\partial a_n} = 2R_{ex}(nT) , \tag{9.115}$$

donde R_{ex} es la correlación cruzada determinada de la secuencia de errores de salida $e(kT)$ y de la secuencia de entrada $x(kT)$. Combinando las ecuaciones (9.112) y (9.115), se tiene

$$R_{ex}(nT) = 0 \quad \text{for } n = 0, \pm 1, \cdots, \pm N . \tag{9.116}$$

Por tanto, las ponderaciones de derivaciones son óptimas, en el sentido del mínimo error cuadrático medio, cuando la correlación cruzada entre la secuencia de errores de salida $e(kT)$ y la secuencia de entrada $x(kT)$ es cero para todos los múltiplos enteros del incremento T del retardo de la derivación.

Ahora, sea la secuencia de entrada $x(kT)$ igual a la secuencia $c(kT)$; entonces, la ecuación (9.114) se convierte en

$$\frac{\partial \overline{e^2}}{\partial a_n} = \frac{2}{K} \sum_{k=1}^{K} [y(kT) - c(kT)] c(kT - nT) \tag{9.117}$$

$$= 2R_{yc}(nT) - 2R_c(nT) . \tag{9.118}$$

El procedimiento es que la n-ésima ponderación, a_n se ajuste de manera que $\partial \overline{e^2}/\partial a_n$ tienda a cero. Notando que $R_c(0) = \overline{c^2}$ se forma un estimador de la n-ésima ponderación como sigue:[†]

$$\hat{\epsilon}_n = \frac{1}{K\overline{c^2}} \sum_{k=1}^{K} [y(kT) - c(kT)] c(kT - nT) . \tag{9.119}$$

Como $y(kT)$ depende de a_n, este ajuste es un procedimiento iterativo. Además, deben comprobarse las entradas aleatorias al estimador. Puede demostrarse que este estimador no está polarizado en el error de ponderación de la derivación si[‡]

$$R_c(nT) = 0 \text{ para } n \neq 0 . \tag{9.120}$$

[†] Ibid.
[‡] Ibid.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Las ecuaciones (9.119) y (9.120) sugieren que un medio eficiente de ajustar un igualador prefijado es el criterio del mínimo error cuadrático medio. En lugar de transmitir una secuencia de pulsos muy espaciados, se envía una secuencia de ruido seudoaleatorio (PN) que se encarga de satisfacer la ecuación (9.120). En el receptor puede usarse un generador de palabras de código de máxima longitud para generar la secuencia PN. Entonces, la ecuación (9.119) puede usarse para generar una señal de error para cada ponderación de derivaciones. El uso de la secuencia PN en esta forma, en lugar de recurrir a pulsos de prueba muy separados, reduce el tiempo de ajuste del igualador para una precisión dada de la ponderación.

En contraste con los igualadores prefijados, en los igualadores adaptables las señales de error se estiman en forma continua durante la transmisión de datos. Por tanto, los igualadores adaptables pueden ajustarse a cambios lentos durante la transmisión de datos y no requieren de largos periodos de ensayo.

En presencia de transmisión de datos, la secuencia de bits aleatorios necesaria para ajustar las ponderaciones en un igualador adaptable pueden derivarse de las decisiones binarias que toma el receptor sobre la secuencia de datos. Este procedimiento de aprendizaje se llama *dirigido por decisiones* debido a que el receptor aprende utilizando sus propias decisiones. En la figura 9.29 aparece un igualador adaptable de tres derivaciones que utiliza este método. Los igualadores adaptables dirigidos por decisiones no establecen con facilidad la igualación inicial. No obstante, una vez obtenida ésta, las estimaciones de error son precisas y el ciclo de igualación sigue los cambios de las características del canal a menos que sean más rápidos que las constantes de tiempo del igualador.

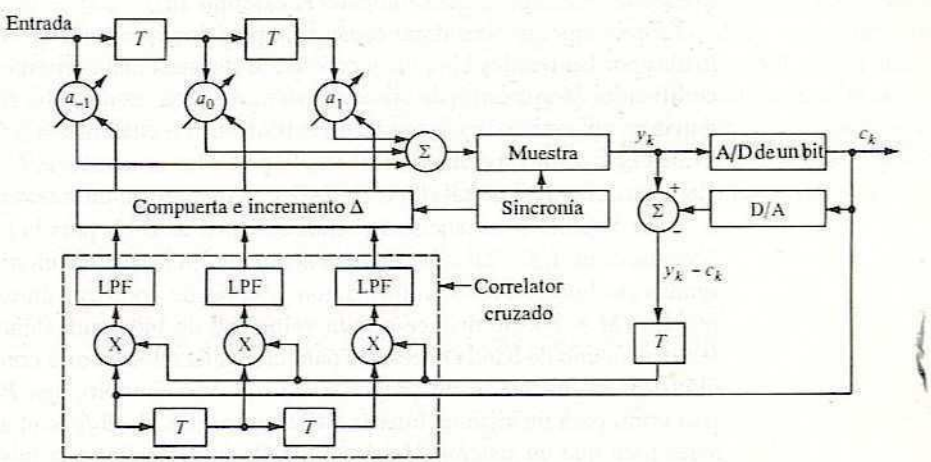


Figura 9.29 Ejemplo de igualador transversal adaptable de tres derivaciones.

Para obtener el mejor comportamiento global puede usarse un sistema híbrido: una combinación de igualadores prefijados y adaptables. En tal sistema, se envía una secuencia de PN (también generada en el receptor) para permitir que el sistema adquiera los valores iniciales de igualación correctos en un modo de operación prefijado. Cuando la igualación inicial es razonablemente buena, el sistema cambia al modo adaptable y

http://libreria-universitaria.blogspot.com

comienza la transmisión de datos. El sistema puede proveer también un modo de reposición en el que la transmisión de datos cesa temporalmente para permitir el envío de una secuencia de PN a fin de verificar la corrección de los ajustes del igualador.

Los igualadores basados en los principios anteriores responden bien minimizando la ISI en canales en que el ruido aditivo no es de gran importancia. Son partes esenciales de modernos modems de alta velocidad para la transmisión de datos digitales usando canales telefónicos.

9.12 SEÑALIZACIÓN *M*-ARIA

En los sistemas de comunicaciones PCM que se han visto hasta aquí, durante cada intervalo de T segundos se transmite sólo una de dos señales posibles. A la señal que podría enviarse en un intervalo de T segundos se le llama *símbolo*. En un sistema de transmisión binario sólo se usan dos símbolos (p. ej., ±A) La tasa de símbolos (*baud*) es de $(1/T)$ símbolos por segundo. Por ejemplo, en un sistema de 300 baud, los símbolos se envían a razón de 300 por segundo.

En la señalización M-aria, durante cada intervalo de T segundos se transmite uno de M símbolos posibles. En sistemas de transmisión en banda base, cada símbolo corresponde a uno de M niveles distintos. Sin embargo, las transmisiones M-arias no se restringen a variaciones amplitud-nivel. Se podría, por ejemplo, variar la amplitud, la frecuencia y la fase de la señal senoidal para formar los diversos símbolos. El tema de la modulación digital se examina en el capítulo 10.

Es conveniente considerar todas las operaciones de muestreo y multiplexión efectuadas por las señales binarias y considerar después una corriente de bits aplicada a un codificador M-ario antes de la transmisión. Además, éste resulta ser el caso usual en sistemas en operación. Por ejemplo, en la transmisión cuaternaria ($M = 4$) se podrían asignar los agrupamientos binarios 00, 01, 10 y 11 a los niveles A, B, C y D, respectivamente. Cada posible nivel de salida A, B, C, D se transmite en un intervalo de T segundos.

Si se dispone de un ancho de banda de canal de B Hz para la transmisión, la tasa de Nyquist es de $1/T = 2B$ símbolos por segundo. En la señalización M-aria, cada símbolo representa $\log_2 M$ bits de información y se puede codificar únicamente en $\ell = \log_2 M$ niveles ($M = 2^{\ell}$). Se deduce que la velocidad de bits equivalente es de $2B\ell$ bps. Por tanto, el ancho de banda necesario para la señalización M-aria con una tasa de información fija es inversamente proporcional a ℓ. Por ejemplo, sea B_2 el ancho de banda requerido para un sistema binario PCM; entonces, $B = B_2/\ell$ es el ancho de banda necesario para que un sistema M-ario transmita información a la misma velocidad que el binario.

Como el ancho de banda necesario para transmitir es proporcional a $1/T$ (baud), pero la información transmitida es proporcional a la tasa de bits $(\log_2 M)/T$, se ve que los sistemas M-arios proporcionan un medio de aumentar la tasa de transmisión de información dentro de un ancho de banda dado. Sin embargo, este aumento se obtiene a expensas de potencia agregada al transmisor y de una mayor complejidad del sistema. Además, la interferencia entre símbolos es también un problema en los sistemas M-arios de señalización, y los anchos de banda necesarios para su operación son mayores que

http://libreria-universitaria.blogspot.com

los mínimos teóricos analizados con anterioridad. Sin embargo, es difícil obtener resultados matemáticos para los efectos de la ISI en sistemas M-arios, y estos efectos suelen estudiarse utilizando simulación de sistemas y programas de computador para generar diagramas oculares de niveles múltiples.†

En un análisis de la señalización M-aria, se supone que el espaciamiento de los niveles de amplitud es uniforme y que los M niveles se centran en cero. Por conveniencia, se supone también que M es un entero par (el caso usual es que M sea una potencia de 2, o $M = 2^\ell$, donde ℓ es un entero). Designando como A el espacio entre niveles adyacentes, se halla que los diversos niveles son

$$A_j = \pm\frac{A}{2}, \pm\frac{3A}{2}, \pm\frac{5A}{2}, \ldots, \pm\frac{(M-1)A}{2}. \tag{9.121}$$

Suponiendo que los M niveles son equiprobables, se obtiene la potencia promedio de la señal [véase Ec. (9.18)]

$$S = \frac{2}{M}\left\{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{3A}{2}\right)^2 + \cdots + \left[\frac{(M-1)A}{2}\right]^2\right\}$$

$$S = \frac{M^2-1}{3}\left(\frac{A}{2}\right)^2. \tag{9.122}$$

Por tanto, para un espaciamiento de los niveles dado, la potencia transmitida crece aproximadamente en proporción al cuadrado del número de niveles.

Ahora, se supone que $M = 4$ (un sistema cuaternario) y que los niveles de señalización son $-3A/2$, $-A/2$, $A/2$, $3A/2$. Por conveniencia se indican los símbolos correspondientes A, B, C, D, respectivamente. Se supone también que el ruido aditivo presente tiene distribución gaussiana con valor medio cero y varianza σ^2. En la figura 9.30 se muestra la función de densidad de probabilidad para el caso en que los cuatro símbolos son equiprobables. Como los símbolos se eligieron equiprobables, los niveles de umbral óptimos están a medio camino entre niveles. Notando que en la figura 9.30 hay seis áreas iguales que deben incluirse en el cálculo de la probabilidad de error, tenemos

$$P_e = (6)\left(\tfrac{1}{4}\right)\int_A^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-[y-(A/2)]^2/(2\sigma^2)}\,dy. \tag{9.123}$$

Con el cambio de variable, $z = [y - (A/2)]/\sigma$, esta expresión queda así:

$$P_e = \frac{3}{2}\int_{A/(2\sigma)}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-z^2/2}\,dz \tag{9.124}$$

$$P_e = \frac{3}{2}Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right). \tag{9.125}$$

Una comparación de la ecuación (9.125) con la (9.39) para el caso binario revela que las dos expresiones son idénticas excepto por el factor 3/2. Este factor surgió de contar

† Véase, por ejemplo, K. Feher, *Digital Communications: Microwave Applications*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1980.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

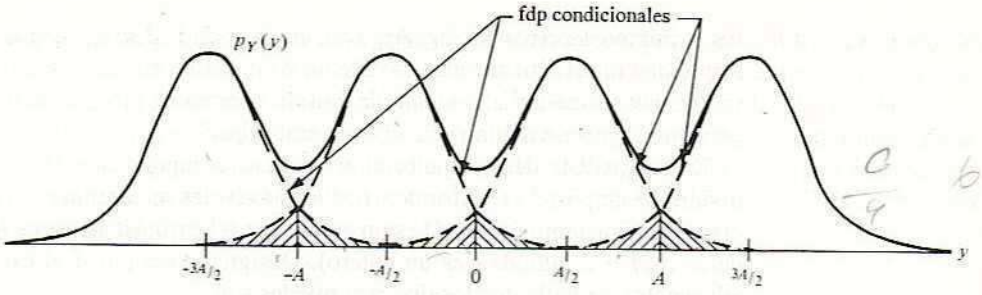


Figura 9.30 Función de densidad de probabilidad para señal más ruido en un sistema M-ario, $M = 4$.

las áreas indicadas en la figura 9.30 y multiplicar este número por $1/M$ (porque todos los símbolos son equiprobables). Considerando que en general hay $2(M - 1)$ áreas que contar, se ve que la ecuación (9.123) puede ampliarse al caso M-ario para obtener

$$P_\epsilon = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right). \tag{9.126}$$

Por tanto, la probabilidad de error aumenta lentamente con un aumento del número de niveles.

Una tercera comparación interesante es la del ancho de banda. Designando el ancho de banda de un sistema binario como B_2 y el correspondiente intervalo de bit como T_b, se tiene

$$B_2 = \frac{1}{2T_b}, \tag{9.127}$$

y

$$B = \frac{B_2}{\log_2 M} = \frac{B_2}{\ell}. \tag{9.128}$$

De las ecuaciones (9.122), (9.126) y (9.128) se concluye que, en la señalización M-aria a una tasa de información dada, el ancho de banda requerido es inversamente proporcional a $\log^2 M$, la potencia transmitida es proporcional a $M^2 - 1$, y la probabilidad de error varía hasta un máximo de una o dos veces la de un sistema binario equivalente. Estas dependencias se ilustran en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 9.12.1

Compare la potencia del transmisor necesaria y el ancho de banda mínimo de los sistemas M-arios para los que $1 \leq \ell \leq 5$. Suponga ruido aditivo blanco gaussiano con densidad espectral de potencia bilateral $\eta/2$ W/Hz y una probabilidad de error de símbolo $P_\epsilon = 10^{-4}$. Normalice todos los resultados al ancho de banda mínimo B_2 requerido por un sistema binario equivalente.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Solución *Notando que $M = 2^\ell$ y $\sigma^2 = \eta B$, se ve que las ecuaciones que deben resolverse son*

$$B = \frac{B_2}{\ell}$$

$$10^{-4} = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

$$S = \frac{M^2 - 1}{3}\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 \eta B .$$

El uso de las ecuaciones anteriores y el apéndice I proporcionan los resultados que se listan en la tabla 9.5. Nótese que en este intervalo, la potencia media necesaria aumenta en unos 4-5 dB por cada duplicación del número de niveles empleados.

TABLA 9.5 Comparación de señalización M-aria para $P_\epsilon = 10^{-4}$

ℓ	M	B/B_2	$A/(2\sigma)$	$[S/(\eta B_2)]$ dB
1	2	1	3.72	11.4
2	4	$\frac{1}{2}$	3.82	15.6
3	8	$\frac{1}{3}$	3.86	20.2
4	16	$\frac{1}{4}$	3.88	25.0
5	32	$\frac{1}{5}$	3.88	30.1

Si la entrada al codificador M-ario es binaria, tiene más sentido usar en la comparación la probabilidad de error de bit que la de error de símbolo. Dado que no hay relaciones únicas entre la probabilidad de error de bit y la de error de símbolo M-aria, pueden obtenerse relaciones para dos casos especiales.

En el primero se supone que siempre que el receptor tenga un error en un símbolo M-ario, es igualmente probable que la salida sea una de las $M - 1$ palabras de código erróneas de ℓ bits. Usando un código binario normalizado (véase Tabla 9.6), se halla que la suma de las distancias de Hamming de una palabra de ℓ bits a todas las demás del código es $\ell 2^{\ell-1}$. El número total de bits en todas las palabras erróneas es $(M-1)\ell = (2^\ell - 1)\ell$. Si se supone que todas son igualmente probables, la probabilidad media de error de bit, P_{be}, es

$$P_{be} = \frac{\ell 2^{\ell-1}}{(2^\ell - 1)\ell} P_\epsilon$$

$$P_{be} = \frac{2^\ell}{2(2^\ell - 1)} P_\epsilon . \tag{9.129}$$

Nótese que

$$\frac{1}{2} \le \frac{P_{be}}{P_\epsilon} \le \frac{2}{3}$$

para este caso.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

TABLA 9.6 Código binario de cuatro bits y código de Gray de cuatro bits

Núm. decimal	Nivel	Código binario	Código de Gray	
0	$15A/2$	0000	0000	
1	$13A/2$	0001	0001	
2	$11A/2$	0010	0011	
3	$9A/2$	0011	0010	
4	$7A/2$	0100	0110	
5	$5A/2$	0101	0111	
6	$3A/2$	0110	0101	Imagen inversa,
7	$A/2$	0111	0100	excepto por el
		Imagen, excepto		primer bit
8	$-A/2$	1000 por el primer bit	1100	(signo)
9	$-3A/2$	1001	1101	
10	$-5A/2$	1010	1111	
11	$-7A/2$	1011	1110	
12	$-9A/2$	1100	1010	
13	$-11A/2$	1101	1011	
14	$-13A/2$	1110	1001	
15	$-15A/2$	1111	1000	

Una dificultad del código binario normalizado es que la distancia de Hamming varía (de 1 a ℓ) entre uno y otro niveles adyacentes. En señalización M-aria, preferiríamos usar un código en el que sólo varíe un dígito binario conforme cambia la amplitud de un nivel adyacente a otro. Dicho de otra manera, las palabras de código de niveles adyacentes deberían estar separadas por una distancia de Hamming de uno. El código de Gray mostrado en la tabla 9.6 es un ejemplo de tal código.†

En el segundo caso de la relación entre la probabilidad de error de bit y la de error de símbolo, se supone que la entrada al codificador M-ario se codifica de modo que las palabras binarias para niveles de amplitud adyacentes difieren en sólo un dígito binario (como en el código de Gray). Se supone también que la probabilidad de error de símbolo es pequeña, de manera que es muy poco probable que se cometa un error de más de un nivel. En estas condiciones, se tiene

$$P_{be} = \frac{1}{\ell} P_e \quad \text{(codificación de nivel de Gray).} \tag{9.130}$$

Las ecuaciones (9.129) y (9.130) se pueden utilizar con el fin de dar algunas respuestas aproximadas para propósitos de comparación.

† Los dígitos binarios en el código de Gray, g_k, se pueden encontrar a partir de los del código binario correspondiente b_k mediante

$$g_k = \begin{cases} b_k & k = 1 \\ b_k \oplus b_{k-1} & k > 1 \end{cases}.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJERCICIO 9.12.1

Repita el ejemplo 9.12.1 pero utilizando $P_{be} = 10^{-4}$ y un código de Gray.

RESPUESTA: Véase la tabla 9.7.

TABLA 9.7 Comparación de señalización *M*-aria para $P_{be} = 10^{-4}$ y código de Gray

ℓ	M	B/B_2	$A/(2\sigma)$	$[S/(\eta B_2)]$ dB
1	2	1	3.72	11.4
2	4	$\frac{1}{2}$	3.65	15.2
3	8	$\frac{1}{3}$	3.58	19.5
4	16	$\frac{1}{4}$	3.52	24.2
5	32	$\frac{1}{5}$	3.47	29.2

9.13 ★ CODIFICACIÓN PARA UNA COMUNICACIÓN CONFIABLE

En la modulación de código de pulso binario, cada muestra de la señal se representa con una palabra de código de, por ejemplo, k bits. Estos bits se transmiten y el receptor debe reconocer cada palabra de código para reconstruir las muestras. Sin embargo, debido al ruido pueden ocurrir errores en la transmisión. Una forma de aumentar la confiabilidad de la comunicación en presencia de ruido es incrementar la razón señal a ruido. Una opción es agregar bits, a expensas de un mayor ancho de banda, para detectar y quizá corregir los errores. Esta sección presenta al lector interesado este último enfoque, limitando la atención al caso binario.

Supóngase que se quiere transmitir una señal que se ha cuantificado en 16 niveles equiprobables. En este caso, cada palabra de código constará de $k = 4$ bits. A cada palabra se agregan r bits que se usarán para detectar y posiblemente corregir errores. Estos bits adicionales son redundantes porque no portan información sobre la señal. Entonces, cada palabra de código está compuesta por n bits de la manera siguiente:

k = número de dígitos de mensaje por palabra;

r = número de dígitos de comprobación por palabra;

$n = k + r$ = número total de dígitos por palabra (9.131)

Esto se llama código (n, k). La eficiencia de la razón del código se define como k/n y es un indicador de la tasa de información con relación a la tasa de bits del código.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

★ 9.13.1 Códigos algebraicos†

Se puede formar un tipo de código agregando dígitos binarios extra al final de cada palabra de código para detección de error y, posiblemente, corrección de error. Estos bits extra se llaman bits de verificación de paridad.

Una palabra de código general para un código de verificación de paridad puede escribirse en la forma

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_k c_1 c_2 \cdots c_r$$

donde a_i es el i-ésimo bit de la palabra de código del mensaje y c_j es el j-ésimo bit de verificación de paridad. Los bits de verificación deben satisfacer las $r = n - k$ ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 0 &= h_{11}a_1 \oplus h_{12}a_2 \oplus \cdots \oplus h_{1k}a_k \oplus c_1 \\ 0 &= h_{21}a_1 \oplus h_{22}a_2 \oplus \cdots \oplus h_{2k}a_k \oplus c_2 \\ &\vdots \\ 0 &= h_{r1}a_1 \oplus h_{r2}a_2 \oplus \cdots \oplus h_{rk}a_k \oplus c_r . \end{aligned} \tag{9.132}$$

Estas ecuaciones se pueden expresar de modo más conveniente en forma de matriz columna $n \times 1 = [T]$ que representa a la palabra de código

$$[T] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \\ c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} \tag{9.133}$$

y una matriz rectangular $r \times n$ de verificación de paridad $[H]$,

$$[H] = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \cdots h_{1k} & 1 & 0 \cdots 0 \\ h_{21} & h_{22} \cdots h_{2k} & 0 & 1 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{r1} & h_{r2} \cdots h_{rk} & 0 & 0 \cdots 1 \end{bmatrix} \tag{9.134}$$

por lo que la ecuación (9.132) puede expresarse como

$$[H][T] = 0 . \tag{9.135}$$

Ahora, sea $[R]$ la palabra de código recibida, que puede o no ser igual a $[T]$. Si $[H][R] = 0$, se sabe que $[R]$ es una palabra de código; y más probablemente, la palabra

† Esta sección requiere algún conocimiento de notación matricial.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

transmitida. Por otra parte, si $[H][R] \neq 0$, entonces $[R]$ no es una palabra de código y se ha cometido al menos un error.

La palabra de código $[R]$ puede ponerse en términos de la transmitida introduciendo una matriz de error $[E]$ de $n \times 1$:

$$[R] = [T] \oplus [E]. \tag{9.136}$$

Si $[E]$ sólo contiene ceros, no se ha cometido error.

Para corregir los errores, se necesita determinar $[E]$. Un primer paso es determinar una matriz $[S]$ -llamada *síndrome*- a partir de la palabra de código recibida y la matriz de verificación de paridad:

$$\begin{aligned}[S] &= [H][R] \\ &= [H][T] \oplus [H][E] \\ &= [H][E]. \end{aligned} \tag{9.137}$$

El síndrome $[S]$ tiene dimensiones $r \times 1$ y puede ser cualquiera de 2^r secuencias (incluyendo la de sólo ceros). La secuencia de error $[E]$ puede ser cualquiera de las $2^n = 2^{r+k}$ secuencias. Por tanto, el síndrome no puede determinar la secuencia de error sin ambigüedad. La tarea del decodificador es seleccionar una de varias secuencias de error asociadas con un síndrome dado. Generalmente, esta selección se basa en un criterio de distancia mínima. Si hay un solo error, la matriz de error $[E]$ tendrá un elemento distinto de cero y la multiplicación de la ecuación (9.137) aparecerá en alguna columna de $[H]$. La posición del error en la palabra de código se encuentra por inspección de la columna apropiada de $[H]$. En ejemplos posteriores se ilustra esto.

Los *códigos de Hamming* son los códigos de verificación de paridad para los cuales las columnas de $[H]$ consisten en todas las diferentes r secuencias distintas de cero de números binarios. Por tanto, un código de Hamming tiene una matriz de verificación de paridad con tantas columnas como secuencias de error simple haya; es decir,

$$r + k = n = 2^r - 1. \tag{9.138}$$

Los códigos de Hamming son capaces de corregir todas las secuencias de error único, y toda posible secuencia recibida es una palabra de código o está a una distancia uno de alguna de ellas.

Los códigos que se han examinado son ejemplos de códigos *de bloque*. En un código de bloque (n, k) los $r = n - k$ bits redundantes se combinan con los k bits de mensaje para producir una palabra de código de n dígitos. Cada palabra de código de n dígitos se codifica y decodifica de manera independiente de cualquier otra; n se llama *longitud de bloque* de la palabra de código.

EJEMPLO 9.13.1

Un código de Hamming (7, 4) tiene la siguiente matriz de verificación de paridad:

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

a) Determine la palabra de código para el mensaje 0011.
b) Si la palabra de código recibida es 1000010, determine si se ha cometido un error. De ser así, halle la palabra de código correcta.

Solución a) La palabra de código es 0011 $c_1c_2c_3$ y puede escribirse (todas las operaciones son módulo-2)

$$[H][T] = \begin{bmatrix} 1 + c_1 \\ 1 + c_2 \\ 0 + c_3 \end{bmatrix}.$$

Usando la ecuación (9.135), se halla que la palabra de código es 0011110.

b) Calculando el síndrome, se tiene:

$$[S] = [H][R] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como el síndrome es la tercera columna de la matriz de verificación de paridad, la tercera posición de la palabra recibida es errónea y la palabra de código corregida es 1010010.

EJEMPLO 9.13.2

Las columnas de la matriz de paridad del código de Hamming pueden elegirse en cualquier orden siempre que sean distintas y ninguna tenga sólo ceros. Repita el ejemplo 9.13.1 para el código de Hamming (7, 4), elegido de modo que las columnas de la matriz de verificación de paridad sean las representaciones binarias de los enteros sucesivos 1, 2, 3,..., n.

Solución a) La matriz de verificación de paridad se halla escribiendo las representaciones binarias de 1, 2,...,7 en columnas sucesivas de modo que

$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, una palabra de código general es $c_3c_2a_1c_1a_2a_3a_4$. Las ecuaciones de paridad son

$$[H][T] = \begin{bmatrix} c_1 + 0 \\ c_2 + 0 \\ c_3 + 1 \end{bmatrix} = 0,$$

por lo que la palabra de código es 1000011.

b) Calculando el síndrome, se tiene

$$[S] = [H][R] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Por tanto, el error se encuentra en la séptima posición y la palabra decodificada es 1000011. Nótese que para un error único, el síndrome es la representación binaria de la posición errónea en la palabra.

9.13.2 Códigos convolucionales

A diferencia de los códigos de bloque, en los convolucionales la información de verificación de paridad está distribuida sobre un espacio de símbolos de mensaje llamado *espacio acotado* del código. De esta manera, pueden codificarse en forma continua largas corrientes de bits sin necesidad de agruparlos en bloques. Esto se consigue usando registros de desplazamiento cuyas salidas se combinan de una manera preestablecida para fijar ciertos límites en la corriente de bits codificada.

Un registro de desplazamiento es una serie de memorias binarias en cascada. El estado binario de cada memoria se transfiere a la siguiente accionado por un reloj que se encuentra sincronizado con la corriente de bits de entrada. Por tanto, la salida de un registro de desplazamiento de cuatro etapas es la entrada retardada en cuatro intervalos del reloj, y en cualquier momento el registro contendrá los cuatro bits sucesivos más recientes de la corriente de entrada.

Puede generarse un código convolucional de espacio acotado K combinando las salidas de K registros de desplazamiento con v sumadores módulo 2. A cada intervalo del reloj, las salidas de los v sumadores se muestrean en un conmutador, por lo que se generan v símbolos de salida por cada símbolo de entrada, dando un código de tasa $1/v$.

En la figura 9.31 se da un ejemplo de codificador convolucional para $K = 4$ y $v = 3$. El estado binario se encuentra en la salida de cada etapa hasta que se desplaza a la siguiente. Las ecuaciones para los tres sumadores son

$$\begin{aligned} v_1 &= S_1, \\ v_2 &= S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus S_4, \\ v_3 &= S_1 \oplus S_3 \oplus S_4. \end{aligned} \tag{9.139}$$

Nótese que no todas las etapas están conectadas a todos los sumadores. Las conexiones influyen en el código generado, y su selección no corresponde al nivel de este análisis.

La codificación convolucional se demuestra suponiendo que la corriente de datos de entrada comienza con 10110 y que todos los registros se hallan inicialmente en cero. El primer dígito del mensaje es 1 y la salida correspondiente es 111 (si el primer dígito fuera 0, la salida sería 000). El siguiente dígito es 0 y la salida correspondiente es 010 (si el segundo dígito fuera 1, la salida sería 101). Sin embargo, nótese que si el primer dígito del mensaje hubiera sido 0, la salida habría sido 000 si el segundo dígito fuera 0, o 111 si éste fuera 1. Por tanto, el código generado depende de dígitos previos en el espacio acotado del código.

Ahora se verá el problema del decodificador. Para cada incremento en el código del mensaje, el código de salida de tres bits del ejemplo anterior brinda ocho posibles opciones, algunas de las cuales pueden descartarse inmediatamente como imposi-

http://libreria-universitaria.blogspot.com

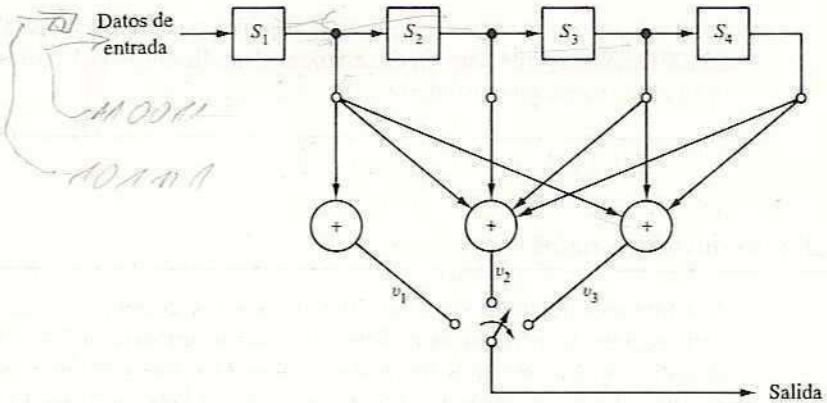


Figura 9.31 Ejemplo de codificador convolucional de tasa $\frac{1}{3}$.

bles por un codificador determinado. Las restantes pueden examinarse en relación con los dígitos previos en el espacio acotado del código. En ausencia de ruido, este procedimiento es bastante directo e implica tomar decisiones después de cada grupo de $v = 3$ dígitos de entrada. Este método, que comprende ramas sucesivas, puede diagramarse como un "árbol de código". En la referencia 2 se muestra un árbol de código para el codificador de la figura 9.31.

En presencia de ruido, el procedimiento óptimo es similar: se examinan las posibles opciones del código en términos de las probabilidades condicionales entre cada opción, en el espacio acotado del código. Para códigos de espacio acotado corto, se emplea un algoritmo de decodificación conocido como algoritmo de Viterbi.[†] Se han desarrollado también otros algoritmos de decodificación. Sin embargo, esta sección se concibió como una breve introducción al tema, por lo que no se proseguirá con él.

EJERCICIO 9.13.1

Determine los primeros 18 bits de salida en el código convolucional para el mensaje 110011. Use el codificador de la figura 9.31 y suponga que todos los registros se encuentran en cero al inicio.

RESPUESTA: 111101001000100101.

9.14 RESUMEN

La comunicación es la transmisión de información de un punto a otro en el espacio y en el tiempo. La información conducida por el conocimiento de la ocurrencia de un evento es proporcional al logaritmo del inverso de su probabilidad de ocurrencia. La

[†] Véase, por ejemplo, G. D. Forney, "The Viterbi Algorithm", *Proceedings of the IEEE*, vol. 61, marzo de 1973, págs. 268-273.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

unidad binaria de información es el bit. La tasa de información es el producto de la información media (entropía) por símbolo y la tasa de símbolos.

Las características semejantes a un filtro del medio de propagación y de las etapas de transmisión y recepción pueden describirse por medio de un modelo matemático conocido como canal. La tasa límite de transmisión de información a través de un canal ruidoso se llama capacidad del canal. La ley de Hartley-Shannon proporciona la capacidad del canal C en presencia de ruido blanco gaussiano de banda limitada como $C = B \log_2 (1 + S/N)$. Esta expresión muestra que el intercambio óptimo entre la razón señal a ruido S/N y el ancho de banda B es exponencial.

La cuantificación de una señal introduce ruido. Este ruido de cuantificación es inversamente proporcional al número de niveles de cuantificación. Para hacer a todos los niveles de una señal más equiprobables a fin de minimizar los efectos del ruido de cuantificación, se usa una característica no lineal conocida como compansión.

La transmisión directa de una señal de baja frecuencia se llama comunicación en banda base. La señal encendido-apagado y la polar son dos tipos de señal PCM binaria de banda base. La señal PCM polar de banda base es más eficiente y utiliza la mitad de la potencia media para una probabilidad de error dada. La PCM diferencial (DPCM) se utiliza para posibles ahorros de ancho de banda; la modulación delta (DM) emplea circuitos más simples para enviar y recibir transmisiones codificadas.

El comportamiento global S/N en los sistemas PCM está limitado tanto por el ruido de transmisión (térmico) como por el de cuantificación. Usualmente, los sistemas PCM se diseñan de manera que el último sea el factor de control.

En la transmisión a larga distancia, las señales suelen igualarse y amplificarse mediante repetidores espaciados a distancias determinadas por las distorsiones y atenuaciones esperadas de la señal. En los sistemas analógicos, los efectos del ruido de transmisión se acumulan en repetidores sucesivos, mientras que en sistemas digitales estos efectos crecen aproximadamente en proporción al número de repetidores.

La densidad espectral de potencia de una señal binaria aleatoria tiene la forma $(\text{sen } x/x)^2$. Los diversos formatos de codificación tienen cierto efecto sobre esta forma. En señales PCM en que predominan las transiciones hacia determinada polaridad en razón directa con la tasa del reloj, la densidad espectral de potencia contendrá componentes de frecuencia discretas.

La señalización de respuesta parcial utiliza cantidades controladas de interferencia entre símbolos para transmitir datos a mayores velocidades en canales de banda limitada no ideales. Esta mayor velocidad se logra a expensas de alguna potencia adicional transmitida, y hace falta la precodificación para evitar la propagación indeseada de errores.

Los filtros ajustados para compensar las imperfecciones del canal se llaman igualadores. Los filtros transversales se utilizan como igualadores porque permiten el ajuste de los parámetros antes de la transmisión de datos (tipos prefijados) o durante ella (tipos adaptables).

Pueden obtenerse transmisiones a mayores tasas de información usando uno o más de dos posibles niveles en la duración de cada símbolo. En la señalización M-aria se envía uno de M niveles y, por tanto, cada símbolo representa $\log_2 M$ bits de información. Como el ancho de banda es inversamente proporcional a la duración del símbolo, tales sistemas pueden transmitir a mayores tasas de datos dentro de un ancho de banda dado aumentando M. Esto se consigue a costa de un aumento de la potencia transmitida y de la complejidad del equipo.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En la codificación para control de errores, se introduce redundancia agregando bits al mensaje transmitido, lo que posibilita detectar y quizá corregir errores que puedan haberse cometido. Los aumentos potenciales en el rendimiento del sistema son a expensas del ancho de banda. Los códigos algebraicos son ejemplos de códigos de bloque en los que se introduce redundancia como dígitos de verificación de paridad en cada palabra de código. Por el contrario, en los códigos convolucionales los dígitos de verificación de paridad se intercalan continuamente en la corriente de bits codificada.

Referencias seleccionadas para lectura adicional

1. Bennett, W. R., y Davey, J.R., *Data Transmission*, Nueva York, McGraw-Hill, 1965.
   Presenta técnicas de comunicación digital con énfasis particular en sistemas telefónicos.
2. Taub, H. y Schilling, D. L., *Principles of Communication Systems*, 2a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1986.
   Los capítulos 5, 12 y 13 contienen buenos análisis de cuantificación, modulación delta y códigos de bloque.
3. Carlson, A. B., *Communication Systems*, 3a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1986.
   Los capítulos 11 a 13 cubren la transmisión en banda base.
4. Shanmugam, K. S., *Digital and Analog Communication Systems*, Nueva York, John Wiley & Sons, 1979.
   El capítulo 5 contiene un buen tratamiento de la transmisión de datos en banda base; en el capítulo 9 se estudian brevemente varias técnicas de codificación.
5. Lucky, R. W., Salz, J. y Weldon, Jr., E. J., *Principles of Data Communication*, Nueva York, McGraw-Hill, 1968.
   Los capítulos 4 a 6 cubren la transmisión de datos en banda base y la igualación con énfasis particular en sistemas telefónicos.
6. Feher, K. (ed.) *Advanced digital communications*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1987.
   Presenta buenas explicaciones de la señalización de respuesta parcial y la igualación adaptable en los capítulos 8 y 12.
7. Lin, S., *An Introduction to Error-Correcting Codes*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1970.
   Hace una buena presentación de varios métodos de códigos correctores de error.
8. Steele, R., *Delta Modulation Systems*, Nueva York, John Wiley & Sons (Halsted Press), 1975.
   Analiza varias formas de modulación delta y su rendimiento *S/N*; comparaciones con PCM; avanzado.
9. Proakis, J. G., *Digital Communications*, 2a. ed., Nueva York, McGraw Hill, 1989.
   En el capítulo 6 se cubre el tema de señalización digital en un canal de ancho de banda restringido, con énfasis en igualación adaptable.
10. Gallager, R. G., *Information Theory and Reliable Communication*, Nueva York, John Wiley & Sons, 1968.
    El capítulo 6 presenta un estudio avanzado de la codificación.

PROBLEMAS

9.1.1 a) Calcule la información en el experimento de arrojar un dado, suponiendo que los eventos (puntos en cada cara) son igualmente probables.

b) Repita la parte (a) si se asignan las siguientes probabilidades a las caras del dado:

$$P(1) = 0.1, \quad P(2) = 0.2, \quad P(3) = 0.25, \quad P(4) = 0.3, \quad P(5) = 0.05.$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

9.1.2 En una universidad que utiliza las calificaciones A, B, C, D, F, se sabe que el profesor de cierto curso asigna al 40% de los estudiantes la calificación C y a un 5% la F. Cuánta información, en bits, se transmite a los padres de un estudiante cuando se les informa (sin tener información previa) que la calificación en el curso es

a) C; b) no es F; c) F.

9.1.3 Las unidades residenciales de una ciudad tienen medidores para el consumo de electricidad, agua y gas. Suponga que los medidores de electricidad tienen seis dígitos decimales (es decir, 0-9), los de agua, cinco y los de gas, cuatro.

a) Calcule la cantidad de información (en bits) para hacer cada una de las tres mediciones.

b) Se propone que esta información se envíe automáticamente, en formato binario y por transmisión de datos. Como mínimo, cada unidad residencial necesita un único número de identificación además de una secuencia de tres códigos para las lecturas (en una secuencia conocida). Si la capacidad de dicho sistema es de 65 000 unidades residenciales, determine el número de bits necesarios para automatizar las lecturas.

9.1.4 La entropía o "promedio" de un texto en inglés es de 4.16 bits con una frecuencia de letras (por 1000):

E	124	S	66	C	32	W	20	K	5
T	96	R	60	U	31	Y	19	Q	2
A	81	H	51	P	23	B	16	X	2
O	79	L	40	F	23	G	16	J	1
N	72	D	37	M	22	V	9	Z	1
I	72								

a) ¿Cuál sería la entropía de un texto en inglés si todas las letras fueran equiprobables?

b) Si se le pide que adivine el nombre de un objeto basado en la primera letra, ¿cuál pista es más útil, "E" o "Z"? Explique.

c) Suponga que va a diseñar un juego en el que se acomodan letras para formar palabras. Usted decide asignar un punto a la letra más sencilla y 10 a la más difícil. Decide también utilizar la entropía como medida de la dificultad y poner a escala linealmente los puntos asignados a cada una (redondeando a números enteros). Sin tomar en cuenta que la utilización de algunas letras puede depender de otras, ¿qué valor asignaría a una "N" y una "K"?

9.1.5 a) Suponiendo una tasa de transmisión de información de 10 bits por segundo para un teclado (que contiene los dígitos de 0 a 9) de computador, y dado que cada dígito tiene la misma probabilidad de transmitirse, calcule la duración promedio por símbolo (es decir, el inverso de la tasa de símbolos).

b) Repita la parte (a) si el cero es tres veces más probable que cualquier otro dígito.

9.1.6 Un código dado tiene seis mensajes con probabilidades $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/4$, $P(C) = 1/8$, $P(D) = 1/16$, $P(E) = 1/32$, $P(F) = 1/32$.

a) Determine la entropía del código.

b) Suponiendo independencia estadística, encuentre la información en los mensajes $X =$ BABC y $Y =$ FDEF.

9.1.7 Repita el problema 9.1.6 con $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.22$, $P(C) = 0.18$, $P(D) = 0.15$, $P(E) = 0.12$, $P(F) = 0.08$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

9.1.8 (Codificación de Huffman) Es conveniente hacer que el número promedio de dígitos de un código esté lo más cerca posible de la entropía de la fuente. Esto se puede llevar a cabo asignando palabras de código más cortas a los mensajes más probables, aunque a expensas de un código de longitud variable. A continuación se presenta un algoritmo de tres pasos para generar dicho código. El primer paso es listar los mensajes en una columna y en orden descendente de sus probabilidades de ocurrencia. En seguida, se combinan los últimos dos (es decir, aquéllos con las menores probabilidades) y se listan de nuevo en una segunda columna en orden descendente de probabilidades. Continúe este procedimiento hasta que sólo queden dos en la lista.

En el segundo paso, liste los últimos dos del primer paso en una fila, luego coloque cada par por debajo de su reducción, fila por fila, al revés de los pasos anteriores. En el tercer paso, asigne 0 y 1 al par superior en la lista del paso dos (no hay diferencia entre 0 y 1), luego asigne 0 o 1 como segundo dígito para los elementos de la segunda fila, y continúe fila por fila. Este procedimiento asigna en forma sistemática las palabras de código más cortas a mensajes con alta probabilidad de ocurrencia. Usando este procedimiento, genere las palabras de código:

a) En el ejercicio 9.1.2.

b) Para el problema 9.1.6.

c) Para el problema 9.1.7.

9.2.1 Una línea telefónica estándar de voz (analógica) tiene un ancho de banda útil para transmisión de datos cercano a 2400 Hz.

a) Si se puede mantener una S/N = 30 dB, ¿cuál es la capacidad del canal?

b) Calcule la S/N para mantener las siguientes tasas de datos en la línea, permitiendo un margen de 10 dB sobre la mínima S/N teórica requerida.

9.2.2 a) ¿Cuál es la razón señal a ruido necesaria para un dispositivo periférico (p. ej., una impresora), si se supone una capacidad de canal de 3 kbps, con un ancho de banda de 500 Hz?

b) Repita la parte (a) para un ancho de banda de 1 kHz.

9.2.3 Calcule la capacidad de canal necesaria para transmitir imágenes de TV digitalizadas, suponiendo una razón señal a ruido de 50 dB y un ancho de banda de transmisión de 5 MHz.

9.2.4 El departamento de ingeniería requiere el diseño de una máquina de facsímiles que transmita una hoja escrita a máquina de 8 × 10 pulgadas a una resolución de 150 dpi (puntos por pulgada) en un circuito telefónico estándar (véase Ejer. 9.2.1) en un minuto. ¿Puede esto realizarse? Explique su respuesta.

9.3.1 En la entrada de un receptor ideal el ancho de banda transmitido es de 50 kHz, mientras que el ancho de banda en la salida es de 5 kHz.

a) Si la entrada tiene una razón S/N de 10 dB, ¿cuál es la razón S/N en la salida del demodulador?

b) Compare su respuesta de la parte (a) con lo que esperaría en FM en condiciones similares.

9.3.2 Suponga que la información en los 10 dígitos de un número telefónico se van a transmitir en forma digital.

a) ¿Cuántos pulsos son necesarios si cada pulso tiene (1) dos niveles; (2) cuatro niveles; (3) ocho niveles?

b) Estime el ancho de banda necesario, relativo al que se requiere en el caso binario, para los otros dos casos de la parte (a).

c) Estime el aumento en la potencia de la señal (en dB) necesaria, relativo al que se requiere en el caso binario, para las otras dos elecciones de la parte (a). Suponga una varianza fija del ruido aditivo y el criterio utilizado en la ecuación (9.11).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

9.4.1 Una señal de tensión de banda limitada a 3 kHz y restringida en amplitud a 4 V pico a pico se convierte a código PCM binario utilizando 128 niveles igualmente espaciados.

a) Calcule el mínimo ancho de banda necesario.

b) Calcule la razón de cuantificación señal pico a rms y la razón *S/N* de cuantificación cuadrática media.

c) Repita las partes (a), (b) si se utilizan 256 niveles.

9.4.2 a) Una ley de compansión logarítmica que se utiliza en sistemas telefónicos es la ley μ definida como

$$e_o = \frac{\log (1 + \mu e_i)}{\log (1 + \mu)},$$

donde e_i, e_o se normalizan a (0, 1) y μ es una constante (se utiliza simetría impar para argumentos negativos). Grafique la característica de compresión para $\mu = 255$ (los sistemas telefónicos PCM en Estados Unidos usan la ley μ de compansión con $\mu = 255$).

b) Una compresión logarítmica utilizada en el servicio telefónico europeo es la ley A definida por

$$e_o = \begin{cases} \dfrac{Ae_i}{1 + \log (A)} & 0 \le e_i < 1/A \\ \dfrac{1 + \log (Ae_i)}{1 + \log (A)} & 1/A \le e_i < 1 \end{cases}.$$

Grafique la característica de compresión para $A = 100$ y compare con la característica $\mu = 255$ de la parte (a).

9.4.3 Una señal con distribución uniforme en (−1, 1) se cuantifica utilizando cuatro niveles igualmente espaciados.

a) Calcule el valor cuadrático medio de la señal cuantificada.

b) Esta señal cuantificada se aplica a la entrada del compresor $\mu = 255$ descrito en el problema 9.4.2(a). Calcule el valor cuadrático medio de la salida del compresor.

c) Repita la parte (b) para el compresor $A = 100$.

9.4.4 Una señal dada tiene una densidad de probabilidad

$$p(x) = \begin{cases} ke^{-|x|} & -2 \le x < 2, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a) Determine el ruido de cuantificación cuadrático medio para cuatro niveles de cuantificación igualmente espaciados en (−2, 2). No suponga que la distribución es constante en cada intervalo.

b) Compare su respuesta de la parte (a) si se supone distribución uniforme.

9.4.5 Repita el ejemplo 9.4.1 para un cuantificador de cuatro niveles. Determine también el valor cuadrático medio de la salida cuantificada.

9.4.6 El método de dividir el intervalo en varios niveles discernibles antes de la ecuación (9.11) a veces se utiliza en el diseño de necesidades de transmisión de datos en instrumentación. Por ejemplo, el ruido generado en un tubo fotomultiplicador (PMT, *photomultiplier tube*) tiene valor medio cero y una varianza proporcional al nivel de luz (señal). Si el nivel más bajo es de 0.1 V y el más alto es de 2 V, determine los niveles apropiados para cuantificación de ocho niveles. [*Sugerencia*: Suponga una disminución triangular de la pdf en (0.1, 2), integre para encontrar $F_X(x)$ y luego divida $F_X(x)$ en ocho porciones iguales para encontrar x.]

http://libreria-universitaria.blogspot.com

9.4.7 Los niveles de cuantificación se pueden elegir para minimizar el error sobre una base cuadrática media. Si b_k es el k-ésimo nivel de cuantificación y a_k, a_{k+1} son las fronteras adyacentes de redondeo, entonces el error para n niveles de cuantificación es

$$\overline{\epsilon^2} = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (x - b_k)^2 p(x)\, dx\,.$$

Aquí se supone que las a_k se eligen como la media aritmética entre los respectivos puntos b_k vecinos (se puede demostrar que ésta es una elección óptima.)

a) Obtenga una expresión para b_k que minimice el error cuadrático medio en el intervalo entre las a_k adyacentes.

b) Como se conocen los puntos finales (a_1, a_{k+1}), se pueden encontrar los niveles de cuantificación (b_k). Resuelva el ejemplo 9.4.1 para un cuantificador de cuatro niveles usando estos resultados.

9.5.1 a) Para el caso polar binario, sean $-A$, $+A$ los dos niveles de señal. Suponga ruido gaussiano aditivo con media cero y varianza σ^2. Demuestre que para ceros y unos equiprobables la probabilidad neta de error está dada por [véase Ec. (9.39)]:

$$P_\epsilon = Q(A/\sigma)\,.$$

b) Generalice el resultado de la parte (a) para el caso en el que la diferencia entre niveles de la señal es Δ.

9.5.2 Una señal binaria polar recibida es + 1 mV o -1 mV en $(0, T)$. Se encuentra presente ruido blanco gaussiano aditivo con media cero y una densidad espectral de potencia (bilateral) de 1 fW/Hz a través de una resistencia de 50 ohms.

a) Determine el ancho de banda B equivalente del ruido, necesario para una probabilidad de error de 1×10^{-4} (véase Problema 9.5.1).

b) Si la composición de señal más ruido se procesa con un filtro acoplado, determine el tiempo T mínimo para una probabilidad de error de 1×10^{-4}.

9.5.3 Un sistema binario encendido-apagado utiliza la señal

$$f(t) = \begin{cases} A \text{ sen } (\pi t/T) & 0 \le t < T \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

para un uno y ausencia de pulso para un cero. Sea $A = 0.2$ mV y $T = 2$ μs. Está presente ruido blanco aditivo gaussiano con densidad espectral de potencia de 1 fW/Hz a través de un ohm.

a) Determine la probabilidad neta de error para unos y ceros equiprobables.

b) Repita la parte (a) para un sistema binario que envía $[-f(t)]$ para los ceros y transmite la misma potencia promedio.

9.5.4 Una transmisión binaria utiliza la representación en código de Manchester para unos y ceros, como se muestra en la figura P-9.5.4. Suponga que se utiliza detección con filtro acoplado en presencia de ruido blanco gaussiano aditivo con una densidad espectral de potencia (bilateral) de 1 fW/Hz a través de un ohm. Los parámetros de la señal en el receptor son $A = 0.1$ mV y $T = 2$ μs.

a) Dibuje un diagrama de bloques del receptor óptimo.

b) Dibuje un diagrama de la autocorrelación de la señal de entrada.

c) Dibuje las pdf para unos y ceros, suponiendo que $B = 1/(2T)$.

d) Encuentre la probabilidad neta de error, suponiendo unos y ceros equiprobables.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

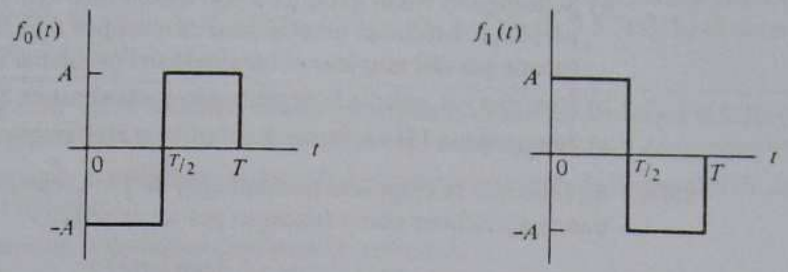


Figura P-9.5.4.

9.5.5 Un sistema binario que opera a 1200 bps transmite una señal de pulso $f(t)$ para un uno y $-f(t)$ para un cero, donde $f(t)$ es un pulso rectangular de 0.2 ms de duración. El ruido aditivo es ruido blanco gaussiano con media cero. El sistema se diseña para que la señal de pulso recibida tenga la forma de un pulso de Nyquist cosenoidal con una frecuencia de -6 dB de 1200 Hz. Determine la magnitud de las funciones de transferencia (normalizadas a ganancia unitaria en cd) de los filtros de transmisión y recepción que dan cero ISI y detección óptima si las características del canal se describen como sigue:

a) $H_C(\omega) \approx 1$ en las frecuencias de interés.

b) La respuesta al impulso del canal es de la forma

$$h_C(t) = (1/\tau_C) \exp(-t/\tau_C)u(t), \quad \text{donde } \tau_C = 0.1 \text{ ms.}$$

9.5.6 a) Repita el problema 9.5.5, pero con ruido gaussiano aditivo que tiene densidad espectral de potencia (bilateral)

$$S_n(\omega) = \tfrac{1}{2}N_0[1 + (\omega/\omega_1)^2]^{-1};$$

b) Examine el caso particular en el que $\omega_1 = 1/\tau_C$.

9.6.1 Calcule el error cuadrático medio en la reconstrucción de una palabra de código binaria de tres bits producto de un error aleatorio de bit en transmisión en cada una de las siguientes condiciones. Suponga que la probabilidad de error, P_ϵ, es lo bastante pequeña para que la probabilidad de más de un bit en error en una palabra de código sea despreciable.

a) Utilice una regla de cuantificación lineal y normalícela para que la reconstrucción se encuentre sobre el intervalo de amplitud (-1, 1).

b) Repita la parte (a) usando la regla de compansión desarrollada en el ejemplo 9.4.1.

9.6.2 Defínase un umbral PCM en el punto en el que S_0/N_0 disminuye un dB del desempeño de cuantificación con ruido limitado de la figura 9.12. Este número se puede utilizar como guía para una S_i/N_i mínima que mantenga el desempeño de cuantificación con ruido limitado.

a) Determine los valores de umbral de S_i/N_i para $m = 6, 8, 10, 12$.

b) Demuestre que una aproximación razonable en este intervalo está dada por $S_i/N_i \geq (m/2 + 10)_{dB}$ para un desempeño de cuantificación con ruido limitado.

9.6.3 En los tiempos de muestra óptimos en el receptor, la presencia de ISI se puede tratar como una variable aleatoria aditiva. Considere el caso de una señal polar NRZ con ISI que tiene los siguientes valores muestreados:

$$y(t_k) = \pm A + n(t_k) + z(t_k)$$

donde $n(t_k)$ es ruido aditivo y $z(t_k)$ representa la ISI. La pdf de $z(t_k)$ está dada aquí como

$$p_Z(z) = \tfrac{1}{4}\delta(z + \alpha) + \tfrac{1}{2}\delta(z) + \tfrac{1}{4}\delta(z - \alpha).$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

a) Suponiendo ruido gaussiano con media cero $n(t)$ y varianza σ^2, obtenga una expresión para la probabilidad neta de error en términos de A, α y σ para unos y ceros equiprobables (puede ser útil emplear el resultado del problema 8.9.3).

b) Para $A/\sigma = 3$, calcule la degradación equivalente en S/N (en dB) para $\alpha/A = 0.1$ y $\alpha/A = 0.2$.

c) Interprete la ISI en forma cualitativa y en términos de un diagrama ocular.

9.6.4 Se sabe que la respuesta normalizada de cierto canal a una señal de pulso polar binaria se puede aproximar como (excepto por un retardo):

$$g(t) \approx \begin{cases} \text{sen}\,(\pi t/T) & 0 \le t < T \\ 0.2\ \text{sen}\,(\pi t/T) & T \le t < 2T \end{cases}$$

a) Dibuje un modelo ocular para una secuencia alterna 1010.

b) Dibuje un modelo ocular para una secuencia aleatoria [véase Problema 9.6.3(a)].

c) Identifique los efectos tanto en amplitud como en tiempo de la ISI en sus modelos oculares.

9.7.1 Un sistema DM dado opera con frecuencia de muestreo $f_s = 1/T$ y tamaño de paso fijo a. Si la entrada al sistema es $f(t) = kt$ para $t > 0$, determine (a) el valor de k arriba del cual se presenta una sobrecarga de la pendiente; (b) el valor de k que minimiza el ruido de cuantificación cuadrático medio.

9.7.2 Un sistema DM especial para manejar señales de la forma $f(t) = t \exp(-kt)u(t)$ utiliza una frecuencia de muestreo de $f_s = (10k)^{-1}$. Determine el máximo tamaño de paso a arriba del cual se presenta una sobrecarga de la pendiente.

9.7.3 Se diseña un sistema DM para una señal pasabajas con ancho de banda de 3 kHz (suponga una respuesta espectral plana). La máxima tensión de entrada pico a pico es de 2 V. Si la mejora en la S/N en la demodulación es de 30 dB, calcule

a) la frecuencia de muestreo necesaria, f_s;

b) el tamaño de paso a;

c) la razón $af_s/(bf_m)$ [véase Fig. 9.16].

✓ **9.7.4** Escriba un programa para el sistema DM mostrado en la figura 9.15(a). Sea la entrada $f(t) = \text{sen}\ 2\pi t$ y utilice espaciamientos de 0.05 s. Ejecute su programa y grafique tanto la $f(t)$ como la salida del acumulador para un tamaño de paso de a) 0.10; b) 0.20; c) 0.40.

✓ **9.7.5** Convierta el sistema DM del problema 9.7.4 en un sistema DPCM de dos bits añadiendo la siguiente afirmación en el punto apropiado: "Si la magnitud de la diferencia es mayor que el tamaño del paso, doble el tamaño del paso". Repita el problema 9.7.4 para este sistema, con espaciamientos entre muestras de 0.10 s.

★ **9.8.1** Modifique los resultados de la sección 9.8, suponiendo que las ganancias de todos los repetidores no son iguales.

★ **9.8.2** a) Calcule la probabilidad neta de error en un sistema de transmisión que utiliza dos repetidores analógicos, suponiendo ruido gaussiano aditivo con media cero y probabilidad de error de 1×10^{-8} para cada repetidor.

b) Suponga que un repetidor tiene 1 dB más de ruido [en las condiciones de la parte (a)]. ¿Cuál es la probabilidad de error resultante en esta condición?

★ **9.8.3** Las señales polares binarias NRZ se transmiten a través de una trayectoria de transmisión que utiliza cuatro repetidores regenerativos. Suponga ruido gaussiano aditivo con valor medio cero y probabilidad de error de 1×10^{-8} para cada repetidor. Calcule

a) la probabilidad neta de error;

b) la probabilidad neta de error si se utilizaran repetidores analógicos;

c) la potencia adicional transmitida, en dB, necesaria en cada repetidor analógico para obtener la misma probabilidad neta de error que en el sistema que utiliza repetidores regenerativos.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

★ **9.9.1** Determine la densidad espectral de potencia de las siguientes transmisiones para unos y ceros equiprobables: a) el sistema binario del problema 9.5.3(a); b) el sistema binario del problema 9.5.3(b).

★ **9.9.2** Suponga que cierto sistema binario transmite la señal del problema 9.5.3(a) para un uno y una amplitud fija $-A/2$ en $(0, T)$ para un cero. Suponga unos y ceros equiprobables.

a) ¿Esperaría impulsos en la densidad espectral de potencia de la señal de datos transmitida? Explique.

b) Determine la densidad espectral de potencia.

★ **9.9.3** Se envía la señal $f_1(t)$ en $(0, T)$ para señalizar un uno y $f_2(t)$ para señalizar un cero. Determine la densidad espectral de potencia, suponiendo unos y ceros equiprobables, si $f_1(t) = A$ y $f_2(t) = \gamma A$, donde $0 \leq \gamma < 1$.

★ **9.9.4** Repita el problema 9.9.3 si

a) $f_1(t) = A \operatorname{sen}^2(\pi t/T)$, $f_2(t) = 0$.

b) $f_1(t) = A \operatorname{sen}^2(\pi t/T)$, $f_2(t) = \neg f_1(t)$.

9.10.1 a) Iniciando con el diagrama de bloques de la figura 9.24(a), derive la expresión de la respuesta al impulso dada en la ecuación (9.92) y verifique la gráfica mostrada en la figura 9.24(c).

b) Eliminando el retardo relativo, compare la figura 7.9(c) con la figura 9.24(b), (c) para $B_x = 1/(2T)$.

9.10.2 Derive la probabilidad neta de error para un sistema duobinario y compárelo con un sistema polar binario (véase Problema 9.5.1) con las siguientes restricciones. Ambos sistemas están optimizados para operar en presencia de ruido blanco gaussiano aditivo y con una respuesta de canal plana; esto es, $|H_C(\omega)| = 1$. Las amplitudes en el sistema duobinario son $-2A$, 0, $+2A$, los umbrales de decisión se colocan en $\pm A$, y la forma del pulso es $(1/T)h(t)$ [véase Ec. (9.92)].

9.10.3 Considere la señalización de respuesta parcial descrita por

$$y_k = x_k + 2x_{k-1} + x_{k-2}.$$

a) Dibuje un diagrama de bloques del filtro transversal necesario para construir y_k.

b) Determine la función de transferencia del filtro.

c) Determine la respuesta al impulso del filtro.

9.10.4 Utilice la secuencia de dígitos binarios del Problema 7.6.4.

a) Determine la secuencia correspondiente de dígitos duobinarios y duobinarios modificados y_k. Represente los niveles como 0, 1, 2 y -1, 0, 1, respectivamente.

b) Decodifique la y_k encontrada en la parte (a), suponiendo desconocimiento de la secuencia de entrada (x_k) con la excepción de que se puede suponer que los dos bits anteriores a esta secuencia son unos.

c) Repita la parte (b), suponiendo que se produce un error de manera que el primer $y_k = 0$ posterior a los primeros tres dígitos el receptor lo interpreta como uno. Rastree el efecto de este error en la decodificación de la señal.

d) Repita las partes (a) y (c) usando precodificación. Suponga que al precodificador se le asignan unos iniciales.

9.10.5 Investigue la regla necesaria en el receptor para utilizar la operación de precodificación $b_k = [(x_k + b_{k-1}) \text{ módulo } 3]$ en señalización duobinaria. Para una corriente de datos de entrada binarios x_k, ¿cuántos niveles se requieren para y_k?

http://libreria-universitaria.blogspot.com

9.11.1 En presencia de interferencia por trayectoria múltiple, llegan al receptor réplicas de la señal transmitida, con varias atenuaciones y retardos. En este problema, suponga que existe una sola fuente predominante de trayectoria múltiple. Si la señal transmitida en dicho sistema es $x(t)$, entonces la señal recibida (libre de ruido) $y(t)$ es

$$y(t) = x(t) + \alpha x(t - \tau_m),$$

donde α es la atenuación de la componente de trayectoria múltiple y τ_m es su retardo. Diseñe un igualador transversal (véase Fig. 9.26) para este problema particular, suponiendo que $T = \tau_m$ y $\alpha \ll 1$. [*Sugerencia*: Trabaje con funciones de transferencia.]

9.11.2 Repita el ejemplo 9.11.1, con la excepción de que $x_{-1} = 0.4$.

9.11.3 Demuestre que en las condiciones del ejercicio 9.11.1 y con $|x_{-1}| = |x_1|$, el igualador transversal de tres derivaciones proporciona (a) igualación de amplitud si $x_{-1} = x_1$, y (b) igualación de fase si $x_{-1} = -x_1$.

9.11.4 Se considera un sistema de transmisión digital para enviar datos a través de un canal que se modela como un filtro pasabajas con función de transferencia

$$H_C(\omega) = A(1 + a\omega^2)e^{-j\omega t_0} \text{ rect } [\omega/(2W)].$$

La señal transmitida $f(t)$ se aproxima por medio de una señal trapezoidal mostrada en la figura P-9.11.4. Diseñe un igualador transversal de tres derivaciones para forzar un cero a cada lado del principal pulso de respuesta. Se sabe que $t_r = T/8$ y que $|H_C(W)|/|H_C(0)|$ es -3 dB.

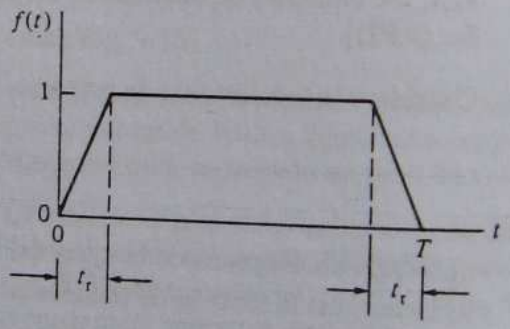


Figura P-9.11.4.

✓ **9.11.5** Determine los coeficientes de un filtro igualador transversal de cinco derivaciones que fuerce dos ceros a cada lado del pulso principal de respuesta. Los valores de muestra de la señal de pulso distorsionada son: $x_{-4} = -0.02$, $x_{-3} = 0.05$, $x_{-2} = -0.1$, $x_{-1} = 0.4$, $x_0 = 1.0$, $x_1 = -0.2$, $x_2 = 0.1$, $x_3 = -0.1$, $x_4 = 0.05$, $x_k = 0$ para $|k| > 4$. Por conveniencia en la solución numérica, utilice la ecuación (9.109) en la forma matricial $[x][a] = [y]$, donde $[x]$ es la matriz $(2N + 1) \times (2N + 1)$ de respuesta del canal, $[a]$ es la matriz columna de la ganancia de las derivaciones, y $[y]$ es una matriz columna que satisface la ecuación (9.108). Encuentre $[x]^{-1}$ usando métodos numéricos y note que las ganancias de las derivaciones están dadas por la columna central de $[x]^{-1}$ (¿por qué?).

9.12.1 Repita el ejemplo 9.12.1 para $P_\epsilon = 1 \times 10^{-6}$ y compare sus resultados con los de la tabla 9.5.

9.12.2 Repita el ejercicio 9.12.1 para $P_\epsilon = 1 \times 10^{-6}$ y compare sus resultados con los de la tabla 9.7.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

9.12.3 Diseñe un sistema de señalización M-aria para transmitir 9600 bps en un canal de 3.2 kHz, y calcule la probabilidad de error de bit suponiendo una codificación de niveles de Gray. Utilice formas de pulso de Nyquist y suponga ruido blanco gaussiano aditivo con densidad espectral de potencia bilateral de 0.5×10^{-10} W/Hz. Las pérdidas esperadas son de 30 dB, y se puede utilizar 0 dB como máximo nivel de potencia pico de salida en el transmisor.

9.12.4 Para la ecuación (9.123) se supuso que todos los niveles eran equiprobables. Investigue el efecto en P_ϵ si los niveles a $\pm 3A/2$ fueran más probables que los dos a $\pm A/2$, y compare sus resultados con la ecuación (9.125). [*Sugerencia*: Puede ser útil tomar en cuenta la regla de Leibnitz en cálculo integral.]

★ **9.13.1** La matriz de verificación de paridad para un código de repetición con símbolos de código 000 y 111 es

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Demuestre que se satisface la ecuación (9.135).

b) Demuestre, por medio de un ejemplo, que este código de repetición corrige errores simples. ¿Es congruente esta conclusión con la ecuación (7.42)?

★ **9.13.2** Explique la razón por la que no es posible una columna de sólo ceros en la matriz de verificación de paridad $[H]$.

★ **9.13.3** Encuentre todas las posibles palabras de código en el código de verificación de paridad que tiene la matriz de verificación de paridad del ejemplo 9.13.1.

★ **9.13.4** a) Usando registros de desplazamiento y sumadores módulo 2, dibuje un diagrama para un decodificador para detección de error del código de Hamming (7, 4) del ejemplo 9.13.1.

b) Esta sección hace énfasis en los aspectos de *decodificación* de los códigos de bloque. Para generar un código de bloque (n, k), se define una matriz generadora $[G]=[I_k|P]$, donde $[I_k]$ es la matriz identidad $k \times k$ y $[P]$ es una submatriz $k \times r$ de dígitos binarios que forma palabras de código binarias distintas de aquéllas ya presentes en $[I_k]$. La matriz identidad $[I_k]$ en $[G]$ se utiliza para reproducir una palabra de código de mensaje para los primeros k bits y la submatriz $[P]$ genera los dígitos de verificación. La matriz de verificación de paridad utilizada en la decodificación está dada por $[H] = [P^T|I_r]$, donde I_r es la matriz identidad $r \times r$ y $[P]^T$ es la transpuesta de $[P]$. Encuentre la matriz generadora $[G]$ para el código de Hamming (7, 4) del ejemplo 9.13.1.

c) Dibuje un diagrama de bloques para el codificador de la parte (b).

★ **9.13.5** Un código de Hamming ($r \geq 3$) mantiene una distancia 3 entre palabras de código, y por tanto se puede utilizar para corrección de errores únicos y detección de errores dobles. Suponga que una matriz de verificación de paridad para un código de Hamming (15, 11) se arregla de manera que las palabras binarias de cada columna decrecen en valor numérico de izquierda a derecha, excepto que las que tienen un solo uno se colocan en la matriz identidad 4×4. Demuestre que las especificaciones generales anteriores son ciertas para este caso.

★ **9.13.6** Se construye un codificador convolucional dado utilizando registros de desplazamiento y sumadores módulo 2. Las ecuaciones para las salidas de los sumadores son:

$$v_1 = S_1 \oplus S_3, \; v_2 = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3.$$

a) Dibuje un diagrama de bloques del codificador.

b) Determine los bits de salida para las condiciones de entrada del ejercicio 9.13.1, pero aplicadas a este codificador.

★ **9.13.7** Un codificador convolucional dado se construye utilizando registros de desplazamiento y sumadores módulo 2. Las ecuaciones para la salida de los sumadores sean:

$$v_1 = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3, \qquad v_2 = S_1, \qquad v_3 = S_1 \oplus S_2.$$

Repita el ejercicio 9.13.1 para este codificador.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

★ **9.13.8** Se sugiere un codificador convolucional de tasa 1/3 alternativo al del problema 9.13.7, en el que las ecuaciones para las salidas de los sumadores sean: $v_1 = S_1 \oplus S_2$, $v_2 = S_2 \oplus S_3$, $v_3 = S_2 \oplus S_3$.

a) Dibuje un diagrama de bloques para cada codificador.

b) Para comparar los codificadores, prepare el diagrama de un árbol de código, como el que se muestra en la figura P-9.13.8, para cada codificador. Los números binarios (0, 1) del árbol muestran las entradas; coloque en cada paréntesis el código de tres bits generado, conforme progresa el codificador (suponga que los registros de desplazamiento se inician con ceros).

c) Con base en los resultados de la parte (b), ¿cuál codificador preferiría usar en un sistema de comunicación, y por qué?

d) Si la secuencia de salida 101010 se recibe en presencia de ruido aditivo, ¿cuál es la secuencia de entrada más probable que fue enviada por el codificador del Problema 9.13.7? Explique su respuesta.

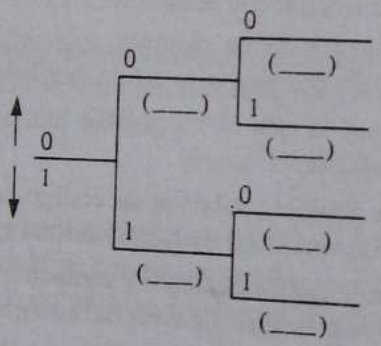


Figura P-9.13.8.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

PROBLEMAS DE DISEÑO

Problema de diseño

9.1 Diseño de un canal visual para un satélite geoestacionario

Este problema es para el diseño en banda base de un subsistema de satélite que detecta y transmite información visual en patrones grupales desde un satélite geoestacionario en órbita. Sus parámetros son los típicos para la serie de satélites (GOES, *Geoestationary Orbiting Environmental Satellite*) en uso durante los años ochenta.

Este satélite cilíndrico se estabiliza por rotación (p. ej., véase Ref. 2 del Cap. 4) y gira a 100 revoluciones por minuto; el eje de giro está alineado con el eje de rotación de la Tierra. El sensor elegido para los canales visuales es el tubo fotomultiplicador (PMT), que brinda una tensión de salida proporcional a la intensidad de la luz de entrada. Un juego de lentes montado en forma perpendicular al eje de giro del satélite y un espejo detrás de éste, accionado por un motor de pasos, enfoca la luz en un arreglo lineal de ocho PMT. Estos PMT sensan ocho trayectorias paralelas de datos visuales. Cuando las lentes apuntan hacia afuera de la Tierra, el motor de pasos altera la inclinación del espejo para el siguiente barrido. De esta modo, el satélite rastrea el hemisferio en una progresión sistemática de polo a polo, y entonces el espejo se coloca en la posición inicial y se repite otro patrón de rastreo.

Las salidas de los PMT están cuantificadas a 64 niveles, usando compansión de ley cuadrática [véase Problema 9.4.6], y multiplexión en tiempo. La resolución espacial deseada de cada PMT es de 0.5 por 0.5 millas en el punto de subsatélite (es decir, el punto en la superficie terrestre en una línea que une la posición del satélite y el centro de la Tierra).

Diseñe este subsistema del satélite. La probabilidad de error para el sistema es de 1×10^{-6}. No interesan aquí los sistemas de transmisión y recepción; base su diseño en la utilización de señales de datos binarios polares NRZ en banda base. Más adelante se listan varios puntos de interés para el diseño del proyecto. Para las partes a-c, suponga que no existen facilidades para almacenar datos en el satélite. Permita un 25% por encima de la velocidad de Nyquist para el muestreo. Especifique cualquier suposición que haga.

a) Prepare diagramas de tiempo y grafique la característica de compansión. Determine el ancho de banda mínimo necesario. ¿Cuánto tiempo tomará un rastreo completo del hemisferio?

b) Para casos en los que la estimación de la S/N del enlace pueda volverse marginal, es conveniente tener algún medio para indicar al satélite que lleve a cabo el rastreo con una resolución reducida. Investigue la posibilidad de incluir en su diseño varios modos de "respaldo" por combinación de canales para proporcionar resoluciones de rastreo de 1, 2 y 4 millas. Prepare diagramas de tiempo y estime los compromisos relativos de S/N.

c) Investigue los requisitos y los posibles beneficios de usar un código corrector de errores únicos en este sistema.

d) Sólo se utiliza una parte de la revolución del satélite para tomar datos. Investigue los requisitos para el almacenamiento de datos y su lectura si el satélite tuviera que transmitir datos a estaciones terrestres todo el tiempo, pero en un ancho de banda reducido.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

CAPÍTULO

10 Modulación digital

En el capítulo anterior varios aspectos de la transmisión digital de información a frecuencias en banda base. Para sistemas de comunciación digital que emplean canales pasabanda, es conveniente modular una señal portadora con la corriente de datos digitales antes de la transmisión. Tres formas básicas de modulación digital, que corresponden a AM, FM y PM, se conocen como *conmutación de amplitud* (ASK, *amplitude-shift keying*), *conmutación de frecuencia* (FSK, *frequency-shift keying*) y *conmutación de fase* (PSK, *phase-shift keying*). En este capítulo, se considera en forma breve cada uno de estos métodos de modulación desde la perspectiva de sus ventajas en la probabilidad de error y la eficiencia del ancho de banda. En la primera parte de este capítulo se hace énfasis en sistemas binarios. Al final del capítulo se describen variantes de estos tres métodos básicos de modulación, algunos con más de dos posibles estados de señalización. Se expone el concepto de espectro expandido, en el que el ancho de banda se expande a propósito antes de la transmisión y luego se devuelve a su valor original en recepción. El capítulo termina con dos secciones que analizan representaciones y consideraciones más generales de la señalización.

10.1 CONMUTACIÓN DE AMPLITUD (ASK)

En la conmutación de amplitud, la amplitud de una señal portadora de alta frecuencia se conmuta entre dos o más valores en respuesta al código PCM. Para el caso binario, la elección usual es la *conmutación encendido-apagado* (que a veces se abrevia OOK, *on-off keying*). La señal modulada en amplitud resultante consta de pulsos de RF, llamados *marcas*, que representan unos binarios, y *espacios* que representan ceros binarios. En la figura 10.1 se muestra una señal ASK para un código PCM dado (el mismo que se utilizará en la figura 7.35). Como en AM, el ancho de banda en banda base se duplica en ASK.

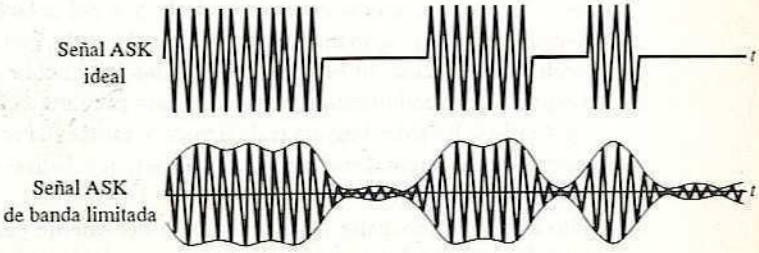


Figura 10.1 Señales binarias ASK.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La señal ASK para un pulso (es decir, un uno binario) se puede escribir como

$$\phi(t) = \begin{cases} A \operatorname{sen} \omega_c t & 0 < t \leq T, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{10.1}$$

La respuesta al impulso del filtro acoplado para detección óptima de esta señal ASK en presencia de ruido blanco es, excepto por una constante arbitraria,

$$h(t) = \phi(T - t)\,.$$

La salida de filtro acoplado para la entrada (sin ruido) $\phi(t)$ es

$$\begin{aligned} y(t) &= \phi(t) \circledast h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau)\phi(T - t + \tau)\, d\tau \\ &= r_\phi(T - t)\,, \end{aligned} \tag{10.2}$$

donde $r_\phi(t)$ es la función de autocorrelación en el tiempo para la señal de energía finita $\phi(t)$ [véase Ec. (4.43)]. Entonces, el tiempo óptimo de decisión es para $t = T$; así

$$y(T) = r_\phi(0) = E\,. \tag{10.3}$$

En la figura 10.2 se muestra un diagrama de la salida de filtro acoplado. Usando la ecuación (10.1), se encuentra que la señal de energía es

$$E = \int_0^T A^2 \operatorname{sen}^2 \omega_c t\, dt = A^2 T/2\,. \tag{10.4}$$

El receptor debe tomar una decisión en $t = T$ basado en las dos posibilidades, $y(t) = n_o(T)$ y $y(T) = E + n_o(T)$. Para unos y ceros con igual probabilidad en la fuente y ruido con una función de densidad de probabilidad simétrica, el umbral de decisión óptimo se fija en $E/2$. Por tanto, el cálculo de la probabilidad neta de error se reduce a la del sistema encendido-apagado en banda base. Para ruido con distribución gaussiana, se encuentra que esto da [véase Ec. (9.49)]

$$P_\epsilon = Q\left(\sqrt{\frac{E}{2\eta}}\right). \tag{10.5}$$

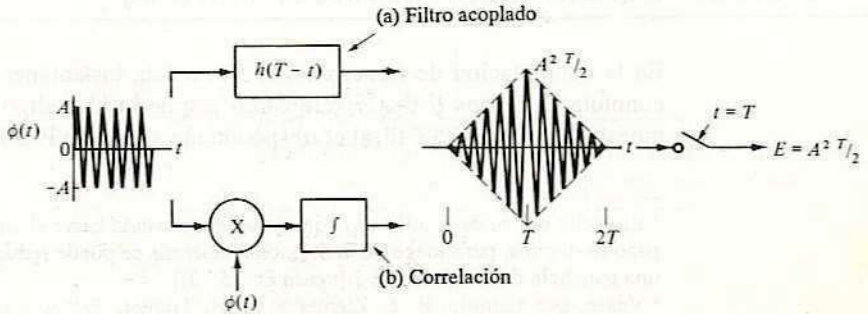


Figura 10.2 Detección de señales ASK con filtro acoplado.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Para llevar a cabo comparaciones con otros sistemas, la probabilidad de error se expresa en términos del promedio de energía de la señal por bit, $E_{\text{prom}} = ST$, por lo que la ecuación (10.5) se puede reescribir como

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_{\text{avg}}}{\eta}}\right). \tag{10.6}$$

La potencia promedio de la señal es $S = (1/2)(A^2/2)$; como antes, $N = \eta B$, y si se supone un muestreo de Nyquist, $B = 1/(2T)$,† por lo que se puede reescribir la ecuación (10.5) en términos de la razón señal a ruido promedio:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{S}{2N}}\right). \tag{10.7}$$

De este resultado, se concluye que el sistema ASK equivale a un sistema encendido-apagado en banda base en términos de la razón señal a ruido promedio necesaria para una probabilidad de error dada. Nótese, sin embargo, que la razón señal a ruido *pico* necesaria aumenta por un factor de 2 (es decir, 3 dB).

La detección por filtro acoplado de la ASK es, en esencia, una detección síncrona, como se muestra en la figura 10.2(b). Se puede utilizar la detección de envolvente, que es mucho más simple de construir, pero las matemáticas necesarias para derivar la probabilidad neta de error es más complicada y no se considerará aquí. Para unos y ceros equiprobables, el resultado es‡

$$P_e = \frac{1}{2}\exp\frac{-E}{4\eta} + \frac{1}{2}Q\left(\sqrt{\frac{E}{2\eta}}\right). \tag{10.8}$$

Se ve que para $P_e < 10^{-4}$, las razones señal a ruido son lo bastante altas para que sólo exista un pérdida de 1 dB (o menos) por la utilización del detector de envolvente.

La densidad espectral de potencia de la ASK se centra en ω_c y tiene una forma idéntica a la señal encendido-apagado en banda base correspondiente. Como el ancho de banda se duplicó en el proceso de modulación, la eficiencia teórica máxima del ancho de banda es de 1 bps/Hz. Un valor típico para los sistemas en operación es de dos a tres veces este ancho de banda.

10.2 CONMUTACIÓN DE FRECUENCIA (FSK)

En la conmutación de frecuencia, la frecuencia instantánea de la señal portadora se conmuta entre dos (o más) valores en respuesta al código PCM. La figura 10.3(a) muestra una señal FSK ideal correspondiente al código PCM binario de la figura 7.35.

† El ancho de banda B utilizado aquí se refiere a banda base: el ancho de banda en la banda de paso se duplica, pero luego de la detección síncrona se puede reducir de nuevo, proporcionando una ganancia de detección de 2 [véase Ec. (5.73)].

‡ Véase, por ejemplo, R. E. Ziemer y W. H. Tranter, *Principles of Communication Systems, Modulation, and Noise*, 2a. ed., Boston, Houghton Mifflin, 1985, págs. 383-386.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Esto sugiere que se puede considerar a la señal FSK como si estuviera compuesta de dos señales ASK con diferentes frecuencias portadoras, como se muestra en la figura 10.3(b). Por tanto, para transmitir cualquiera de los símbolos binarios, se elige entre las dos señales:

$$\phi_1(t) = \begin{cases} A \operatorname{sen} m\omega_0 t & 0 < t \leq T, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \tag{10.9a}$$

$$\phi_2(t) = \begin{cases} A \operatorname{sen} n\omega_0 t & 0 < t \leq T, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{10.9b}$$

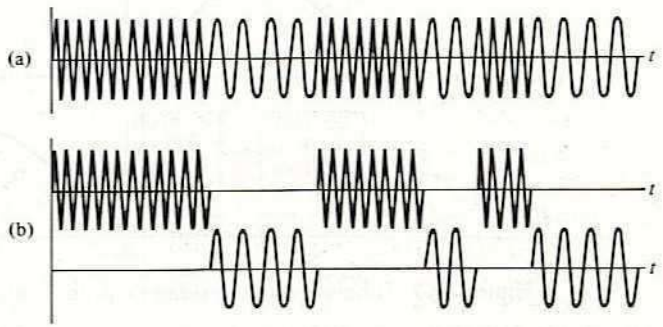


Figura 10.3 (a) Señal FSK ideal y (b) su descomposición en dos señales ASK.

Las dos señales recibidas ahora son diferentes, por lo que se utilizan dos filtros acoplados, uno para cada señal. En la figura 10.4 se muestran dos posibles receptores con filtro acoplado para la FSK.

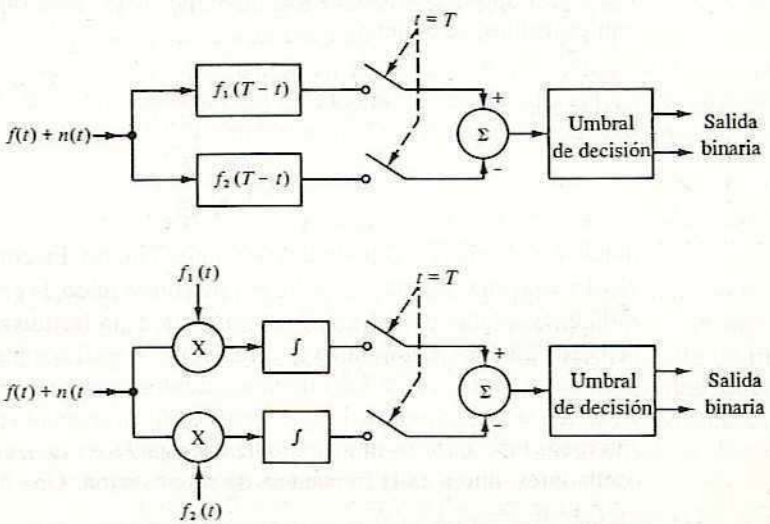


Figura 10.4 Detección de señales FSK con filtro acoplado.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La energía promedio por dígito binario es

$$E = \int_0^T A^2 \operatorname{sen}^2 m\omega_0 t \, dt = A^2 T/2 . \tag{10.10}$$

Si en ausencia de ruido está presente una frecuencia de señalización, se supone que la salida de un filtro acoplado es cero y la otra salida es E.† Por el contrario, si está presente la segunda frecuencia de señalización, se intercambian las salidas y, como resultado de la resta, la salida neta es $-E$. Esto se muestra en la figura 10.5.

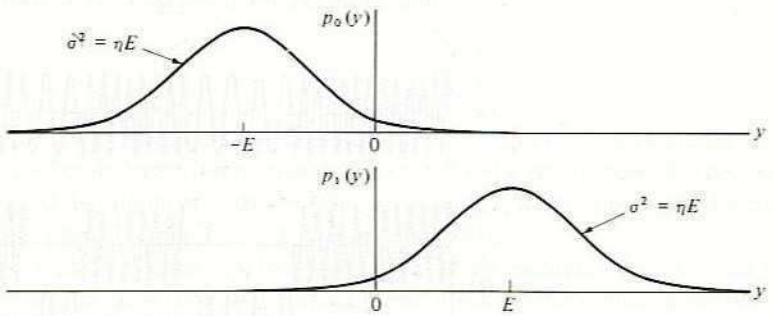


Figura 10.5 Funciones de densidad de probabilidad para señales FSK binarias.

Esto podría parecer análogo al caso polar en banda base si no fuera por el hecho de que las tensiones de ruido se restan de las salidas de los dos filtros acoplados. Si se supone que las respuestas en frecuencia de los dos filtros acoplados no se traslapan, las tensiones de ruido en la salida son estadísticamente independientes y, por tanto, se suman en potencia (cuadrática media). Si los anchos de banda de los dos filtros son iguales (el caso usual), simplemente se duplica la varianza de $\sigma_n^2 = \eta E/2$ a $\sigma_n^2 = \eta E$ (véase Fig. 10.5). El resto del análisis es igual que antes. Para ruido gaussiano y unos y ceros equiprobables, se obtiene

$$\begin{aligned} P_e &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta E}} e^{-(y+E)^2/(2\eta E)} \, dy \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{E}{\eta}}\right), \end{aligned} \tag{10.11}$$

donde E es la energía (promedio) por dígito binario. En consecuencia, se concluye que, con base en una energía promedio por bit contra ruido, la probabilidad neta de error para FSK es igual que para ASK. Por otra parte, para las mismas necesidades de potencia pico, la FSK tiene una ventaja de 3 dB sobre la ASK porque esta última no se encuentra presente durante la mitad del tiempo aproximadamente.

Como se observó antes, la detección con filtro acoplado es, en realidad, una detección síncrona. Esto implica una sincronización tanto en fase como en frecuencia para dos osciladores, uno a cada frecuencia de señalización. Una forma de realizar esto es por

† Esto implica ortogonalidad en (0, T); problema 10.2.4.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

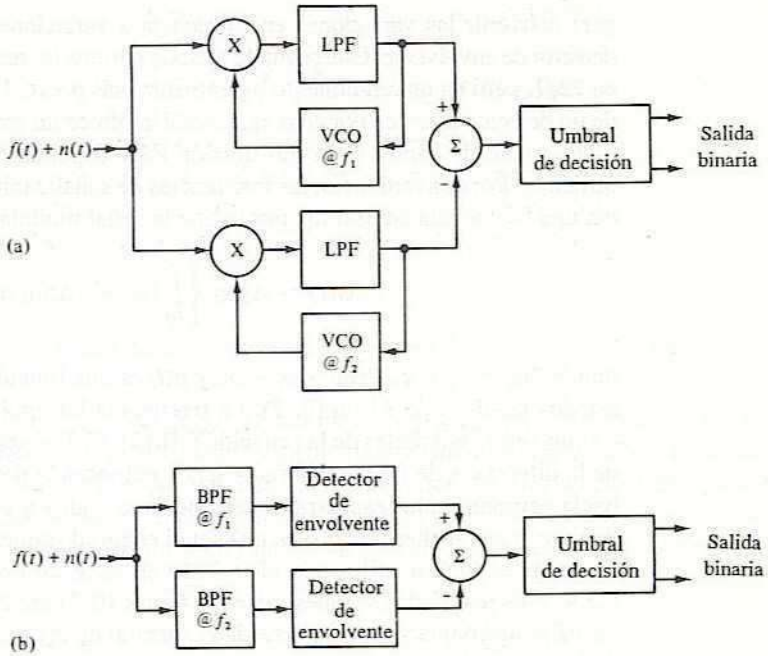


Figura 10.6 Ejemplos de sistemas de detección de FSK (a) coherentes y (b) no coherentes.

medio de lazos de amarre de fase, como se muestra en la figura 10.6(a). El intervalo de frecuencia de cada lazo está restringido y el filtro pasabajas es lo bastante angosto para que los osciladores controlados por tensión (VCO) no cambien de manera apreciable su frecuencia durante una pausa. Un código de Manchester o de fase dividida es adecuado para este tipo de operación. A menudo se utiliza y ajusta un lazo de amarre de fase de modo que siga a la frecuencia de entrada.

Una forma común de construir un receptor FSK es utilizar sólo la respuesta en magnitud de los filtros acoplados, lo cual proporciona el receptor FSK no coherente de la figura 10.6(b). Aquí se omite el análisis del detector de envolvente, excepto el resultado†

$$P_\epsilon = \frac{1}{2} \exp \frac{-E}{2\eta}. \tag{10.12}$$

La FSK no coherente tiene un costo en la S/N no mayor que 1 dB con respecto a la FSK ortogonal con detección coherente para las tasas de error importantes. Es una elección común para sistemas en operación. Con este método, el espaciamiento de frecuencia —para prevenir traslapos significativos en las bandas de paso de los dos filtros— debe ser de al menos $2\Delta fT \geq 1$, donde $2\Delta f$ es la diferencia entre las dos frecuencias utilizadas y T es la duración del símbolo. Otro método posible es la utilización de un discriminador

† A. B. Carlson, *Communication Systems: An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication*, 3a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1986, pág. 538.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

para convertir las variaciones en frecuencia a variaciones en amplitud, seguidas de un detector de envolvente. Este segundo método elimina las restricciones inherentes al primero en $2\Delta fT$, pero da un rendimiento ligeramente más pobre. Un método más es la utilización de un detector de cruce por cero, que también ofrece un rendimiento un poco más pobre.

El ancho de banda de la transmisión FSK depende de la separación de frecuencia utilizada. Por conveniencia, las frecuencias de señalización ω_1, ω_2 tienen como referencia una frecuencia central ω_c, por lo que la señal modulada se puede escribir como

$$\phi(t) = A \operatorname{sen} \left\{ \int_0^t [\omega_c + (\Delta\omega) p(t)]\, dt \right\}, \tag{10.13}$$

donde $2\omega_c = \omega_2 + \omega_1$, $2\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, y $p(t)$ es una función de conmutación binaria con estados posibles de ± 1 en $(0, T)$. La frecuencia instantánea de $\phi(t)$ es simplemente el término entre corchetes de la ecuación (10.13). Si T es grande comparado con el inverso de la diferencia de frecuencia $(\omega_2 - \omega_1)^{-1}$, entonces la densidad espectral de $\phi(t)$ tiende hacia agrupamientos espectrales cercanos a $\omega = \omega_1$ y a $\omega = \omega_2$. Por ejemplo, en el caso de unos y ceros alternos, $p(t)$ es una señal cuadrada simétrica. En este caso, el espectro se puede encontrar utilizando el método en serie de Fourier descrito en el problema 6.3.9, y los resultados se muestran en la figura 10.7 para $2\Delta\omega T \gg 1$. Claro que, conforme $2\Delta\omega T$ se aproxima a cero, la densidad espectral de $\phi(t)$ se aproxima a la de una senoidal de frecuencia $\omega = \omega_c$.

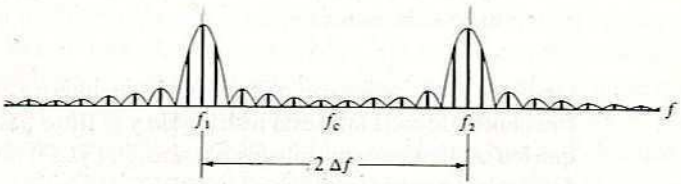


Figura 10.7 Espectro de la magnitud de una señal FSK periódica para $2\,\Delta\omega T \gg 1$ (frecuencias positivas).

¿Cuál es la separación óptima de frecuencia para la detección de FSK? Suponiendo que $\omega_c \gg \Delta\omega$ e ignorando posibles efectos transitorios, la diferencia pasabajas en las salidas de los detectores síncronos (véase Fig. 10.4) es proporcional a

$$\int_0^T \{\operatorname{sen}[(\omega_c + \Delta\omega)t] - \operatorname{sen}[(\omega_c - \Delta\omega)t]\}\{\operatorname{sen}[(\omega_c + \Delta\omega)t]\}\, dt$$

$$= \frac{T}{2}\left[1 - \frac{\operatorname{sen}(2\,\Delta\omega T)}{(2\,\Delta\omega T)} + \frac{\operatorname{sen}(2\omega_c T)}{(2\omega_c T)}\right]. \tag{10.14}$$

Para $\omega_c T \gg 2\pi$, la ecuación (10.14) se puede reescribir e incorporar en la ecuación (10.11) como

$$P_e = Q(\sqrt{[1 - \operatorname{Sa}(2\,\Delta\omega T)]E/\eta}\,). \tag{10.15}$$

El factor encerrado entre corchetes de la ecuación (10.15) se grafica en la figura 10.8. De estos resultados, se observa que $2\Delta fT = n/2$, con n entero, si $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ son ortogonales en $(0, T)$. Por tanto, la mínima separación de frecuencia es de medio ciclo por intervalo

http://libreria-universitaria.blogspot.com

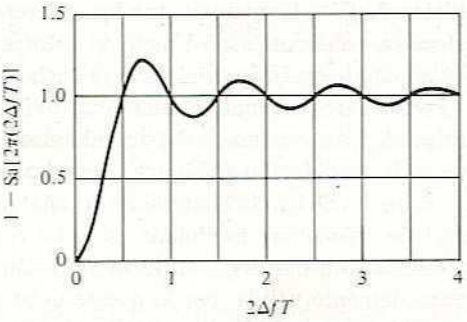


Figura 10.8 Ganancia de detección de señal en FSK binaria.

de bit entre las dos frecuencias de señalización ω_1, ω_2 con el fin de que $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ sean ortogonales en $(0, T)$. Se puede alcanzar alguna ganancia adicional en detección (véase Fig. 10.8) si $2\Delta fT \approx 3/4$; es decir, la separación de frecuencia $2\Delta fT$ para mínima probabilidad de error requiere cerca de 3/4 de diferencia en ciclo entre ω_1 y ω_2 en $(0, T)$. Usando este valor, se encuentra que el valor entre corchetes da $[1 + 2/(3\pi)] = 1.21$, o

$$P_\epsilon = Q\left(\sqrt{1.21\frac{E}{\eta}}\right). \tag{10.16}$$

Los sistemas FSK coherentes aprovechan estos 0.8 dB extra en la S/N efectiva, pero en general se supone la condición de ortogonalidad $2\Delta fT = n/2$ (donde n es un entero) para otros sistemas, lo que da el resultado expresado en la ecuación 10.11. Cuando es posible, los sistemas FSK se diseñan para tratar de utilizar una combinación de separación de frecuencia e intervalo de señalización a fin de colocar el punto de operación del filtro acoplado en un máximo local de la gráfica mostrada en la figura 10.8 (es decir, $2\Delta fT = 3/4, 7/4, 11/4$, etc.).

La derivación de la densidad espectral de potencia de la FSK para señales de entrada aleatorias es bastante complicada.[†] No obstante, las siguientes son algunas tendencias en los resultados. Para valores bajos de $2\Delta fT$, la densidad espectral de potencia tiene un solo pico centrado en la frecuencia portadora f_c y disminuye suavemente hacia ambos lados del pico. Conforme aumenta $2\Delta fT$, el pico central en la densidad espectral de potencia disminuye y empiezan a aparecer picos cerca de las frecuencias de desviación $f_c \pm \Delta f$. Para valores aún mayores de $2\Delta fT$, la densidad espectral de potencia de la FSK tiende hacia dos grupos espectrales identificables por separado, centrados en $f_c \pm \Delta f$, como se ilustra en el espectro de línea de la figura 10.7. La densidad espectral de potencia es continua para señales de entrada binarias aleatorias, excepto porque contendrán impulsos si $2\Delta fT = m$, con m entero. Para la elección particular $2\Delta fT = 1$, 50% de la potencia total en la señal FSK se halla en componentes de línea a las dos frecuencias transmitidas, por lo que esta opción suele evitarse para prevenir posibles interferencias entre canales. Los sistemas proyectados para receptores menos costosos no coherentes

[†] Véase, por ejemplo, R. W. Lucky, J. Salz y E. J. Weldon Jr., *Principles of Data Communications*, Nueva York, McGraw-Hill, 1968, Cap. 8.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

utilizan $2\Delta fT > 1$, mientras que los sistemas FSK que se proyectan en principio para detección coherente usan a menudo valores en el intervalo $\frac{1}{2} < 2\Delta fT < 1$ para obtener cierta ventaja en S/N y minimizar el ancho de banda necesario.

Podría parecer tentador tratar de aproximar el ancho de banda requerido para la FSK utilizando las aproximaciones descubiertas en la modulación de frecuencia. Recuérdese que en la modulación analógica, el ancho de banda de la señal modulada no es menor que el ancho de banda bilateral de la señal moduladora y que el ancho de banda de una señal de frecuencia modulada es igual o mayor que el de una señal de amplitud modulada. Sin embargo, en la modulación digital ninguna de estas conclusiones es necesariamente válida, por lo que se debe ser cauto al aproximar el ancho de banda requerido para la FSK. Para $2\Delta fT > 1$, se puede obtener una aproximación burda del ancho de banda utilizando la regla de Carson con $f_m = 1/T$. Sin embargo, para $2\Delta fT < 1$, el ancho de banda requerido, aunque siempre será mayor que $2\Delta f$, puede ser menor que el ancho de banda bilateral de la señal moduladora. Éstos son anchos de banda anteriores a la detección. El ancho de banda posterior a la detección puede estrecharse hasta el orden de $1/T$ (como se supuso en el receptor de filtro acoplado).

En la figura 10.9 se muestran los resultados de algunas mediciones promediadas de un analizador de espectro para FSK binaria con unos y ceros equiprobables. Nótese que la regla de Carson para el ancho de banda trabaja más o menos bien para un ancho de banda con un contenido del 90% de la potencia, excepto para valores bajos de ΔfT, aunque las fronteras no están tan bien definidas como en la FM senoidal. Por tanto, si $\Delta f \approx 1/T$, entonces una aproximación para el ancho de banda de la FSK con un contenido de 90% de potencia es $B \approx 4/T$.

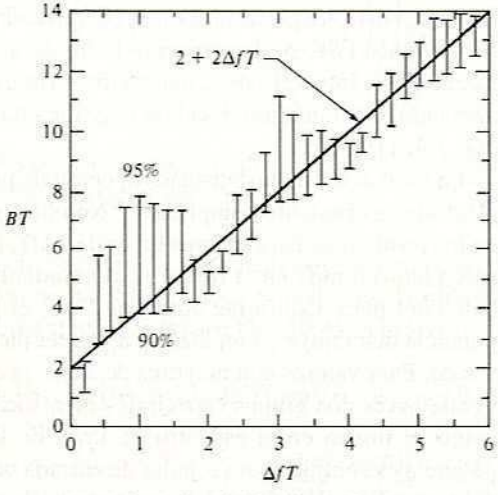


Figura 10.9 Aproximación para el ancho de banda de la FSK con un contenido de potencia de 90 - 95%.

Como es relativamente eficiente en términos de las necesidades de potencia pico y también relativamente fácil de construir, la FSK se utiliza en casi todo el mundo para modems de baja velocidad. Para la señalización binaria de hasta 300 bps en los canales telefónicos comerciales, las frecuencias de transmisión que se eligen en general son de

http://libreria-universitaria.blogspot.com

1070, 1270 Hz y de 2025, 2225 Hz. El uso de dos pares de frecuencias permite la operación dúplex completa en un canal telefónico. Para modems que operan a 1200 bps en canales telefónicos comerciales, las frecuencias de transmisión son de 1200, 2200 Hz y sólo pueden transmitir en modo semidúplex. Los modems FSK destinados a la transmisión de datos hasta de 1800 bps se utilizan en ocasiones, pero en general requieren líneas telefónicas condicionadas.

EJEMPLO 10.2.1

Se transmiten datos binarios NRZ a 300 bps a través de un canal telefónico usando FSK con frecuencias de transmisión de 2025, 2225 Hz.

a) Suponiendo un ancho de banda de 800 Hz centrado en la portadora, calcule la probabilidad de error mínima si la razón señal a ruido promedio es de 8 dB;
b) Repita para $S/N = 7$ dB.

Solución a) Se tiene $f_c = 2125$ Hz, $2\Delta f = 200$ Hz y $T = 1/300$ s. Como $\omega_c T > 1$ y $\omega_c > \Delta\omega$, se puede usar la ecuación (10.15); el término entre corchetes de esta ecuación da

$$1 - \mathrm{Sa}\left(2\pi \frac{200}{300}\right) = 1.21 .$$

Además, se tiene

$$\frac{S}{800\eta} = 10^{0.8},$$

de modo que

$$P_\epsilon = Q\left(\sqrt{1.21\frac{ST}{\eta}}\right),$$

$$P_\epsilon = Q(4.51) = 3.3 \times 10^{-6}.$$

b) Cambiando S/N a $10^{0.7}$, los cálculos anteriores dan

$$P_\epsilon = Q(4.02) = 3.0 \times 10^{-5}.$$

La comparación de los resultados de (a) y (b) muestra que en el intervalo supuesto la probabilidad de error cambia alrededor de un orden de magnitud para un cambio de 1 dB en la S/N.

Es fácil imaginar dos osciladores que se conmutan en respuesta a una entrada binaria, pero en sistemas en operación es más frecuente la aplicación de una señal polar binaria en la entrada de un oscilador controlado por tensión (VCO), provocando que la frecuencia de la salida del oscilador varíe en respuesta a la entrada. En los tiempos de conmutación, ambos métodos tienen transiciones de fase súbitas, de magnitud aleatoria,

http://libreria-universitaria.blogspot.com

que pueden controlarse filtrando y limitando la amplitud. Una alternativa al último método es limitar en banda la entrada al VCO.

Nótese que la FSK no es realmente modulación de frecuencia y, de hecho, es más parecida a la AM (p. ej., véase Fig. 10.3). Por tanto, no produce la reducción de ruido de banda ancha asociada usualmente con la FM. Toda reducción de ruido proviene de la codificación PCM y no de la conmutación de frecuencia.

10.3 CONMUTACIÓN DE FASE (PSK)

Aunque en la característica de operación de la FSK se obtuvo una distribución simétrica con respecto a cero, no pudo obtenerse el rendimiento de probabilidad de error superior del sistema polar de banda básica. Es conveniente detenerse a examinar el problema global de la detección de la PCM binaria para adquirir cierto criterio de por qué esto es así.

El receptor óptimo para PCM binaria sólo necesita decidir sobre la diferencia entre dos posibilidades basándose en la observación en un intervalo de tiempo finito. Ahora se volverá a investigar la detección de la diferencia entre dos señales con un filtro acoplado. Primero, se hace

$$g(t) = f_1(t) - f_2(t) \qquad 0 < t \leq T, \tag{10.17}$$

donde $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son dos señales elegidas para transportar la información binaria. De la ecuación (7.50), la razón señal a ruido pico correspondiente en la salida del filtro acoplado es

$$\frac{|g_o(T)|^2}{n_o^2(t)} = \frac{2E}{\eta} = \frac{1}{\pi\eta}\int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2\, d\omega\,. \tag{10.18}$$

Del teorema de Parseval, se tiene

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\, dt\,. \tag{10.19}$$

Sustituyendo las ecuaciones (10.17) y (10.19) en la (10.18) y haciendo referencia sólo al caso real, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{g_o^2(T)}{n_o^2(t)} &= \frac{2}{\eta}\int_0^T [f_1(t) - f_2(t)]^2\, dt \\ &= \frac{2}{\eta}\left[\int_0^T f_1^2(t)\, dt + \int_0^T f_2^2(t)\, dt - 2\int_0^T f_1(t) f_2(t)\, dt\right].\end{aligned} \tag{10.20}$$

Las dos primeras integrales de la ecuación (10.20) representan la energía en $f_1(t)$ y $f_2(t)$. Ahora se fuerza a que sean iguales, de modo que

$$\int_0^T f_1^2(t)\, dt = \int_0^T f_2^2(t)\, dt \triangleq E\,. \tag{10.21}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

De la ecuación (10.20), la máxima razón señal a ruido pico para una energía dada de la señal se obtiene para la condición

$$f_2(t) = -f_1(t)\,. \tag{10.22}$$

La clase óptima de señales para las que son válidas las ecuaciones (10.21) y (10.22) se llama *antípoda*. Las dos señales que denotan a los dos posibles símbolos de información tienen la misma forma pero polaridad opuesta. Para canales lineales invariables en el tiempo, contaminados sólo por ruido blanco gaussiano aditivo, las señales antípodas son óptimas en el sentido de requerir una E/η mínima para una probabilidad de error dada.

Recuérdese que la ecuación (10.22) no es válida para la FSK [la ecuación (10.21) sí lo es] aunque sí es válida para el caso polar en banda base. Por tanto, no se obtiene el desempeño óptimo de la FSK. Por otra parte, será evidente que tanto la ecuación (10.21) como la (10.22) son válidas para el caso de la conmutación de fase (PSK).

En la conmutación de fase, la fase de la señal portadora se conmuta entre dos (o más) valores en respuesta al código PCM. Para PCM binaria, un desplazamiento de fase de 180° es una elección conveniente porque simplifica el diseño del modulador y se usa a menudo. Esta elección particular se conoce como *conmutación por inversión de fase* (PRK, *phase-reversal keying*). La señal PRK se puede escribir como

$$\phi_1(t) = A \operatorname{sen} \omega_c t, \qquad \phi_2(t) = -A \operatorname{sen} \omega_c t\,. \tag{10.23}$$

Nótese que las ecuaciones (10.21) y (10.22) se satisfacen para este tipo de modulación. En la figura 10.10 se muestra una señal PRK (véase también Fig. 7.35).

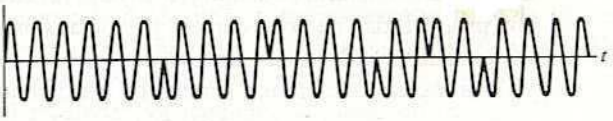


Figura 10.10 Señal PRK.

Como la elección del diseño de la señal obedece a la ecuación (10.22), se requiere sólo una función de referencia en el detector de correlación, como se muestra en la figura 10.11. Además, como la elección del diseño de la señal obedece a la ecuación (10.21), el umbral de decisión está en cero.

Con referencia al detector de correlación mostrado en la figura 10.11, si $[\phi_1(t) + n(t)]$ está presente en la entrada, la salida en $t = T$ es $y(T) = E + n_o(t)$. Por otra parte, si $[\phi_2(t) + n(t)]$ está presente en la entrada, la salida en $t = T$ es $y(T) = -E + n_o(t)$. La varianza del ruido es [véase Ec. (7.54)] $\overline{n_o^2(T)} = \eta E/2$ y las funciones de densidad de probabilidad correspondientes se muestran en la figura 10.12.

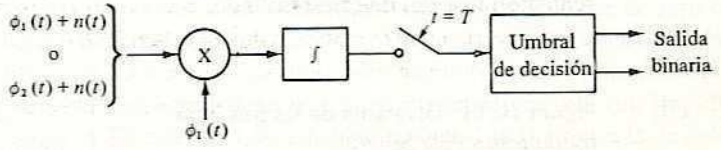


Figura 10.11 Detector de correlación para señales antípodas.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

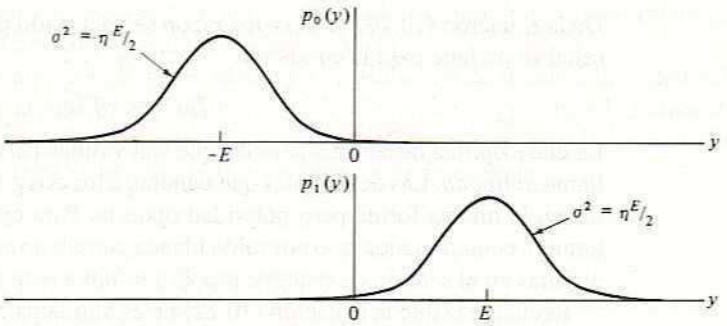


Figura 10.12 Funciones de densidad de probabilidad para PRK.

Como es evidente de la figura 10.12, el umbral de decisión óptimo se encuentra en cero. Por tanto, la probabilidad neta de error (para unos y ceros equiprobables) es

$$P_\epsilon = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi\eta E}} e^{-(y+E)^2/(\eta E)}\, dy,$$

$$P_\epsilon = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{\eta}}\right). \tag{10.24}$$

La comparación de la ecuación (10.24) con la ecuación (9.51) muestra que la PRK tiene el mismo desempeño en probabilidad de error que los sistemas polares en banda base. La comparación de la ecuación (10.24) con la ecuación (10.11) muestra que para obtener una probabilidad de error dada la potencia promedio necesaria para FSK y ASK es el doble de la necesaria para PRK.

Una representación más general de la señal para PSK binaria (BPSK) es

$$\phi(t) = A \cos [\omega_c t + \Delta\theta p(t)], \tag{10.25}$$

donde $\Delta\theta$ es la desviación de fase pico y $p(t)$ es una función de conmutación con ±1 como estados posibles. Además, es conveniente definir un índice de modulación, m, para la BPSK como

$$m = \cos \Delta\theta, \tag{10.26}$$

donde $0 \le m \le 1$. La expansión de la ecuación (10.25) usando una identidad trigonométrica da

$$\phi(t) = A \cos \omega_c t \cos [p(t) \cos^{-1} m] - A \operatorname{sen} \omega_c t \operatorname{sen} [p(t) \cos^{-1} m].$$

Tomando en cuenta el hecho de que $\cos(\pm\cos^{-1} m) = m$ y $\operatorname{sen}(\pm\cos^{-1} m) = \pm\sqrt{1-m^2}$, se obtiene

$$\phi(t) = mA \cos \omega_c t - p(t)\sqrt{1 - m^2}\, A \operatorname{sen} \omega_c t. \tag{10.27}$$

El primer término de la ecuación (10.27) es la componente portadora y el segundo término, la componente de modulación. En la figura 10.13 se muestra una representación fasorial de este resultado.

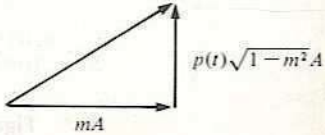


Figura 10.13 Diagrama de fasores para modulación PSK general.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La potencia promedio en la componente portadora de la señal BPSK es $m^2A^2/2$ y la potencia en la componente de modulación es $(1 - m^2)A^2/2$. Por tanto, la componente portadora tiene la fracción m^2 de la potencia total en la señal modulada. Se concluye que la componente portadora es cero en una señal PRK (es decir, uno cuando $\Delta\theta = \pi/2$) (véase también Ejer. 6.5.1).

Con el fin de determinar la probabilidad de error para la BPSK, se utiliza un detector de correlación (véase Fig. 10.11). Usando la ecuación (10.25), se encuentra que las dos posibles señales de salida en $t = T$ son

$$\int_0^T A^2 \cos(\omega_c t \pm \Delta\theta) \operatorname{sen} \omega_c t \, dt = \pm \tfrac{1}{2} A^2 T \operatorname{sen} \Delta\theta . \tag{10.28}$$

El cálculo de la probabilidad de error se realiza de la misma forma que para la PRK [véase Ec. (10.24)], excepto que las funciones de densidad de probabilidad están centradas en $\pm E \operatorname{sen} \Delta\theta$:

$$P_\epsilon = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi\eta E}} e^{-(y + E \operatorname{sen}\Delta\theta)^2/(\eta E)} dy ,$$

$$P_\epsilon = Q(\sqrt{(2E \operatorname{sen}^2 \Delta\theta)/\eta}) ,$$

$$P_\epsilon = Q(\sqrt{2E(1 - m^2)/\eta}) . \tag{10.29}$$

Por tanto, el efecto de asignar la fracción m^2 de la potencia total transmitida a la componente portadora es degradar la P_ϵ por una pérdida equivalente en la S/N de 10 $\log_{10}(1 - m^2)$ dB.

El desempeño superior de la PSK viene acompañado de la desventaja de una necesaria detección síncrona porque la información viene en la fase. Una ventaja de retener una componente portadora en la señal PSK es que se puede utilizar para la sincronización del receptor. Por ejemplo, se puede utilizar un PLL para demodular BPSK si está presente una componente portadora suficiente. Esto se hace, sin embargo, a costa de una degradación en la P_ϵ a menos que se asigne una mayor potencia transmisora. Una reducción en $\Delta\theta$ de 90° a 63° daría como resultado 1 dB de costo en la S/N para una P_ϵ fija, proporcionando sólo una $m^2 = 21\%$ de la potencia total en la componente portadora para sincronización.

La densidad espectral de potencia de la PRK se centra alrededor de ω_c y tiene una forma idéntica a la densidad espectral de la modulación de doble banda lateral. Para modulación NRZ, esta densidad espectral de potencia tiene la forma $(\operatorname{sen} x/x)^2$ [véase Sec. 9.9]

$$S_\phi(\omega) = \tfrac{1}{2} A^2 T \operatorname{Sa}^2[(\omega + \omega_c)T/2] + \tfrac{1}{2} A^2 T \operatorname{Sa}^2[(\omega - \omega_c)T/2] . \tag{10.30}$$

Aunque la densidad espectral de potencia de la señal PRK aleatoriamente modulada es mayor alrededor de la portadora, no existe una línea espectral discreta (o un impulso) a la frecuencia portadora. Por tanto, la PRK en realidad es una técnica de modulación de doble banda lateral de portadora suprimida. De hecho, el modulador de fase binario se puede construir con facilidad como un mezclador balanceado con una entrada polar binaria.

Para la BPSK con $\Delta\theta < \pi/2$, existe una componente portadora [véase Ec. (10.27)], y por tanto la densidad espectral tiene una línea espectral discreta (un impulso) en la frecuencia portadora. En este caso, la densidad espectral es análoga a la de doble banda lateral con portadora, aunque la componente portadora no necesita ser grande compa-

http://libreria-universitaria.blogspot.com

rada con las bandas laterales. La eficiencia teórica del ancho de banda de los sistemas BPSK es 1 bps/Hz. Para modulación NRZ, el ancho de banda de los primeros ceros es $2/T$, y su uso es común en el diseño de sistemas en operación.

Como la elección particular de $\Delta\theta = \pi/2$ es muy utilizada en sistemas de comunicación comerciales, es común emplear la abreviatura BPSK para referirse a este caso. Por tanto, se utilizará BPSK para referirse al caso PRK a menos que se especifique otra cosa.

EJEMPLO 10.3.1

Utilizando modulación BPSK (PRK), la serie de satélites GOES (*Geoestationary Orbiting Experimental Satellite*) transmite datos meteorológicos cuantificados de la conformación de nubes a una velocidad de 1.75 Mbps. Suponiendo que $\eta = 1.26 \times 10^{-20}$ W/Hz (que corresponde a una temperatura de ruido del sistema receptor de 229 K) y que las pérdidas totales de la trayectoria y del sistema, incluyendo la ganancia de antena, son de 144 dB (véase Tabla 4.1), calcule la mínima potencia de transmisión del satélite necesaria para una $P_e = 10^{-7}$.

Solución Usando la ecuación (10.24), se requiere

$$Q\left(\sqrt{\frac{2ST}{\eta}}\right) = 10^{-7}$$

o

$$\frac{2ST}{\eta} = (5.2)^2.$$

Multiplicando por las pérdidas esperadas, se tiene

$$2S = (5.2)^2(1.26 \times 10^{-20})(1.75 \times 10^6)(10^{14.4})$$

$$S = 75 \text{ W}.$$

Nótese que el ancho de banda del sistema no se incluye de manera explícita en este cálculo. Sin embargo, debe recordarse que los resultados suponen la utilización de un receptor de filtro acoplado. El ancho de banda de dicho receptor se adecua al de la señal. Por supuesto, si se desea, los resultados para la probabilidad de error de los sistemas BPSK se pueden reescribir en términos de la S/N notando que $E = ST$ y $N = \eta B$, por lo que

$$\frac{E}{\eta} = \left(\frac{S}{N}\right)BT,$$

donde T es la duración de un bit y B es el ancho de banda del ruido en el receptor. En muchos sistemas prácticos, el ancho de banda del ruido en el receptor es mayor que el ancho de banda bilateral de Nyquist, por lo que $BT > 1$ (a menudo se utiliza un factor de 1.2 a 1.4 en el diseño de sistemas para satélites).

EJERCICIO 10.3.1

Suponga que se presenta un error de fase en el detector de correlación para un sistema PRK de modo que la señal portadora de referencia es $A \cos(\omega_c t + \psi)$, con ψ como el

http://libreria-universitaria.blogspot.com

error de fase. (a) Derive una expresión para P_ϵ correspondiente a la ecuación (10.24) para este caso. (b) Estime el error de fase ψ necesario para reducir P_ϵ de 10^{-5} a 10^{-4}.

RESPUESTA: (a) $Q[\sqrt{(2E\ \cos^2\psi)/\eta}]$; (b) 29.4°.

Se han propuesto varios métodos para generar una señal portadora de referencia a partir de la recepción de una señal PRK. Una solución posible es primero elevar al cuadrado la señal de entrada PRK. Se determina la fase del término de doble frecuencia resultante sin importar si es 0 o $\pm\pi$ radianes. Se utiliza un divisor de frecuencia para obtener la portadora de referencia deseada, como se muestra en la figura 10.14. El divisor se puede mecanizar usando un PLL y un divisor en el lazo de retroalimentación. El lazo de elevación al cuadrado tiende a incrementar el ruido cerca de la componente portadora de doble frecuencia deseada, por lo que es necesario un BPF (filtro pasabanda) muy angosto.† Por esta razón, a menudo se utilizan lazos de fase cerrada (PLL) o lazos de fase cerrada controlados por cristal.

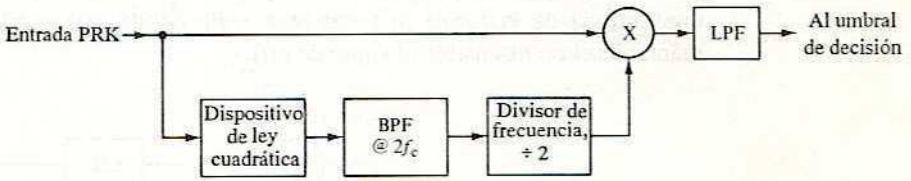


Figura 10.14 Sistema de detección PRK.

La elección de modulación NRZ es muy común en sistemas PRK. Sin embargo, si se utiliza NRZ, se debe recurrir a un sistema de recuperación de sincronía de símbolos para regenerar la frecuencia de reloj del símbolo. Un circuito de recuperación de sincronía de símbolos se puede construir en forma similar a la descrita para recuperación de portadora. El primer paso en el lazo de recuperación de sincronía de símbolos es aplicar la corriente de bits a un cirucito no lineal (p. ej., de ley cuadrática), como se muestra en la figura 10.15. Se presenta una línea espectral discreta a la tasa de símbolos

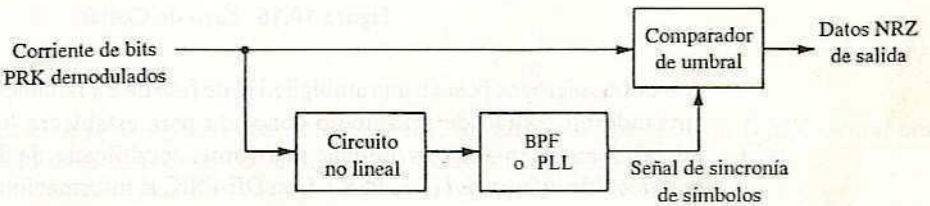


Figura 10.15 Sistema para la recuperación de sincronía de símbolos para modulación NRZ.

† El lector se beneficiaría si bosqueja la densidad espectral de potencia de una portadora en presencia de ruido blanco de banda limitada y luego lleva a cabo una convolución para ver cómo aumenta el ruido cerca de la componente portadora de doble frecuencia.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

en la salida del circuito no lineal, la cual se puede filtrar con un BPF o un PLL. Para demodular la corriente de bits se puede usar la señal de sincronía de símbolos junto con un circuito de umbral de integración y descarga.

Por desgracia, es imposible filtrar toda la potencia de ruido indeseable alrededor de la línea espectral de sincronía de símbolos deseada. Aquellas componentes espectrales indeseables cercanas a la frecuencia de reloj deseada son causa frecuente de fluctuación en la señal de sincronía de símbolos recuperada. La fluctuación provoca una degradación del desempeño porque el muestreo no se lleva a cabo en los tiempos óptimos (es decir, a la máxima apertura ocular de la corriente de bits demodulada). La fluctuación tiende a acumularse desde los repetidores regenerativos y es un problema más o menos serio en sistemas de larga distancia, colocando con frecuencia un límite superior a la distancia total de transmisión. Se pueden utilizar circuitos de eliminación de fluctuación para ayudar a mantener ésta tan baja como sea posible. Como regla práctica, la máxima fluctuación no debe exceder el 30% de la duración de símbolo.[†]

Otro método de recuperación de portadora para PRK, llamado *lazo de Costas*, utiliza detectores tanto en fase como en cuadratura para mantener un VCO centrado en la frecuencia de portadora suprimida. En la figura 10.16 se muestra un lazo de Costas. Para una entrada de la forma $p(t)\cos(\omega_0 t + \theta)$, donde $p(t) = \pm 1$, el lazo seguirá a θ manteniéndose insensible al signo de $p(t)$.

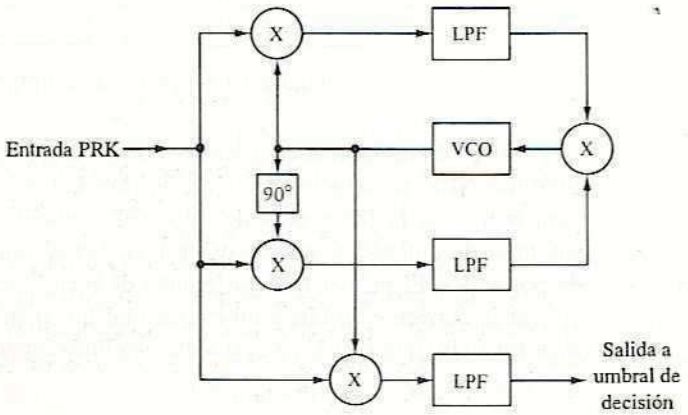


Figura 10.16 Lazo de Costas.

Ambos métodos poseen una ambigüedad de fase de $\pm\pi$ radianes que se puede resolver enviando un código de preámbulo conocido para establecer la identidad del estado inicial. Una alternativa es utilizar una forma modificada de PSK llamada *PSK de codificación diferencial* (DE-PSK). Con DE-PSK, la información se conduce por medio de las transiciones en la fase de la portadora (p. ej., sin transiciones para un espacio y 180° de transición para una marca). Como un error de decisión en el bit presente induce

[†] K. Feher, *Digital Modulation Techniques in an Interference Environment*, EMC Encyclopedia, vol. 9, Gainesville, Va., Don White Consultants, 1977, Cap. 4.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

otro error en el siguiente, el desempeño de la DE-PSK es un poco inferior al de la PSK coherente.[†] Los métodos anteriores también se pueden extender a la detección de PSK multinivel.

Otra forma de resolver el problema de la sincronización es usar una modificación de la PSK conocida como *PSK diferencial* (DPSK). En DPSK, la información se codifica utilizando las diferencias entre bits en dos intervalos de bit sucesivos, como se ilustra en la figura 10.17(a). Se genera una secuencia binaria diferencial a partir del mensaje binario de entrada en el transmisor. Esta secuencia tiene un dígito de entrada extra, que es arbitrario y que aquí se supone que es uno. Los dígitos siguientes en la codificación diferencial se determinan por la regla de que no existe cambio en el estado de salida si está presente un uno. Existe un cambio en el estado de salida si está presente un cero.

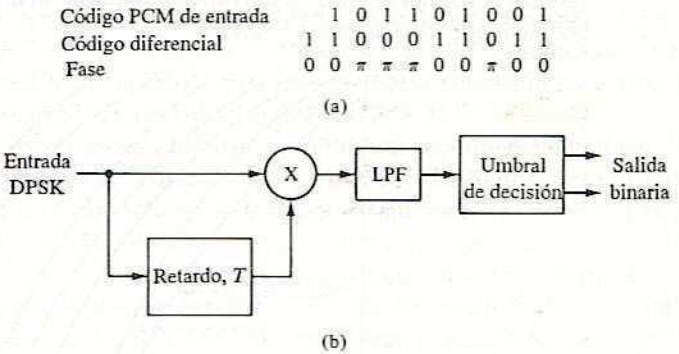

Código PCM de entrada 1 0 1 1 0 1 0 0 1
Código diferencial 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1
Fase 0 0 π π π 0 0 π 0 0
(a)
Entrada DPSK
X
LPF
Umbral de decisión
Salida binaria
Retardo, T
(b)

Figura 10.17 DPSK y su detección.[‡]

En la figura 10.17(b) se muestra un sistema para la detección de DPSK. La fase del dígito previo sirve como señal de referencia. Si las fases son iguales, resulta una salida positiva; si son diferentes, resulta una salida cero. Verificando la figura 10.17(a), se ve que el mensaje original se decodifica con exactitud. Una desventaja de la DPSK es que la velocidad de señalización se fija mediante el retardo utilizado. Además, como la determinación de un bit se hace con base en la señal recibida en dos intervalos de bit sucesivos, existe una tendencia a que los errores de bit se presenten por pares. La probabilidad de error en DPSK es[§]

$$P_e = \frac{1}{2} \exp \frac{-E}{\eta}. \tag{10.31}$$

Cuando se comparan con sistemas PSK, los sistemas que utilizan DPSK tienen una pérdida en la potencia de la señal de 1 dB (o menos) para una $P_e < 10^{-4}$.

[†] Véase, por ejemplo, W.C. Lindsey y M. K. Simon, *Telecommunication Systems Engineering*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1973, pág. 252.

[‡] Aquí la multiplicación se define como una operación de equivalencia (lógica NOR-EXCLUSIVA).

[§] Ibid., pág. 248.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

10.4 COMPARACIÓN ENTRE SISTEMAS DE MODULACIÓN DIGITAL BINARIA

Los desempeños con respecto a la probabilidad neta de error de los sistemas ASK, FSK y PSK, como se presentaron en las secciones precedentes, se grafican en la figura 10.18 sobre un intervalo de tasas de error de interés para los sistemas en operación típicos. Estos resultados se grafican contra la energía de bit E dividida entre η, la densidad espectral de potencia del ruido (unilateral). Por tanto, se supone la misma potencia pico para todos los sistemas en esta comparación (si la comparación se hiciera en términos de las necesidades de potencia promedio, entonces los esquemas ASK estarían desplazados a la izquierda 3 dB en la gráfica y requerirían más o menos la misma cantidad de potencia que los esquemas FSK).

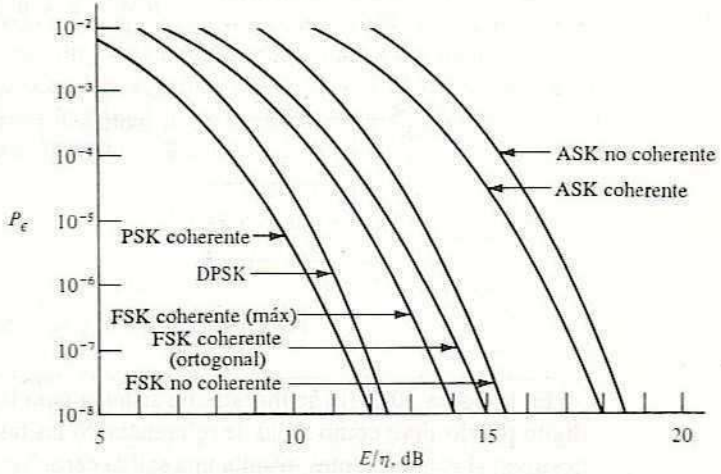


Figura 10.18 Probabilidades de error para sistemas de modulación digital binaria.

La figura 10.18 muestra que la señalización PSK coherente requiere la menor cantidad de potencia que cualquier otro método de modulación digital binaria. El siguiente en requerir menos cantidad de potencia es DPSK, seguida de FSK, FSK no coherente, ASK coherente y ASK no coherente. Aunque las diferencias entre algunas gráficas son sólo del orden de 1-2 dB, recuerde que, en los intervalos de interés práctico, un cambio de 1 dB en la potencia de la señal implica un cambio correspondiente de casi un orden de magnitud en P_e.

Los transmisores para sistemas ASK son fáciles de construir y tienen la ventaja de que no exite potencia transmitida cuando no se envían datos (si se utiliza OOK). Dichos sistemas encuentran algunas aplicaciones en sistemas de telemetría en miniatura de corto alcance. Los receptores para sistemas ASK no coherentes son fáciles de construir. La diferencia de desempeño entre la detección coherente y la no coherente es pequeña comparada con el aumento en la complejidad necesaria, por lo que en general no se utiliza detección coherente. Una desventaja de la ASK es que el umbral de decisión en

http://libreria-universitaria.blogspot.com

el receptor se debe ajustar a los cambios en los niveles de la señal recibida. En general, estos ajustes se llevan a cabo con un control automático de ganancia.

Los sistemas FSK, a diferencia de los ASK, operan en forma simétrica con respecto a un nivel de umbral de decisión cero, prescindiendo de la magnitud de la señal portadora. Además de un posible aumento en la estabilidad necesaria de la frecuencia, hay muy poca diferencia entre la complejidad de los transmisores FSK y PSK con respecto a los ASK. La complejidad del receptor depende principalmente de si se usa un método de modulación coherente o no coherente. La FSK no coherente es relativamente fácil de construir y es una elección frecuente para tasas de transmisión de datos de bajas a medias, como el teletipo. Las transmisiones FSK concebidas para demodulación no coherente requieren más ancho de banda para una tasa de bits dada que las ASK o PSK. El ancho de banda de las transmisiones FSK concebidas para demodulación coherente se pueden hacer tan pequeñas como se desee controlando Df, pero los casos para los que $2\Delta fT < \frac{1}{2}$ demandan un costo en la S/N. Los anchos de banda de las transmisiones FSK concebidas para demodulación coherente suelen ser iguales o un poco mayores que los requeridos para ASK o PSK.†

Como se ha observado, los sistemas PSK son superiores tanto a los sistemas ASK como a los FSK ya que requieren menor potencia transmitida para una probabilidad de error dada. Sin embargo, se requiere detección síncrona, y los sistemas de recuperación de portadora son más difíciles (y por tanto más caros) de construir. Los sistemas DPSK son, con frecuencia, una buena alternativa que sacrifica algún desempeño con respecto al error pero permite un receptor más económico. Los tres métodos de modulación digital más utilizados para sistemas de comunicación son PSK, DPSK y FSK no coherente.

Ninguno de los métodos de modulación digital descritos es particularmente eficiente en términos del ancho de banda utilizado. Este tema se analiza con más detalle en las secciones posteriores de este capítulo, pero se observa aquí que un método que no se mencionó es la formación de señal en banda base con una modulación lineal (como VSB). Este método proporciona una forma de modulación que economiza el ancho de banda más que los métodos precedentes.

La elección final sobre el tipo de modulación digital por elegir depende de los compromisos entre desempeño, costo, ancho de banda, etcétera. Además, las distorsiones de propagación (p. ej., la distorsión por retardo), el desvanecimiento, el espectro de ruido no blanco, el ruido no gaussiano (p. ej., la interferencia), etc., pueden afectar la elección.

10.5 SISTEMAS DE ESPECTRO EXPANDIDO POR SECUENCIA DIRECTA

En algunos sistemas se elige modular por segunda vez una señal ya modulada para obtener ciertas ventajas en la transmisión. Un ejemplo de esto es el caso en el que se combinan varias señales BPSK usando multiplexión por división de frecuencia. En este método, las bandas de frecuencia adyacentes se limitan en banda y luego se colocan una

† Un problema al intentar ser más específico es que la definición de ancho de banda utilizada plantea una diferencia importante; véase, por ejemplo, F. Amoroso, "The Bandwidth of Digital Data Signals", *IEEE Communications Magazine*, vol. 18, núm. 6, noviembre de 1980, págs. 13-24.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

al lado de otra en frecuencia antes de la transmisión para obtener beneficios en la transmisión de varios mensajes a través de un sistema de comunicación. Este procedimiento se analiza en el capítulo 5. En este método, la interferencia entre varios mensajes se minimiza mediante la combinación de limitación de banda y la elección de desplazamientos de frecuencia en la multiplexión por división de frecuencia.

Una segunda posibilidad es la multiplexión por división de tiempo, en la que varias señales se muestrean e intercalan en forma ordenada utilizando una banda de frecuencia común. La interferencia entre varios mensajes se minimiza utilizando un muestreo y filtrado adecuados para evitar un desperdicio de energía en segmentos de tiempo adyacentes. Después, la señal multiplexada se limita en banda y se puede modular por segunda vez usando una portadora de alta frecuencia.

A diferencia de estos métodos, existe un creciente interés en sistemas que expanden intencionalmente su contenido de frecuencia a tal punto que cada señal interfiere de manera muy notoria con cualquier otra señal que opera en la misma banda de frecuencia. Una aplicación de tales sistemas de comunicación se da en situaciones en las que el emisor no desea que sus transmisiones sean detectadas por otros, por ejemplo, en sistemas de comunicación militar. El objetivo de dicho sistema es expandir en forma intencional el espectro para disminuir la densidad espectral transmitida hasta un nivel que se encuentre por debajo del nivel de ruido térmico de cualquier receptor enemigo. Además, la transmisión podría encontrar interferencia intencional ("perturbaciones"), y los sistemas de espectro expandido se pueden utilizar como protección contra dichas fuentes perturbadoras.

En sistemas de comunicación comercial, una aplicación de los métodos de espectro expandido es la transmisión de dos o más señales no sincronizadas dentro de una asignación espectral común con una mínima interferencia. Este tipo de multiplexión espectral se muestra en la figura 10.19. Este método es de interés, por ejemplo, en un sistema de comunicación por satélite en el que varios usuarios tienen acceso al sistema y todos comparten una banda de frecuencia común. Como la clave para el desempeño de dicho sistema en la detección de una señal en presencia de mínima interferencia de otras señales que comparten la banda reside en la codificación de la señal, este tipo de sistema de multiplexión se llama *acceso múltiple por división de código* (CDMA, *code division multiple access*). El CDMA es un método importante para la transmisión de datos digitales utilizando sistemas de comunicación por satélite.

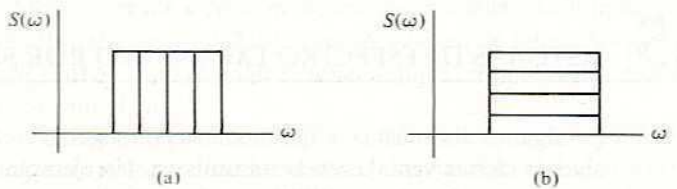


Figura 10.19 Espectros de la transmisión de varios canales de información usando (a) multiplexión por división de frecuencia y (b) multiplexión de espectro expandido.

Con el fin de clasificar un sistema como de espectro expandido, se requiere que la energía de señal transmitida del sistema ocupe un ancho de banda mayor que el de la

http://libreria-universitaria.blogspot.com

tasa de bits de información (en general, mucho mayor) y relativamente independiente de la tasa de bits de información. La demodulación en dichos sistemas se lleva a cabo, al menos en parte, por medio de la correlación de la señal recibida con una réplica de la señal utilizada en el transmisor para expandir el ancho de banda. Por tanto, aunque la utilización de FM de banda ancha también provoca un gran ancho de banda de transmisión, no se clasifica como espectro expandido.

Un método de expandir el espectro de una señal modulada es modularla directamente una segunda vez utilizando una señal expansora de banda ancha. Los sistemas de comunicación que utilizan modulación directa de una portadora modulada por una señal expansora de banda ancha con el propósito de expandir el ancho de banda se llaman sistemas de *espectro expandido por secuencia directa* (DS, *direct-sequence*). La forma más simple de espectro expandido DS emplea BPSK como modulación de expansión. Para la elección común de $\Delta\theta = \pi/2$, una expresión para la señal BPSK es

$$\phi(t) = Ap(t) \cos \omega_c t, \tag{10.32}$$

donde $p(t)$ es una función de conmutación binaria con estados posibles ± 1 y gobernada por la señal modulante (entrada). La señal de espectro expandido DS resultante es

$$\chi(t) = Ac(t)p(t) \cos \omega_c t, \tag{10.33}$$

donde $c(t)$ es la señal de modulación expansora. Una elección común para $c(t)$ es la de una secuencia binaria de ruido seudoaleatorio (PN) con valores ± 1 (véase Sec. 7.13). El diagrama de bloques de un sistema para conseguir esto se muestra en la figura 10.20(a).

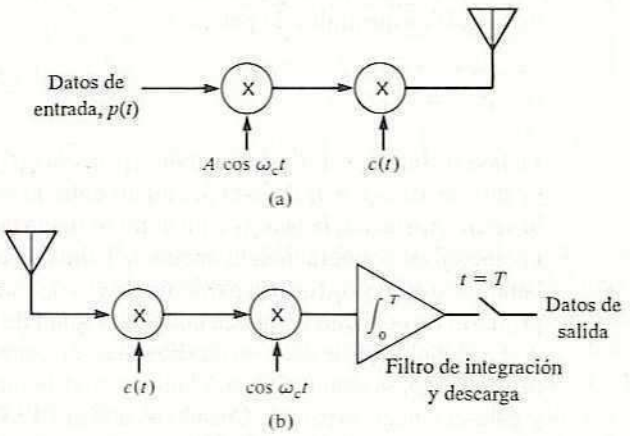


Figura 10.20 Sistemas de espectro expandido DS-BPSK para (a) modulación y (b) demodulación.

La demodulación de esta señal de espectro expandido DS requiere la multiplicación por $c(t)$ y por cos $\omega_c t$, un filtro de integración y descarga, y un umbral de decisión binario. Esto se muestra en la figura 10.20(b). Se supone que existe sincronización de la fase entre el transmisor y el receptor, no sólo para la señal BPSK sino también para la señal expansora. La sincronización y la multiplicación apropiadas de la señal expansora, así como el conocimiento de esta señal en recepción, se llama *contracción* y es una función crítica de los sistemas de espectro expandido.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Como se analizó en el capítulo 7, la secuencia PN se puede generar sin dificultades utilizando registros de desplazamiento retroalimentados y sumadores módulo 2 (se supone el uso de formato NRZ). Aunque el código resultante es determinista, tiene la característica de una señal binaria aleatoria hasta que la secuencia comienza a repetirse y exhibe su patrón repetitivo. Se supone que la longitud de la secuencia antes de la repetición es muy grande comparada con otras constantes de tiempo del sistema (nótese que es, en definitiva, una ventaja hacer énfasis en este punto del diseño del sistema si uno de los objetivos es hacer difícil la detección no autorizada). En este caso se supone que la secuencia es aleatoria; esto es, existe una correlación cero entre el valor de un bit particular y el valor de otros bits en la secuencia. Con estas limitaciones, el ejemplo 8.13.2 proporciona la densidad espectral de potencia de la señal expansora $c(t)$ como

$$S_{ch}(\omega) = T_{ch}\,\mathrm{Sa}^2(\omega T_{ch}/2)\,, \tag{10.34}$$

donde T_{ch} es la duración del pulso de bit en la señal expansora.

La densidad espectral de potencia de la señal BPSK modulada por datos es [véase Ec. (10.30)]:

$$S_{\phi}(\omega) = \tfrac{1}{2}A^2T_b\{\mathrm{Sa}^2[(\omega + \omega_c)T_b/2] + \mathrm{Sa}^2[(\omega - \omega_c)T_b/2]\}\,, \tag{10.35}$$

donde T_b es la duración de los pulsos de los bits de datos. Si se supone independencia estadística entre la portadora modulada con datos y la señal expansora, la función de autocorrelación de su producto es igual al producto de sus funciones de autocorrelación. Por tanto, la densidad espectral de potencia de su producto es la convolución de las densidades espectrales de potencia:

$$S_{\chi}(\omega) = \frac{1}{2\pi}S_{\phi}(\omega) \circledast S_{ch}(\omega) \tag{10.36}$$

La tasa de bits $f_{ch} = 1/T_{ch}$ de la señal expansora $c(t)$ suele elegirse más grande que la tasa de bits de datos $f_b = 1/T_b$. Para distinguir entre la tasa de bits de datos y la tasa de bits de la señal expansora, la tasa f_{ch} a menudo se llama tasa de *chip*. Como consecuencia de la operación de convolución, el ancho de banda de $S_{\chi}(\omega)$ es igual a la suma del ancho de banda de $S\phi(\omega)$ y $S_{ch}(\omega)$. En particular, si $f_{ch} \gg f_b$, entonces la señal expansora es el control primario en el ancho de banda neto de la señal de espectro expandido $\chi(t)$.

La modulación de datos en un sistema de espectro expandido DS no tiene que ser BPSK. Sin embargo, es común utilizar el mismo tipo de modulación digital de fase para los datos y para el código expansor. Cuando se utiliza BPSK para ambas modulaciones, se puede eliminar un modulador de fase (mezclador), y los datos binarios y el código expansor se pueden combinar utilizando una suma módulo 2 de los datos y el código expansor.

Como se muestra en la figura 10.20(b), el receptor en el sistema de espectro expandido DS multiplica la señal de entrada con la señal expansora $c(t)$ y con la portadora cos $\omega_c t$. No sólo es necesario sincronizar el oscilador de la frecuencia portadora en el receptor con el del transmisor, sino también sincronizar el generador de la señal expansora en el receptor con el del transmisor.

El procedimiento de sincronización en el receptor de la señal expansora suele dividirse en al menos dos modos: (1) un modo de adquisición y (2) un modo de rastreo (cerrojo). Ambos modos requieren que el receptor tenga (o pueda generar) una réplica

http://libreria-universitaria.blogspot.com

de la secuencia PN correcta. Un método comúnmente usado para la adquisición es el de *búsqueda escalonada en serie*. En este método, la salida de un generador PN en el receptor se multiplica con la corriente de bits de entrada. La señal resultante se aplica a un filtro pasabanda (centrado en ω_c), luego a un detector de envolvente y a un detector de umbral que se fija para que se dispare si se presenta un "buen" emparejamiento. En ausencia de dicho emparejamiento, la sincronía de la secuencia PN en el receptor prosigue y se repite el proceso. Cuando se descubre un buen emparejamiento (en general se permiten unos cuantos bits erróneos en la secuencia para tomar en cuenta algunos posibles efectos de ruido), el receptor se conmuta al modo de rastreo (cerrojo). Se puede utilizar un tercer modo (intermedio) para verificar el emparejamiento una segunda o tercera vez antes de conmutar el sistema al modo de rastreo (cerrojo).

Una vez completada la adquisición, el receptor debe ser capaz de mantener el alineamiento de tiempo correcto de la secuencia PN recibida y la réplica generada dentro de una fracción del intervalo de chip. Un circuito usado a menudo con este propósito es el *lazo de amarre de retardo* (DLL), el cual se muestra en la figura 10.21. El empleo de este circuito supone una sincronización inicial en un medio del intervalo de chip.

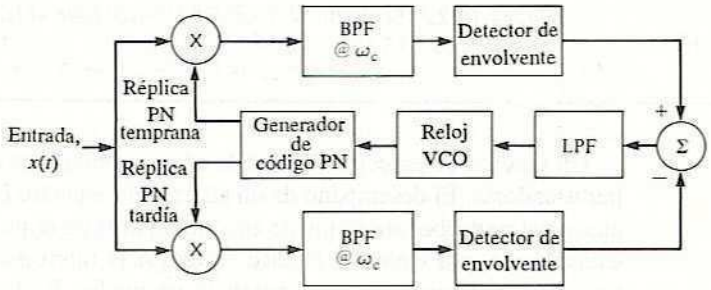


Figura 10.21 Lazo de retardo cerrado (DLL) para la sincronización de dos secuencias de código PN.

En el DLL, la señal recibida se multiplica por una réplica temprana (adelantada por un medio del intervalo de chip) y una tardía (retardada un medio del intervalo de chip) de la señal expansora. Los productos temprano y tardío resultantes se pasan a través de filtros pasabanda y detectores de envolvente, para luego restarse a fin de obtener una señal de error. Como $f_c \gg f_b$, el filtro pasabanda actúa como integrador y las señales en la salida de los detectores de envolvente son las magnitudes de las funciones de autocorrelación de la secuencia PN. Estas dos señales se restan para formar la señal de error. La porción pasabajas de esta señal de error debe ser cero si las réplicas temprana y tardía se centran en forma correcta alrededor de la secuencia PN de entrada. Se obtiene una tensión de correlación por filtrado pasabajas (para quitar componentes armónicos) para luego excitar un oscilador controlado por tensión (VCO). Este oscilador gobierna la tasa de chip del generador de secuencia PN, que cambia la sincronía relativa de las señales multiplicadas para llevar a la señal error hacia cero. De esta forma, la réplica del generador de secuencia PN sigue a la secuencia PN recibida, siempre que el error de sincronía inicial sea relativamente pequeño (es decir, menor que más o menos un medio del intervalo de chip). Esto se muestra en el ejemplo 10.5.1.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJEMPLO 10.5.1

Dibuje la señal de error pasabajas de un DLL para una secuencia PN de siete bits.

Solución La función de autocorrelación de una secuencia PN de siete bits se muestra en la figura 7.52. Adelantando y retardando esta secuencia por medio intervalo de chip para luego restarlas proporciona la señal de error mostrada en la figura 10.22. Nótese que se genera una señal de error no ambigua sólo si $|\tau| < T_{ch}/2$.

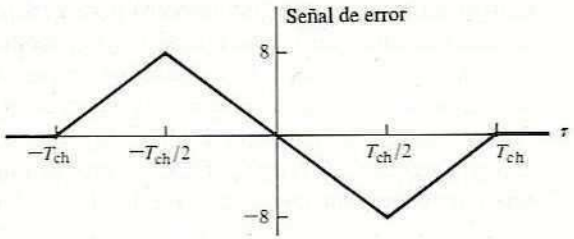


Figura 10.22 Señal de corrección de error para el lazo de retardo cerrado del ejemplo 10.5.1.

Un sistema de espectro expandido ofrece ventajas en el rechazo de muchas señales perturbadoras. El desempeño de un sistema de espectro expandido DS en presencia de una señal perturbadora se puede estimar a partir de la probabilidad de error promedio. Considérese, por ejemplo, el caso en el que la interferencia intencional es un simple tono senoidal que tiene una potencia promedio P_J. La mejor estrategia de agente perturbador es colocar la señal perturbadora en el centro del ancho de banda de transmisión. Haciendo que P sea la potencia promedio de la señal de espectro expandido DS y despreciando otras fuentes de ruido aditivo, la suma de la señal deseada y la no deseada en la entrada del receptor de espectro expandido es

$$v_i(t) = \sqrt{2P}\, p(t)c(t) \cos \omega_c t + \sqrt{2P_J} \cos (\omega_c t + \theta)\,. \tag{10.37}$$

El segundo término en esta ecuación es el que contribuye con la fuente perturbadora. El ángulo θ es la fase de la señal perturbadora en relación con la señal portadora modulada por los datos. Se supone que el agente perturbador no tiene conocimiento de la fase de referencia de la portadora modulada por datos, y en consecuencia es razonable suponer que θ es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad uniforme.

Como $c^2(t) = 1$, la porción pasabajas de la señal $v_o(t)$ en la entrada del filtro de integración y descarga en el receptor es

$$v_o(t) = \sqrt{P}\, p(t) + \sqrt{P_J}\, c(t) \cos \theta\,. \tag{10.38}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

El primer término del lado derecho de la ecuación (10.38) muestra que el ancho de banda de la portadora modulada por datos se redujo del ancho de banda muy amplio de $c(t)$ al de los datos $p(t)$. Mientras tanto la señal de interferencia, que en principio tenía una densidad espectral consistente en un impulso en $\omega = \pm\omega_c$, aparece ahora como una señal de espectro expandido de ancho de banda amplio. Usando la ecuación (10.30) y el hecho de que $\overline{\cos^2\theta} = \frac{1}{2}$ bajo las suposiciones anteriores, la densidad espectral de potencia de la señal de interferencia es

$$S_J(\omega) = \tfrac{1}{2}P_J T_{ch}\,\mathrm{Sa}^2(\omega T_{ch}/2)\,. \tag{10.39}$$

Los cruces por cero de esta densidad espectral de potencia se encuentran en $\omega = \pm 1/T_{ch}$. Para $T_{ch} \ll T_b$ (es decir, $f_{ch} \gg f_b$), el ancho de banda de esta densidad espectral de potencia es muy amplio comparado con el de la portadora modulada por datos. Como aproximación, se supone que es plana a través del ancho de banda de interés; esto es,

$$S_J(\omega) \approx \tfrac{1}{2}P_J T_{ch} \text{ para } |\omega| \ll 2\pi/T_{ch}\,. \tag{10.40}$$

Regresamos a la consideración de la ecuación (10.38) y notamos que el primer término es igual que si el sistema no fuera un sistema de espectro expandido. Si la señal de interferencia fuera ruido blanco gaussiano (p. ej., térmico) con densidad espectral de potencia $\eta/2$, la probabilidad de error de bit sería [véase Ec. (10.24)]:

$$P_\epsilon = Q\left(\sqrt{\frac{E}{\eta/2}}\right). \tag{10.41}$$

Como aproximación (sería, de hecho, un límite superior), se puede continuar utilizando este resultado si se reemplaza $\eta/2$ con la $S_J(\omega)$ de la ecuación (10.40). Haciendo $E = PT_b$ en la ecuación (10.41) y usando $f_{ch} = 1/T_{ch}$ y $f_b = 1/T_b$, se obtiene

$$P_\epsilon = Q\left(\sqrt{\frac{2Pf_{ch}}{P_J f_b}}\right). \tag{10.42}$$

Por tanto, la potencia perturbadora efectiva de la fuente de interferencia se puede contrarrestar haciendo a la relación f_{ch}/f_b tan grande como sea posible. Esta relación (f_{ch}/f_b) se llama *ganancia de procesamiento* del sistema de espectro expandido. Esto proporciona una medida sencilla y conveniente de lo bien que puede suprimir un sistema las señales de interferencia.

EJERCICIO 10.5.1

Retenga la densidad espectral de potencia $\eta/2$ para representar el ruido térmico. ¿Cuál es la probabilidad de un error de bit de un sistema de espectro expandido DS-PSK en presencia de una señal perturbadora de un solo tono?

RESPUESTA: $P_\epsilon = Q\left(\sqrt{\dfrac{2E}{\eta + P_J/f_{ch}}}\right)$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJERCICIO 10.5.2

Se observa que el espectro de potencia de una señal DS-PSK desconocida tiene líneas espectrales con espaciamientos de 10 kHz, y el ancho de banda de los primeros ceros es de 20.7 MHz. Estime el número de registros de desplazamiento utilizados por la secuencia PN, suponiendo que se trata de una secuencia de longitud máxima.

RESPUESTA: 10.

10.6 AM EN CUADRATURA (QAM) Y PSK CUATERNARIA (QPSK)

En los sistemas de modulación digital binaria considerados hasta aquí, sólo se puede transmitir una de dos posibles señales durante cada intervalo de señalización. Tales sistemas de modulación tienen una eficiencia teórica de ancho de banda de 1 bps/Hz. En muchas aplicaciones, un sistema de transmisión es más rentable si, para un ancho de banda dado, se pueden transmitir más bits por segundo. Esto lleva a considerar métodos de modulación digital M-aria en los que se transmite una de M posibles señales durante cada intervalo de señalización.

El primer método para aumentar la eficiencia espectral es utilizar el principio de multiplexión en cuadratura (véase Ej. 5.1.1) en el que dos señales moduladas se combinan en cuadratura de fase. En la figura 10.23 se muestra un sistema básico para conseguirlo. Esto se llama *AM en cuadratura* (QAM).

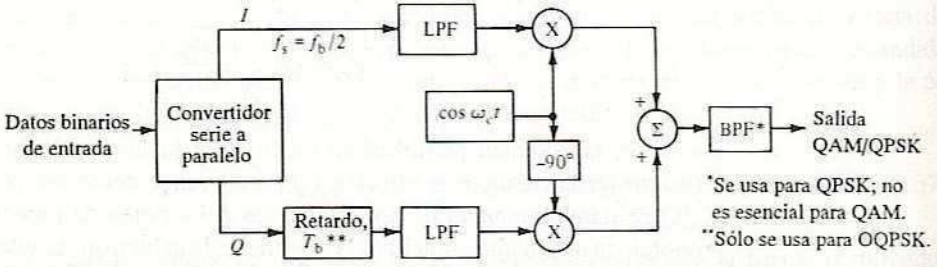


Figura 10.23 Diagrama de bloques de un modulador QAM/PSK.

En el sistema QAM de la figura 10.23, el convertidor serie a paralelo acepta la corriente de datos binarios de entrada a una tasa de bits de $f_b = 1/T_b$ bps, y proporciona dos corrientes de datos binarios paralelas en $f_s = 1/T_s$ bps, donde $T_s = 2T_b$. Aquí f_s es la tasa de símbolos o *baud*, y f_b es la tasa de bits total del sistema. Luego de la conversión serie a paralelo, se utilizan filtros pasabajas para restringir el ancho de banda y proporcionar la forma espectral deseada. Las señales de datos I y Q se modulan utilizando DSB-SC; la señal I, usando la portadora de referencia en fase; y la señal Q,

http://libreria-universitaria.blogspot.com

utilizando la portadora de referencia en cuadratura. Las señales moduladas I y Q se suman para formar la señal QAM.

Como la señal QAM es el resultado de la suma lineal de dos señales DSB-SC, su densidad espectral de potencia es la de las señales DSB-SC. Por tanto, la densidad espectral de potencia de la QAM para una corriente de datos de entrada NRZ aleatoria es de la forma $(\text{sen } x/x)^2$ dada por (para frecuencias positivas)

$$S_s(\omega) = C\left[\frac{\text{sen}(\omega - \omega_c)T_s/2}{(\omega - \omega_c)T_s/2}\right]^2, \tag{10.43}$$

donde C es una constante proporcional a la potencia QAM promedio transmitida. Como $f_s = f_b/2$, la eficiencia del ancho de banda de QAM es de 2 bps/Hz.

Un examen del diagrama fasorial, como se ve en la figura 10.24, indica que la QAM se puede ver como una modulación de fase si I y Q son señales de idéntica magnitud. Dichos sistemas se conocen como sistemas *PSK en cuadratura* (QPSK, *quadrature PSK*). Como se indica en la figura 10.24(d), se utiliza codificación de Gray de modo que estados de señal adyacentes difieran sólo por un bit.

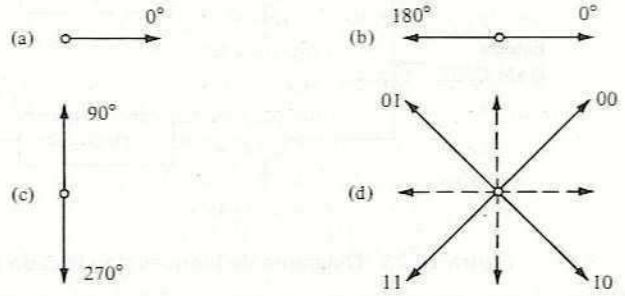


Figura 10.24 Diagramas fasoriales de la modulación QAM/QPSK: (a) portadora sin modular; (b) señal modulada en fase (*I*); (c) señal modulada en cuadratura (Q); señal compuesta QAM/QPSK (se indican valores en código de Gray).

En QPSK, toda la información se lleva en la fase y es deseable una envolvente constante. Los filtros pasabajas del diagrama del modulador de la figura 10.23 se utilizan sólo para restringir el ancho de banda de la corriente de datos a menos de la mitad de la frecuencia de portadora. La forma espectral principal en los sistemas QPSK se consigue por medio de un filtro pasabanda después de la suma de las señales I y Q. Las atenuaciones relativas o ganancias en los circuitos I y Q se mantienen lo más semejantes posible. Por tanto, una diferencia entra la QAM cuaternaria y la QPSK es que los sistemas QAM emplean filtrado (pasabajas) antes de la modulación para formación espectral, mientras que los sistemas QPSK utilizan filtrado (pasabanda) después de la modulación e intentan mantener una envolvente constante en la señal modulada. Teóricamente, los sistemas tanto QAM cuaternario como QPSK tienen idénticas densidades espectrales de potencia y probabilidades de error. Como resultado de estas

http://libreria-universitaria.blogspot.com

similitudes y de la relativa popularidad de los sistemas QPSK, es común utilizar el término QPSK también para los sistemas QAM.†

En QPSK, se transmite una de cuatro posibles señales durante cada intervalo de símbolo T_s. Estas señales son las siguientes:

$$s_1(t) = A \cos \omega_c t,$$
$$s_2(t) = -A \text{ sen } \omega_c t,$$
$$s_3(t) = -A \cos \omega_c t,$$
$$s_4(t) = A \text{ sen } \omega_c t.$$

Estas señales corresponden a desfasamientos de 0°, 90°, 180° y 270°, como se muestra en el diagrama fasorial de la figura 10.24. Como la señal transmitida en un sistema QPSK se puede ver como la suma de dos señales BPSK en cuadratura, es razonable esperar que la demodulación y la detección impliquen dos receptores BPSK, o correlacionadores, en paralelo, uno para cada portadora en cuadratura. El diagrama de bloques de dicho sistema se muestra en la figura 10.25.

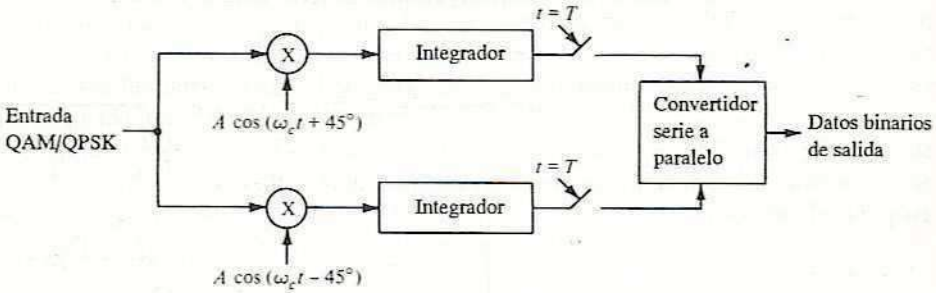


Figura 10.25 Diagrama de bloques simplificado de un demodulador QAM/QPSK

Con referencia a la figura 10.25, se encuentra que las posibles salidas del primer correlacionador en ausencia de ruido son

$$y_1(T_s) = \int_0^{T_s} [\pm A \cos \omega_c t][A \cos (\omega_c t + \pi/4)]\, dt, \tag{10.44}$$

$$y_1(T_s) = \frac{\pm A^2 T_s}{2\sqrt{2}} = \frac{\pm E_s}{\sqrt{2}}, \tag{10.45}$$

donde E_s es la energía por símbolo. Del mismo modo, las posibles salidas del segundo correlacionador son

$$y_2(T_s) = \frac{\pm E_s}{\sqrt{2}}.$$

La probabilidad de error en la salida del primer correlacionador en presencia de ruido blanco gaussiano aditivo se calcula de la misma forma que para la PRK [véase

† A veces se utiliza el término *QPSK desbalanceada* para describir el caso especial en el que las tasas de datos y la potencia (o ambas) de las señales en fase y cuadratura son diferentes.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Ec. (10.24)], excepto porque las funciones de densidad de probabilidad están centradas en $\pm E_s/\sqrt{2}$, o

$$P_{\epsilon_1} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi\eta E}} e^{-(y+E_s/\sqrt{2})^2/\eta E_s}\, dy,$$

$$P_{\epsilon_1} = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{\eta}}\right). \tag{10.46}$$

Así mismo, la probabilidad de error para la salida del segundo correlacionador es

$$P_{\epsilon_2} = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{\eta}}\right). \tag{10.47}$$

La probabilidad de que el receptor QPSK identifique de manera correcta la señal transmitida es igual al producto de las probabilidades de que ambos correlacionadores hayan proporcionado los resultados correctos, o†

$$P_c = (1 - P_{\epsilon_1})(1 - P_{\epsilon_2}). \tag{10.48}$$

Como $P_{\epsilon_1} = P_{\epsilon_2}$, se puede escribir

$$P_c = 1 - 2P_{\epsilon_1} + P_{\epsilon_1}^2, \tag{10.49}$$

$$P_c \approx 1 - 2P_{\epsilon_1} \quad \text{para } P_{\epsilon_1} \ll 1. \tag{10.50}$$

La probabilidad de error del sistema QPSK es

$$P_\epsilon = 1 - P_c \tag{10.51}$$

$$P_\epsilon \approx 2P_{\epsilon_1} = 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{\eta}}\right). \tag{10.52}$$

Comparando la ecuación (10.52) con la (10.24), se concluye que la probabilidad de error para QPSK es mayor que aquélla para BPSK (PRK). Sin embargo, si se toma en cuenta el hecho de que se transmite el doble de datos, el desempeño en probabilidad de error de ambos sistemas es igual (nótese que E_s en la ecuación (10.52) es la energía por símbolo; se podría parafrasear en términos de energía por bit usando $T_s = 2T_b$). Como se puede presentar alguna incertidumbre en la utilización de E tanto para la energía por símbolo como para la energía por bit, los cálculos de sistemas a menudo se remiten de manera específica a la *tasa de bit en error*, (BER, *bit error rate*). Esto se muestra en el ejemplo 10.6.1.

Un objetivo de la señalización QPSK es mantener una señal envolvente constante, haciendo que la información se lleve en la fase. Las transiciones de fase en cada mezclador de frecuencia (véase Fig. 10.23) se presentan en el periodo del intervalo de símbolo y se suavizan con un filtro pasabanda. En la práctica, las restricciones de realizabilidad del filtro provocan fluctuaciones en la envolvente durante el filtrado

† Esta simplificación supone que no existe correlación en el ruido en la salida de los dos correlacionadores. Esta suposición es válida si el periodo de integración T se extiende sobre uno o más ciclos completos de la señal portadora.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

de estas transiciones de fase. Las fluctuaciones de envolvente no son de mayor interés en canales lineales. Sin embargo, muchos sistemas QPSK diseñados para uso en satélites y terrestre operan con etapas de salida no lineales. El amplificador no lineal reduce las fluctuaciones de envolvente a costa de una expansión del espectro, que nulifica el propósito del filtro pasabanda y puede provocar interferencias inaceptables en las bandas de frecuencia adyacentes.

Para disminuir las fluctuaciones de envolvente después del filtrado, algunos sistemas QPSK utilizan un retardo de un bit (T_b) en la corriente de datos en cuadratura antes de la modulación, como se muestra en la figura 10.23. Con este retardo, las transiciones de fase en los dos mezcladores de frecuencia están separadas por $T_b = T_s/2$ segundos. Dichos sistemas se llaman sistemas QPSK de conmutación desplazada (u OQPSK, *offset-keyed QPSK*).† Observando un diagrama fasorial (p. ej., véase Fig. 10.24), se ve que la máxima transición de fase en cualquier punto de la señal OQPSK es de ±90° (aunque estas transiciones se producen el doble de veces que en las señales QPSK). Como resultado de la disminución en magnitud de las transiciones de fase, la señal compuesta OQPSK tiene fluctuaciones de envolvente menores luego del filtro pasabanda. Otro método es obtener la frecuencia portadora de un múltiplo del reloj de sincronía de símbolos para que se puedan controlar los tiempos de transición de fase. Este método ofrece fluctuaciones de envolvente mínimas y expansión de espectro a cambio de un aumento en la complejidad del equipo.

Es conveniente resumir nuestros resultados hasta este punto y prepararnos para la siguiente sección, a fin de tener una representación de señales más general para la modulación en cuadratura. En general, la forma de la señal para modulación de amplitud en cuadratura se puede escribir como:‡

$$\phi_{QAM}(t) = A_1 m_1(t) \cos(\omega_c t + \gamma_0) - A_2 m_2(t) \operatorname{sen}(\omega_c t + \gamma_0), \qquad (10.53)$$

donde γ_0 es un desplazamiento de fase arbitrario (constante). Las constantes A_1, A_2 permiten magnitudes de portadora en fase y en cuadratura diferentes, y los términos de modulación de amplitud $m_1(t)$, $m_2(t)$ permiten una variación (lenta) de la amplitud con el tiempo en un intervalo de símbolo $(0, T_s)$. El diagrama fasorial de esta representación de señal QAM se muestra en la figura 10.26.

En términos de la envolvente y la fase (véase Fig. 10.26), la ecuación (10.53) se puede reescribir como

$$\phi_{QAM}(t) = r(t) \cos[\omega_c t + \gamma(t)], \qquad (10.54)$$

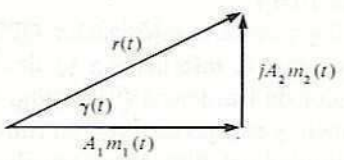


Figura 10.26 Diagrama fasorial de la señal QAM.

† La OQPSK a veces se llama QPSK retrasada.

‡ Aquí se eligió el signo del término en cuadratura para que proporcione un ángulo positivo en el diagrama fasorial.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

donde

$$r(t) = \sqrt{A_1^2 m_1^2(t) + A_2^2 m_2^2(t)}, \tag{10.55}$$

$$\gamma(t) = \tan^{-1}\left[\frac{A_2 m_2(t)}{A_1 m_1(t)}\right] + \gamma_0. \tag{10.56}$$

Para una envolvente constante, se requiere que

$$\left\{\begin{array}{c} A_1 = A_2 \\ \sqrt{m_1^2(t) + m_2^2(t)} = \text{constante} \end{array}\right\}. \tag{10.57}$$

Para sistemas QPSK y OQPSK, este requisito se cumple haciendo que $A_1 = A_2$ y que $m_1(t)$, $m_2(t)$ sean funciones de conmutación binarias con estados posibles ± 1. Esto origina una señal de modulación de fase. Si los cambios de signo posibles para $m_1(t)$, $m_2(t)$ están alineados, entonces la señal modulada resultante es QPSK; si se encuentran espaciados, la señal modulada es OQPSK.

Los circuitos de recuperación de portadora se deben utilizar en los receptores QPSK. Como en BPSK, un método cuadruplica la señal QPSK de entrada y luego la divide por cuatro para obtener la portadora (véase Prob. 10.6.4). Un segundo método es el lazo de Costas mostrado en la figura 10.27. Un tercer método, a menudo llamado lazo retroalimentado de decisión, también utiliza lazos de retroalimentación tanto en fase como en cuadratura, como el lazo de Costas. Sin embargo, las decisiones de bit se llevan a cabo utilizando, por ejemplo, dispositivos como filtros de integración y descarga antes de la retroalimentación. Los sistemas que utilizan este tercer método son muy buenos para recuperación de portadora, pero sus tiempos de adquisición pueden ser relativamente grandes. En un cuarto método, la señal modulada primero se demodula, luego se remodula y por último se compara en fase con una réplica retardada de la señal modulada. Este método ofrece una ventaja en cuanto a tiempos de adquisición más cortos. En todos los métodos de tipo retroalimentado para recuperación de portadora se genera una señal de error que se puede utilizar para corregir un VCO en fase y en frecuencia, y por tanto sirve como referencia coherente. Otras variaciones de estos métodos se describen en la bibliografía.†

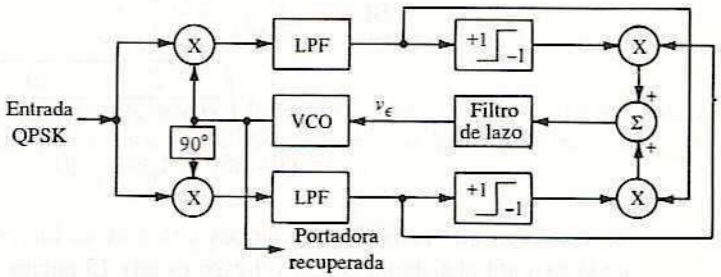


Figura 10.27 Lazo de Costas para recuperación de portadora en QPSK.

† Véase, por ejemplo, W. C. Lindsey, *Synchronization Systems in Communications and Control*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1972; véase también J. J. Stiffler, *Theory of Synchronous Communications*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1971.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En resumen, los sistemas QAM y QPSK tienen eficiencias del ancho de banda de hasta 2 bps/Hz. Ofrecen compromisos atractivos entre velocidades de datos mayores con buenas características de desempeño (compromisos de potencia aceptable contra ancho de banda) y relativa facilidad de realización. Son muy utilizados en la práctica para transmisiones de datos a velocidad media.

EJEMPLO 10.6.1

Se diseñó un sistema QPSK para transmitir datos binarios a 44 Mbps en presencia de ruido blanco gaussiano aditivo con densidad espectral de potencia unilateral $\eta = 1.67 \times 10^{-20}$ W/Hz. Suponga codificación de Gray, una potencia promedio del transmisor de 9 dB y una pérdida neta esperada del sistema de 120 dB.

a) Calcule la tasa de bits en error (BER, *bit error rate*) para este sistema.

b) Compare esta BER con su equivalente en un sistema BPSK (PRK) que maneja la misma tasa de datos.

Solución a) Usando las ecuaciones (9.130) y (10.52), se encuentra que la tasa de bits en error para el sistema QPSK usando codificación de Gray es

$$\begin{aligned} \text{BER} &= Q\left(\sqrt{\frac{ST_s}{\eta}}\right) \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{7.94 \times 10^{-12}}{(1.67 \times 10^{-20})(22 \times 10^{6})}}\right) \\ &= Q(4.65) = 1.66 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

b) Usando la ecuación (10.24), la tasa de bits en error para el sistema BPSK es

$$\begin{aligned} \text{BER} &= Q\left(\sqrt{\frac{2ST_b}{\eta}}\right) \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{2(7.94 \times 10^{-12})}{(1.67 \times 10^{-20})(44 \times 10^{6})}}\right) \\ &= Q(4.65) = 1.66 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

Se concluye que la BER para ambos sistemas es idéntica si se utiliza codificación de Gray para el sistema QPSK (el caso usual). El ancho de banda mínimo teórico del sistema QPSK es de 22 MHz, mientras que para el sistema BPSK es de 44 MHz.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

10.7 FSK DE FASE CONTINUA (CPFSK) Y CONMUTACIÓN DE DESPLAZAMIENTO MÍNIMO (MSK)†

El objetivo primario de los métodos de modulación espectralmente eficientes es maximizar la eficiencia del ancho de banda medida en bps/Hz. Por ejemplo, en la sección precedente se encontró que la QPSK ofrece una eficiencia teórica del ancho de banda de 2 bps/Hz. Un segundo objetivo es minimizar aquellas componentes espectrales que quedan fuera del ancho de banda mínimo (Nyquist). En un canal lineal, esto se puede alcanzar por filtrado. En canales no lineales, la OQPSK se puede utilizar para reducir las componentes espectrales fuera de banda después del filtrado. Aparte de la frecuencia portadora, las densidades espectrales de potencia de la QPSK y la OQPSK disminuyen a una tasa proporcional a ω^{-2}. Con el filtrado, la tasa de caída se puede aumentar; pero entonces es posible que la envolvente de la señal no sea constante, y cualquier no linealidad en el canal tiende a restaurar las características iniciales de caída del espectro.

En esta sección, se investigará un método de modulación que ofrece la eficiencia del ancho de banda de la QPSK y la OQPSK, pero cuya densidad espectral de potencia disminuye con mayor rapidez más allá del ancho de banda mínimo. Este método es una versión de la conmutación de frecuencia analizada en la sección 10.2.

Recuérdese que en la transmisión de información, la fase de la FSK se explotó sólo para proporcionar una posible sincronización del receptor al transmisor. Ahora se mostrará cómo la fase se puede utilizar en forma eficaz para disminuir el contenido espectral fuera de banda. Para hacerlo, se controla la fase de tal forma que se evite cualquier discontinuidad en la señal modulada, en tanto que el desplazamiento de frecuencia se utiliza para llevar la información. Este tipo de modulación digital se llama *FSK de fase continua* (CPFSK). La densidad espectral de potencia de la CPFSK disminuye a una tasa proporcional de al menos ω^{-4} fuera de la frecuencia portadora. Además, la CPFSK ofrece la posibilidad de una eficiencia teórica del ancho de banda de 2 bps/Hz. Estas ventajas se obtienen a expensas de un aumento en la complejidad del equipo para modulación y detección.

La señal CPFSK se define por medio de

$$\phi(t) = A \cos [\omega_c t + \gamma(t)] \tag{10.58}$$

donde la fase con respecto a la portadora, $\gamma(t)$, es una función continua del tiempo. Reescribiendo la ecuación (10.58) en términos del desplazamiento de frecuencia desde la portadora, $\Delta\omega$, se tiene

$$\phi(t) = A \cos [\omega_c t \pm \Delta\omega t + \gamma(0)], \qquad 0 < t \leq T_b, \tag{10.59}$$

† S. Pasupathy, "Minimum Shift Keying: A Spectrally Efficient Modulation", *IEEE Communications Soc. Magazine*, vol. 19, julio de 1979, págs. 14-22; véase también S. A. Gronemeyer y A. L. McBride, "MSK and Offset QPSK Modulation", *IEEE Transactions on Communications*, COM-24, agosto de 1976, págs. 809-820.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

donde

$$\omega_c = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \tag{10.60}$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}. \tag{10.61}$$

Las frecuencias ω_1, ω_2 se utilizan para representar los símbolos 0, 1. Comparando las ecuaciones (10.58) y (10.59), encontramos que la fase es una función lineal del tiempo en el intervalo $0 < t \leq T_b$, o

$$\gamma(t) = \pm\Delta\omega t + \gamma(0), \qquad 0 < t \leq T_b. \tag{10.62}$$

La fase inicial, $\gamma(0)$, depende de la historia anterior del proceso de modulación y debe elegirse de tal forma que se evite cualquier discontinuidad.

En la sección 10.2 se estableció que la condición para la conmutación ortogonal es que $2\Delta\omega T_b = n\pi$. Como aquí el objetivo es la eficiencia espectral, se elige la condición mínima

$$\Delta\omega T_b = \frac{\pi}{2} \tag{10.63}$$

o

$$2\Delta f T_b = \frac{1}{2}. \tag{10.64}$$

Como éste es el mínimo espaciamiento de frecuencia entre ω_1 y ω_2 que permite que las dos señales FSK sean ortogonales entre sí, esta elección particular de CPFSK se llama *conmutación de desplazamiento mínimo* (MSK, *minimum shift keying*). La MSK es el único caso específico de la CPFSK que se considerará en esta sección. Nótese que el criterio de la ecuación (10.64) requiere una separación de frecuencia entre f_1 y f_2 tal que existe medio ciclo de diferencia en un intervalo de bit.

Usando las ecuaciones (10.62) y (10.63), se encuentra que la ecuación (10.58) se puede reescribir para la MSK como

$$\phi_{MSK}(t) = A\cos\left[\omega_c t \pm \frac{\pi}{2T_b}t + \gamma(0)\right], \qquad 0 \leq t < T_b. \tag{10.65}$$

La frecuencia instantánea de esta señal es

$$\omega_i = \omega_c \pm \frac{\pi}{2T_b},$$

o

$$f_i = f_c \pm \frac{1}{4T_b}. \tag{10.66}$$

Por tanto, se mantiene el requisito para conmutación de desplazamiento mínimo en $T_s = 2T_b$, manteniendo también el requisito de continuidad de fase. Si por conveniencia se

http://libreria-universitaria.blogspot.com

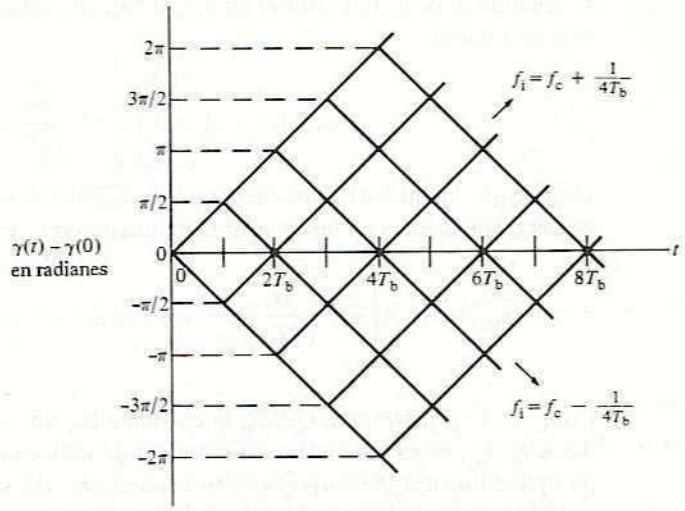


Figura 10.28 Retícula de exceso de fase para MSK.

elige aquí $\gamma(0) = 0$ [recuerde que $\gamma(0)$ depende de la historia pasada del proceso de modulación], en el diagrama reticular de fase de la figura 10.28 se muestran los posibles valores de $\gamma(t)$ para $t > 0$. Cada trayectoria de izquierda a derecha a través de la red de fase corresponde a una secuencia de entrada binaria específica. La figura 10.28 muestra que en cada intervalo de bit la fase de la señal MSK se adelanta o retarda 90° exactos, dependiendo de si el dato para ese intervalo es 0 o 1, con respecto a la fase de la portadora en el intervalo de bit precedente. Como todos los desfasamientos son módulo 2π, la fase sólo puede tomar los dos valores $\pm\pi/2$ en múltiplos impares de T_b y sólo los valores 0, π en múltiplos pares de T_b.

En seguida se reescribe la ecuación (10.65) para extenderla sobre más de un intervalo de bit

$$\gamma(t) = \frac{\pi t}{2T_b} p_k + \gamma_k, \tag{10.67}$$

donde

p_k = una función de conmutación binaria con estados posibles ±1 que representa los datos binarios de entrada; $k = 1, 2, \ldots,$

$\gamma_k = \gamma[(k-1)T_b]$ = exceso de fase al inicio del k-ésimo intervalo de bit necesario para mantener una señal continua.

Además, se puede escribir la restricción de fase recursiva (véase Fig. 10.28)

$$\gamma_k = \gamma_{k-1} + \frac{\pi}{2} p_k. \tag{10.68}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Usando la ecuación (10.67) en la (10.58), se encuentra que la señal MSK se puede expresar como

$$\phi_{\text{MSK}}(t) = A \cos\left[\omega_c t + \frac{\pi t}{2T_b} p_k + \gamma_k\right]. \tag{10.69}$$

Usando una identidad trigonométrica, la ecuación (10.69) se puede expresar en términos de las componentes en fase y en cuadratura como

$$\phi_{\text{MSK}}(t) = A\left[\cos\left(\frac{\pi t}{2T_b} p_k + \gamma_k\right) \cos \omega_c t - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2T_b} p_k + \gamma_k\right) \operatorname{sen} \omega_c t\right]. \tag{10.70}$$

Como en la señalización QPSK, la corriente binaria de entrada se agrupa en pares de datos (p. ej., asignando todas las muestras de índice par a la componente en fase y las de índice impar a la componente en cuadratura). Al hacerlo, se nota que para valores sucesivos de cualquiera de las componentes, el exceso de fase γ_k siempre se incrementará por 0, π, módulo 2π. Las fases asignadas a una componente difieren de la otra por $\pm\pi/2$ [véase Ec. (10.68)], la cual, excepto por el signo, se puede vigilar con un retardo T_b. Por tanto, la analogía es más cercana a la señalización OQPSK. Se debe elegir el signo del desplazamiento necesario $\pm\pi/2$ para mantener la continuidad de la fase.

Usando una identidad trigonométrica y notando que sen $\gamma_k = 0$ en las componentes tanto en fase como en cuadratura, se obtiene

Considérese esta representación de señal MSK como compuesta de dos canales de datos en cuadratura, $a_I(t)$ y $a_Q(t)$, de un sistema de señalización OQPSK

$$\phi_{\text{MSK}}(t) = A\left\{a_I(t) \cos \frac{\pi t}{2T_b} \cos \omega_c t - a_Q(t) \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2T_b} \operatorname{sen} \omega_c t\right\}. \tag{10.72}$$

Ahora se puede pensar en MSK como un caso especial de la OQPSK con una ponderación de pulso senoidal (en vez de una ponderación rectangular). En la figura 10.29 se muestra una interpretación visual que presenta las similitudes y diferencias en las modulaciones OQPSK y MSK.

Comparando las ecuaciones (10.71) y (10.72), se tiene

$$a_I(t) = \cos \gamma_k,$$

$$a_Q(t) = p_k \cos \gamma_k,$$

y recordando que $\gamma_k = 0$, π, módulo 2π, se tiene

$$p_k = a_I(t) a_Q(t). \tag{10.73}$$

Los canales de datos en cuadratura y las ponderaciones senoidales se pueden dibujar utilizando la ecuación (10.73) y los requisitos de continuidad de fase.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

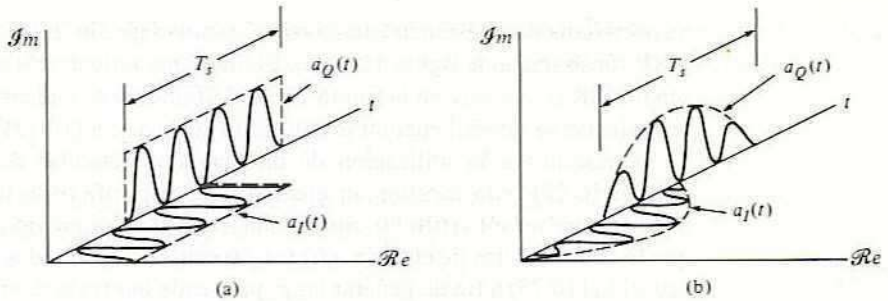


Figura 10.29 Interpretación de (a) OQPSK y (b) MSK en términos de las señales en fase y en cuadratura.

En la figura 10.30 se muestran varios componentes de la señal MSK para una secuencia binaria de entrada 1001001. Los valores de muestra con índice par de la figura 10.30(a) se indican con ±1, se mantienen constantes en dos periodos de bit ($T_s = 2T_b$), y están ponderados por cos ($\pi t/2T_b$). Los valores de muestra con índice impar, desplazados un periodo de bit con respecto a los de índice par, se mantienen por dos periodos de bit y se ponderan con sen ($\pi t/2T_b$); se muestran en la figura 10.30(c). Los términos de portadora modulada en fase y en cuadratura se muestran en la figura 10.30(b), (d),

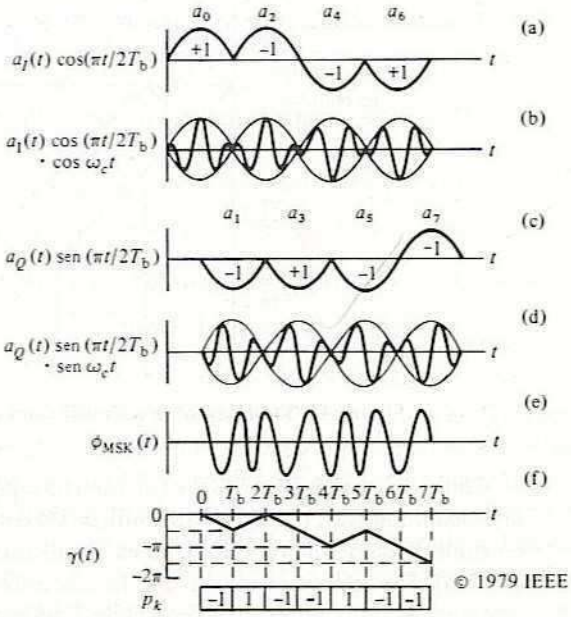


Figura 10.30 Señales MSK.†

† © 1979 IEEE. Reimpreso, con autorización, de "Minimum Shift Keying: A Spectrally Efficient Modulation", por S. Pasupathy de *IEEE Communications Magazine*, vol. 19, núm. 4, julio de 1979, pág. 18.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

respectivamente. Restando estas dos señales [véase Ec. (10.72)], se obtiene la señal MSK mostrada en la figura 10.30(e). El diagrama reticular de exceso de fase para esta señal MSK se muestra en la figura 10.30(f). También se indican los valores binarios de las p_k [éstas se pueden encontrar utilizando la ecuación (10.73)].

Regresemos a la utilización de un diagrama reticular de exceso de fase (véase Fig. 10.28) para mostrar un ejemplo más específico de la generación de MSK. Suponga que no sólo $\gamma(0) = 0$, sino también que el valor previo de p_k es +1. Suponiendo que los bits de datos de entrada $a_I(t)$ y $a_Q(t)$ son ±1 y retardados, se utiliza la regla de la ecuación (10.73) a fin de generar las p_k para cada intervalo de traslapo en las corrientes paralelas de bits. En la figura 10.31 se muestra el diagrama reticular resultante, con las elecciones binarias 0, 1 que corresponden a los ±1 de las $a_I(t)$ y $a_Q(t)$ etiquetadas en el diagrama.

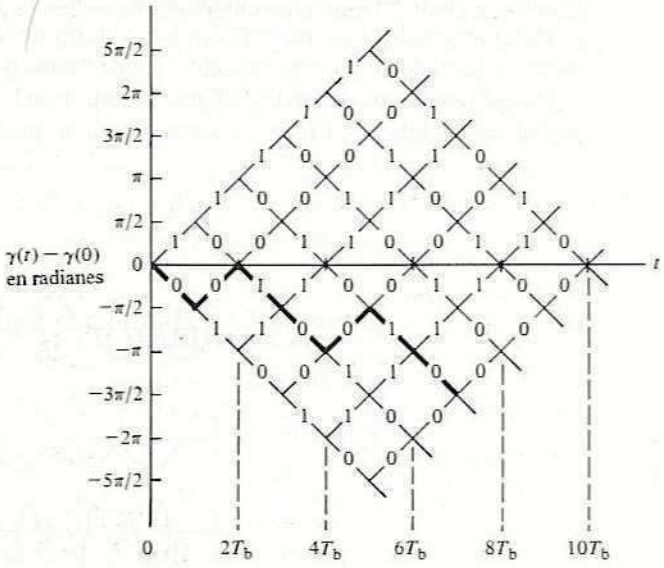


Figura 10.31 Diagrama reticular para el ejemplo de la figura 10.30.

Como la señalización MSK es en esencia equivalente a la OQPSK, el desempeño en la probabilidad de error de la MSK utilizando detección con filtro acoplado en presencia de ruido blanco aditivo gaussiano es el mismo que para QPSK y OQPSK [véase Ec. (10.52)]. De esto se concluye que la detección de MSK como dos canales binarios ortogonales proporciona una ventaja de 3 dB E/η sobre la detección de FSK ortogonal. Nótese que el tiempo de integración para la detección con filtro acoplado para cada una de las señales en cuadratura es de $2T_b$ segundos. La eficiencia del ancho de banda de la MSK es de 2 bps/Hz, la misma que para la señalización QPSK y OQPSK.

Ahora pongamos atención a la densidad espectral de potencia de las señales MSK. En el ejemplo 8.13.2 se mostró que la densidad espectral de potencia de una señal

http://libreria-universitaria.blogspot.com

binaria aleatoria con niveles posibles de $\pm A$, forma de pulso determista $x(t)$ en $(0, T_b)$, y tiempo de inicio distribuido de manera uniforme en $(0, T_b)$ que estaba dada por

$$S_x(\omega) = \frac{A^2|X(\omega)|^2}{T_b}, \tag{10.74}$$

donde $X(\omega)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$. Una extensión de estos métodos a las componentes en fase y en cuadratura $x(t)$, $y(t)$

$$z(t) = x(t) + jy(t) \tag{10.75}$$

en $(0, T_s)$ con amplitudes aleatorias A_1, A_2, respectivamente, da el resultado

$$S_z(\omega) = \frac{A_1^2|X(\omega)|^2 + A_2^2|Y(\omega)|^2}{T_s}. \tag{10.76}$$

Éstas son representaciones de señal pasabajas de valor complejo; la densidad espectral de potencia para la correspondiente señal pasabanda real

$$\phi(t) = \mathcal{R}e\{z(t)e^{j\omega_c t}\} \tag{10.77}$$

está dada por

$$S_\phi(\omega) = \tfrac{1}{2}S_z(\omega - \omega_c) + \tfrac{1}{2}S_z(\omega + \omega_c). \tag{10.78}$$

Para BPSK, se tiene $x(t) = \text{rect}\,(t/T_b)$, y utilizando la ecuación (10.74), se obtiene

$$S_x(\omega) = A^2T_b\,\text{Sa}^2(\omega T_b), \qquad \text{BPSK}. \tag{10.79}$$

Normalizando a la misma potencia promedio para QPSK y OQPSK que para BPSK, se obtiene $A_1 = A_2 = A/\sqrt{2}$ y $x(t) = \text{rect}\,(t/T_s)$. Para QPSK, $y(t) = x(t)$, y para OQPSK, $y(t) = x(t - T_s/2)$; en cualquier caso, el uso de la ecuación (10.76) da

$$S_z(\omega) = 2A^2T_b\,\text{Sa}^2(\omega T_b), \qquad \text{QPSK}. \tag{10.80}$$

Para MSK, se tiene $A_1 = A_2 = A$ y $x(t) = \cos(\pi t/T_s)\,\text{rect}\,(t/T_s)$, que da

$$S_z(\omega) = \frac{16A^2T_b}{\pi^2}\left[\frac{\cos(\omega T_b)}{1 - (2\omega T_b/\pi)^2}\right]^2, \qquad \text{MSK}. \tag{10.81}$$

Las gráficas de las ecuaciones (10.80), (10.81) se muestran en la figura 10.32. De estas gráficas, se observa que la MSK tiene un lóbulo principal más amplio (el primer cero está en $0.75/T_b$) que QPSK y OQPSK (el primer nulo se encuentra en $0.50/T_b$), pero la densidad espectral de potencia de la MSK tiene menos lóbulos laterales que la QPSK y la OQPSK a frecuencias más alejadas de la frecuencia portadora. Estas observaciones se basan en las comparaciones de varias medidas de ancho de banda listadas en la tabla 10.1.

Los circuitos de modulación/demodulación para la MSK no son mucho más difíciles de construir que los de la OQPSK. En la figura 10.33 se muestra un diagrama de bloques de un modulador MSK. El receptor con filtro acoplado MSK es similar al utilizado para la OQPSK excepto por que las señales de referencia para la detección síncrona de las componentes en fase y cuadratura son $\cos(\pi t/2T_b)\cos\omega_c t$ y $\text{sen}\,(\pi t/2T_b)\,\text{sen}\,\omega_c t$, respectivamente. En el problema 10.7.5 se describe un sistema de recuperación de portadora para MSK.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

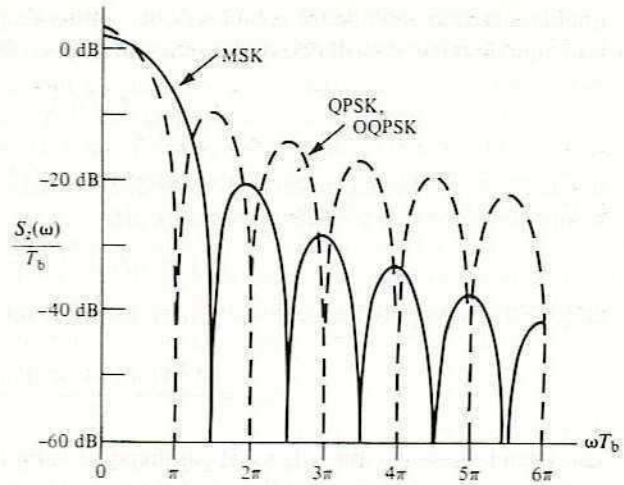


Figura 10.32 Densidades espectrales de potencia para las señales QPSK, OQPSK y MSK.

TABLA 10.1 Comparación de anchos de banda para señalización MSK y QPSK

Tipo de modulación	Anchos de banda		
	-3 dB	-50 dB	99% de contenido de potencia
QPSK, OQPSK	$0.44/T_b$	$100/T_b$	$10.3/T_b$
MSK	$0.59/T_b$	$8.18/T_b$	$1.17/T_b$

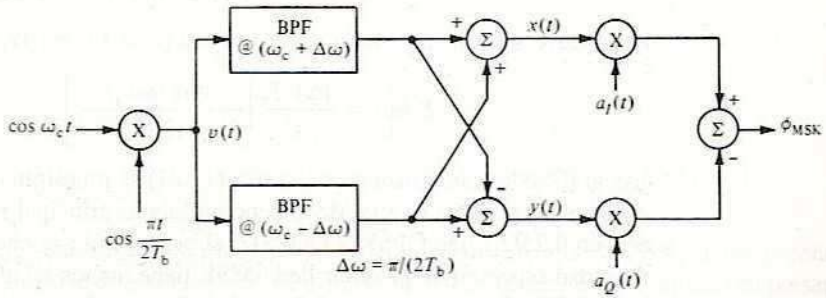


Figura 10.33 Modulador para MSK.

El análisis precedente enfocó la atención en la estructura de un modulador paralelo para la generación de MSK. Esto se dedujo en forma natural del análisis de la OQPSK. Es interesante observar que la generación de MSK también se puede lograr utilizando un método modulador en serie. Para ayudar a entender este método, en primer lugar se considera la respuesta $g_1(t)$ de un filtro lineal invariable en el tiempo con respuesta al impulso rectangular $h(t)$ en $(0, T_b)$ si la entrada $x(t)$ también es rectangular con duración

http://libreria-universitaria.blogspot.com

$(0, T_b)$. Como es bien sabido desde el capítulo 3, la salida resultante es triangular en $(0, 2T_b)$ y, además de efectos de retardo, está dada por la forma simétrica

$$g_1(t) = \text{rect}\,(t/T_b) \circledast \text{rect}\,(t/T_b) = T_b\Lambda(t/T_b)\,. \tag{10.82}$$

Notando que la MSK requiere una ponderación semisenoidal en $(0, 2T_b)$ en lugar de la ponderación triangular, se decide incluir un desplazamiento de frecuencia w_1 en la respuesta al impulso; esto es,

$$g_2(t) = \text{rect}\,(t/T_b) \circledast e^{j\omega_1 t}\,\text{rect}\,(t/T_b)\,, \tag{10.83}$$

lo que da

$$g_2(t) = \frac{2}{\omega_1} e^{j\omega_1 t/2}\,\text{sen}[\omega_1(t + T_b)/2], \qquad -T_b \le t < T_b\,. \tag{10.84}$$

Para la ponderación semisenoidal deseada para MSK, se elige $\omega_1 T_b = \pi$; usando esta elección particular de frecuencia, la respuesta del filtro $g_2(t)$ es

$$g_2(t) = \frac{2T_b}{\pi} e^{j(\pi/2T_b)t} \cos\left(\frac{\pi}{2T_b}\right)t, \qquad -T_b \le t < T_b\,. \tag{10.85}$$

Observando este resultado, vemos que se ha generado la ponderación semisenoidal deseada para MSK, pero tenemos un desplazamiento de frecuencia indeseado (hacia arriba) en el resultado. Se busca eliminar este desplazamiento heterodinizando la entrada $f(t)$ (hacia abajo) por $\omega_1/2$ y manteniendo fija la diferencia de frecuencia neta entre $f(t)$ y $h(t)$:

$$g_3(t) = e^{-j\omega_1 t/2}\,\text{rect}\,(t/T_b) \circledast e^{j\omega_1 t/2}\,\text{rect}\,(t/T_b)\,, \tag{10.86}$$

lo que da

$$g_3(t) = \frac{2}{\omega_1}\,\text{sen}[\omega_1(t + T_b)/2], \qquad -T_b \le t < T_b\,. \tag{10.87}$$

De nuevo, si se elige $\omega_1 T_b = \pi$, se obtiene

$$g_3(t) = \frac{2T_b}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2T_b}\right), \qquad -T_b \le t < T_b\,. \tag{10.88}$$

Esto cumple el objetivo de encontrar las operaciones apropiadas en serie a fin de generar las ponderaciones deseadas para MSK para una secuencia de datos de entrada. En la figura 10.34 se muestra un diagrama de bloques del modulador en serie para MSK.

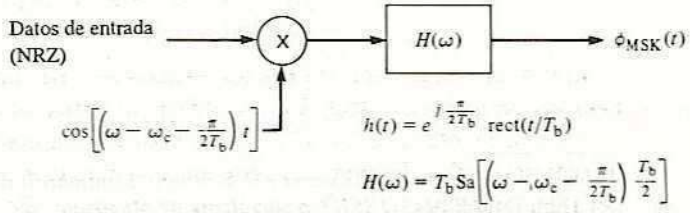


Figura 10.34 Modulador en serie para la generación de MSK.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

El demodulador en serie para MSK consiste en un filtro acoplado pasabanda y un detector síncrono, con los desplazamientos de frecuencia apropiados; en esencia, realiza las operaciones inversas al modulador MSK en serie de la figura 10.34.† El filtro acoplado pasabanda debe muestrear en los instantes correctos para tener una interferencia entre símbolos nula porque la respuesta en el tiempo del modulador MSK a una duración de bit de entrada T_b ocurre en un tiempo $2T_b$. Sin embargo, el desplazamiento de frecuencia se elige para que proporcione ortogonalidad en los puntos de muestreo correctos. Desde una perspectiva teórica, el desempeño de los métodos en serie y en paralelo para MSK son idénticos. Los sistemas de modulación y demodulación MSK en serie tienen alguna ventaja en sistemas de alta velocidad de datos porque no requieren la estructura cuidadosamente balanceada de un modulador en paralelo para un buen desempeño.

En resumen, la MSK se puede considerar ya sea como una señal OQPSK con pulso de ponderación senoidal o como una señal CPFSK con separación de frecuencia ($2\Delta f$) igual a un medio de la tasa de bits. La señal MSK tiene una fase continua en los instantes de transición de bit y tiene la ventaja de una envolvente constante y una densidad espectral de potencia que disminuye a una tasa proporcional a ω^{-4}, alejándose de la frecuencia portadora. La tasa de caída espectral se puede mejorar utilizando otras ponderaciones en las componentes en fase y en cuadratura, por ejemplo $\text{Sa}(2\pi t/T_b)$, pero a expensas de un lóbulo principal más ancho en la densidad espectral de potencia.

La señalización CPFSK se puede generalizar para incluir otras elecciones de $\Delta\omega$ y el uso de tiempos de integración mayores antes de llevar a cabo la decisión en recepción. Sin embargo, las mejoras potenciales en el desempeño son pequeñas y se consiguen a expensas de una mayor complejidad del sistema. En general, la MSK ofrece un compromiso para sistemas digitales en los que la conservación del ancho de banda y la utilización de transmisores de saturación en amplitud (no lineales) son requisitos importantes.

EJEMPLO 10.7.1

Demuestre que el sistema ilustrado en la figura 10.33 es capaz de generar una señal MSK.

Solución En la salida del primer mezclador de frecuencia, se tiene la señal DSB-SC

$$v(t) = \tfrac{1}{2}\cos(\omega_c - \Delta\omega)t + \tfrac{1}{2}\cos(\omega_c + \Delta\omega)t,$$

donde $\Delta\omega = \pi/(2T_b)$. cada BPF (supuesto ideal) atenúa una banda lateral, y las salidas del filtro se combinan para dar

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{1}{2}\cos(\omega_c - \Delta\omega)t + \tfrac{1}{2}\cos(\omega_c + \Delta\omega)t, \\ &= \cos\Delta\omega t\ \cos\omega_c t; \\ y(t) &= \tfrac{1}{2}\cos(\omega_c - \Delta\omega)t - \tfrac{1}{2}\cos(\omega_c + \Delta\omega)t, \\ &= \operatorname{sen}\Delta\omega t\ \operatorname{sen}\omega_c t. \end{aligned}$$

† Véase, por ejemplo, R. E. Ziemer y C. R. Ryan, "Minimun Shift-Keyed Modem Implementations for High Data Rates", *IEEE Communications Magazine*, vol. 21, octubre de 1983, pág. 28; en este artículo se citan referencias adicionales.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Modulando con las corrientes de datos $a_I(t)$ y $a_Q(t)$, respectivamente, se obtiene la señal MSK deseada [véase Ec. (10.72)],

$$\phi_{\text{MSK}}(t) = a_I(t) \cos \Delta\omega t \cos \omega_c t - a_Q(t) \operatorname{sen} \Delta\omega t \operatorname{sen} \omega_c t .$$

EJERCICIO 10.7.1

¿Qué relación se debe mantener entre la frecuencia portadora f_c y la tasa de bits f_b en un sistema MSK si las transiciones de bit se deben producir en los cruces por cero de la portadora?

RESPUESTA: $f_c = nf_b/4$, con n entero.

10.8 ★ FSK ORTOGONAL *M*-ARIA

Dos recursos básicos en sistemas de comunicación son la potencia transmitida y el ancho de banda del canal. En términos de la capacidad del canal, están relacionados por el teorema de Hartley-Shannon. Uno de estos recursos puede ser más preciado que el otro en una situación particular, y por tanto muchos canales pueden clasificarse con limitación primaria ya sea en potencia o en ancho de banda. Las secciones precedentes han hecho énfasis en métodos espectralmente eficientes de modulación digital que tienen aplicación en canales de banda limitada. Esta sección se centrará en la señalización ortogonal *M*-aria, que es más útil en canales de potencia limitada para conservar la potencia transmitida, a expensas de un ancho de banda adicional y de la complejidad del equipo.

En una serie de señales *M*-arias, cada una se transmite en el intervalo $(0, T_s)$; el interés se centra en identificar cada símbolo de manera única en el receptor. Para hacerlo, se hace uso de un conjunto de M señales ortogonales, $\phi_n(t)$. Estas señales se eligen de igual energía E_s y satisfacen la condición de ortogonalidad [véase Ec. (2.21)]

$$\int_0^{T_s} \phi_n(t)\phi_m(t)\, dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ E_s & n = m \end{cases} . \tag{10.89}$$

Se pueden elegir muchos conjuntos diferentes de funciones ortogonales, pero estamos interesados sobre todo en la conmutación de frecuencia y, por tanto, se elige el conjunto de senoidales

$$\phi_n(t) = A \cos \omega_n t \qquad 0 < t \leq T_s . \tag{10.90}$$

Si se usa la ecuación (10.90) en la (10.89), se requiere una separación de frecuencia mínima entre las señales $\phi_n(t)$ de

$$(\omega_m - \omega_n)_{\text{mín}} = \frac{\pi}{T_s} . \tag{10.91}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Usando este resultado, se encuentra que el ancho de banda mínimo necesario en la señalización utilizando $\phi_n(t)$ es

$$B_{\text{mín}} \approx \frac{M}{2T_s}, \tag{10.92}$$

donde

$$T_s = T_b \log_2 M. \tag{10.93}$$

El receptor óptimo para este conjunto de señales ortogonales consiste en un banco de M filtros acoplados, como se muestra en la figura 10.35 (es interesante comparar esta figura con las figuras 2.5 y 7.49). En los tiempos $t = kT_s$, se determina cuál salida del filtro acoplado es la más grande, y ese símbolo de salida se toma como el correcto para un intervalo de símbolo. En presencia de ruido, se presentan algunos errores en la elección. Si el ruido es blanco aditivo gaussiano con media cero y con densidad espectral de potencia $S_n(\omega) = \eta/2$, se puede demostrar que la probabilidad de que sea correcto es[†]

$$P_c = \frac{1}{\pi^{M/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \left(\int_{-\infty}^{z+\sqrt{E_s/\eta}} e^{-y^2} dy \right)^{M-1} dz. \tag{10.94}$$

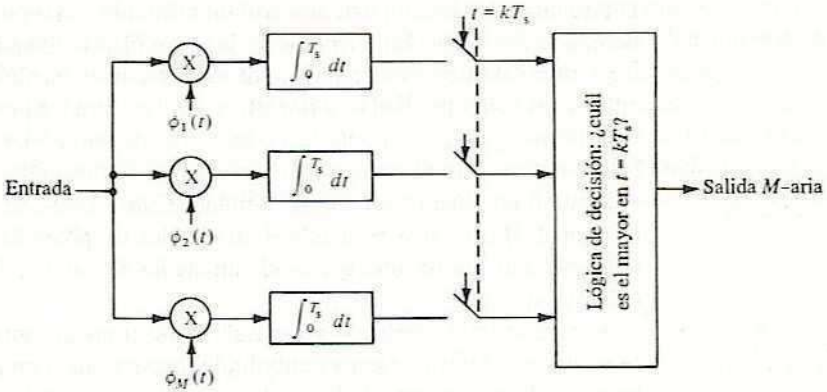


Figura 10.35 Receptor óptimo para señalización ortogonal M-aria.

Entonces la probabilidad de error se puede encontrar a partir de

$$P_\epsilon = 1 - P_c. \tag{10.95}$$

La integración en la ecuación (10.94) se puede evaluar numéricamente en términos de E_s/η.[‡] Algunos resultados se muestran graficados en la figura 10.36 contra $E_s/(\eta \log_2 M)$.[§] Usando tanto $E_s = ST_s$, donde S es la potencia promedio $(A^2/2)$ de la señal, como la ecuación (10.93), se puede escribir

$$\frac{E_s}{\eta \log_2 M} = \frac{ST_b}{\eta}. \tag{10.96}$$

[†] W. C. Lindsey y M. K. Simon, *Telecommunication Systems Engineering*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1973, Cap. 5.

[‡] Las tablas de P_ϵ se presentan en W. C. Lindsey y M. K. Simon, *op. cit.*

[§] Nótese que esto se podría expresar en términos de una energía equivalente por bit, E_b, haciendo $E_b = E_s/\log_2 M$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

También se muestran en la tabla 10.2 algunos valores de $E_s/(\eta \log_2 M)$ para una probabilidad de error dada.

Con base en los resultados de la tabla 10.2 y en la figura 10.36, se concluye que las necesidades de potencia promedio para η, T_b y P_ϵ fijas en señalización ortogonal M-aria, disminuye conforme M aumenta. Sin embargo, el ancho de banda requerido aumenta en proporción a M [véase Ec. (10.92)], y valores mayores que M tienden a aumentar la complejidad del equipo de transmisión y recepción. Por tanto, la señalización ortogonal M-aria conserva la potencia, a expensas de ancho de banda y complejidad del equipo.

TABLA 10.2 Requisitos de *S/N* para señalización ortogonal *M*-aria para tasas de error fijas

		$E_s/(\eta \log_2 M)$	
$\log_2 M$	M	$P_\epsilon = 10^{-4}$	$P_\epsilon = 10^{-5}$
1	2	13.8	18.2
2	4	7.94	10.1
3	8	5.82	7.29
4	16	4.72	5.83
5	32	4.04	4.94
6	64	3.58	4.34
7	128	3.25	3.91
8	256	3.00	3.58
9	512	2.81	3.33
10	1024	2.65	3.12
∞	∞	0.69	0.69

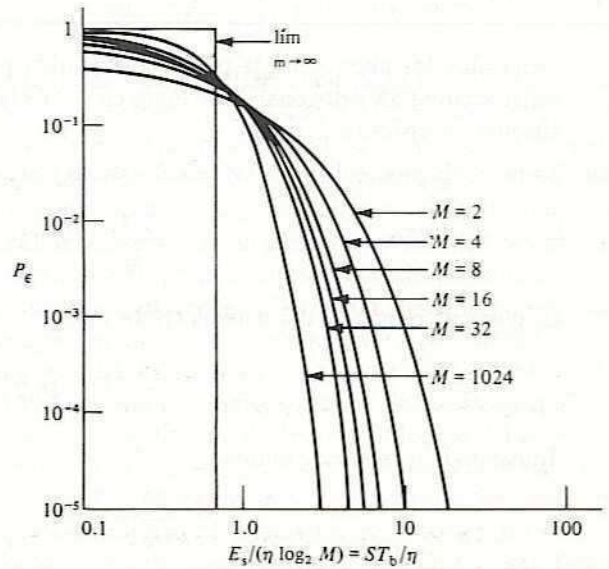


Figura 10.36 Probabilidad de error para señalización ortogonal M-aria.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Un resultado más sorprendente es que conforme $M \to \infty$, el método de señalización M-aria es capaz de transmitir información libre de errores ($P_\epsilon \to 0$) si $E_s/(\eta \log_2 M) > 1/(\log_2 e)$. Por el contrario, la probabilidad de error se reduce a la certeza ($P_\epsilon \to 1$) si

$$\frac{E_s}{\eta \log_2 M} < \frac{1}{\log_2 e};$$

en esta condición, el sistema falla completamente en cualquier intento de transmisión de información. Por tanto, la tasa de bits límite f_b conforme $M \to \infty$ es, usando la ecuación (10.96),

$$\lim_{M \to \infty} f_b = \frac{S}{\eta} \log_2 e. \tag{10.97}$$

Como el ancho de banda es proporcional a M, la ecuación (10.97) es exactamente lo que se obtuvo en el ejemplo 9.2.3 para la capacidad de canal de un sistema idealmente codificado que opera en un canal sin limitación en el ancho de banda. Por tanto, se ha tenido éxito en demostrar un método de señalización que, al menos en teoría, ¡es capaz de acercarse al límite de la teoría de Shannon-Hartley!

Por último, se nota que los principios básicos de la señalización ortogonal son aplicables a una elección mucho más amplia de señales ortogonales que las senoidales. Nuestro interés particular aquí son las senoidales como ejemplo de modulación FSK. Sin embargo, en un sentido más amplio la señalización ortogonal M-aria es un método de codificar la información y puede incluir conjuntos de señales ortogonales más generales (p. ej., véanse los del problema 2.5.3).

EJEMPLO 10.8.1

Determine los ahorros en la potencia requerida para el transmisor, suponiendo una señalización FSK ortogonal de 16 tonos en vez de la QPSK del ejemplo 10.6.1 si ambos sistemas se operan a $P_\epsilon = 10^{-5}$.

Solución La potencia promedio requerida en el sistema FSK de $M = 16$ es (usando la Tabla 10.2)

$$\frac{S_1 T_b}{\eta} = 5.83.$$

La potencia promedio del sistema QPSK es

$$\frac{2S_2 T_b}{\eta} = 18.2.$$

Tomando la relación, se obtiene

$$\frac{S_1}{S_2} = 2\frac{5.83}{18.2} = 0.641 \ (-1.93 \text{ dB}).$$

El ancho de banda mínimo del sistema FSK es, usando las ecuaciones (10.92) y (10.93), $B \approx 2f_b = 88$ MHz. Además, el sistema FSK de 16 tonos utiliza 16 filtros acoplados

http://libreria-universitaria.blogspot.com

(correlacionadores), mientras que la QPSK utiliza cuatro. Por tanto, la señalización FSK ortogonal utiliza cerca de 2 dB menos de potencia promedio que la QPSK, a expensas de un ancho de banda y una complejidad del equipo mayores.

EJERCICIO 10.8.1

¿Cuál es la eficiencia máxima del ancho de banda para una señalización FSK ortogonal M-aria?

RESPUESTA: $\frac{2 \log_2 M}{M}$ bps/Hz.

10.9 SISTEMAS DE ESPECTRO EXPANDIDO POR SALTO DE FRECUENCIA (FH)

Una alternativa al espectro expandido DS, analizado en la sección 10.5, es el *espectro expandido por salto de frecuencia* (FH, *frequency hopping*). En el espectro expandido FH, la densidad espectral de la portadora modulada por datos se amplía cambiando la frecuencia de la portadora a una velocidad llamada tasa de salto. Aunque se pueden utilizar otros tipos de modulación, los sistemas de espectro expandido FH utilizan a menudo la conmutación de frecuencia para la modulación de datos. Si se utiliza FSK binaria, la señal de espectro expandido FH se puede escribir como [véase Ec. (10.13)]:

$$\chi(t) = A \operatorname{sen}\left\{\int_0^t [\omega_c + (\Delta\omega)p(t)]\,dt\right\},$$

donde $\Delta\omega$ es el desplazamiento de frecuencia de la portadora y $p(t)$ es una función de conmutación binaria con estados posibles ± 1. La frecuencia de portadora, ω_c, en la señal FH es una constante para un intervalo T_h y luego cambia a otra frecuencia (preseleccionada) para el siguiente intervalo de tiempo; la velocidad a la que se realizan los cambios se llama tasa de salto de frecuencia, f_h. En la figura 10.37(a) se muestra un diagrama de bloques de un sistema de modulación para generar la señal de espectro expandido FH. El sintetizador de frecuencia produce una senoidal de amplitud constante cuya frecuencia está determinada por el código digital suministrado al sintetizador. Éste es un componente esencial de los sistemas de espectro expandido FH.

En el receptor, el salto de frecuencia se elimina mezclando la señal FH con la señal de un oscilador local que también salta en forma sincronizada con la señal transmitida. En la figura 10.37(b) se muestra un diagrama de bloques del receptor FH. La señal de entrada se mezcla con la portadora de salto de frecuencia para producir una señal modulada por datos a frecuencia intermedia. A continuación, esta señal de frecuencia intermedia se demodula usando los métodos descritos en las secciones precedentes. Como resultado de las dificultades de construir sintetizadores de frecuencia totalmente coherentes (y de mantener la coherencia de fase), muchos de los sistemas de espectro expandido FH usan modulación no coherente o diferencialmente coherente.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

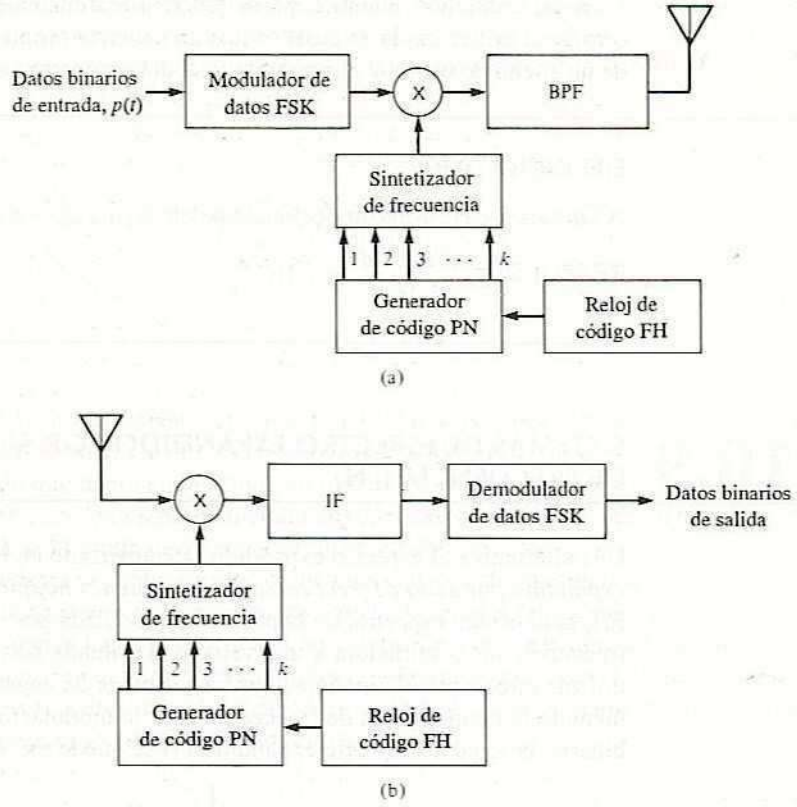


Figura 10.37 Espectro expandido FH: (a) modulación; (b) demodulación.

Una ventaja del espectro expandido FH es que permite un control separado de la tasa de salto (chip) y el ancho de banda. Eligiendo la frecuencia portadora de un conjunto de 2^k frecuencias, cada una espaciada por el ancho de banda del espectro de datos modulados. Por tanto, el factor de expansión del ancho de banda es 2^k veces el ancho de banda necesario para la modulación de datos sin expansión del espectro. Sin embargo, no es necesario que éste sea el caso. La tasa de salto se elige de manera independiente de la consideración del ancho de banda. Un sistema de "salto lento" es aquel en el que la tasa de salto de frecuencia, f_h, es menor o igual que la tasa de símbolos; es decir, $f_h \leq f_b$ para FSK binaria (si se utilizara FSK M-aria, entonces sería $f_h \leq f_b/\log_2 M$). La ganancia de procesamiento de un sistema de espectro expandido es la razón del ancho de banda del espectro expandido al mínimo ancho de banda necesario para los datos. La ganancia de procesamiento es una medida de la inmunidad relativa del sistema a la interferencia. Como la energía en el sistema de espectro expandido FH anterior está distribuida en 2^k bandas espectrales en vez de estarlo en una banda espectral de modulación, la ganancia de procesamiento aproximada del sistema de espectro expandido es 2^k. En otras palabras, el agente perturbador debe colocar energía uniforme a lo largo de 2^k bandas para provocar que el receptor tenga el mismo desempeño que sin espectro expandido.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Sin codificación, los sistemas de espectro expandido FH son susceptibles de interferencia de banda parcial. El agente perturbador transmite una señal cuyo ancho de banda es relativamente pequeño comparado con el del sistema de espectro expandido y se concentra en una porción de la banda en uso. Como resultado, cuando el sistema de espectro expandido FH elige esa porción en la banda para transmitir, la tasa de error en los datos detectados se vuelve muy alta. Para atenuar este efecto, la tasa de salto de frecuencia se debe aumentar a la de varios (o más) saltos de frecuencia por cada duración de bit de datos. Estos sistemas de "salto rápido" usan tasas de salto de frecuencia $f_h > f_b$ para FSK binaria ($f_h > f_b \log_2 M$ para FSK M-aria), y por tanto proporcionan alguna diversidad de frecuencia en cada símbolo transmitido. Sin embargo, esto quizá no sea suficiente para obtener una tasa de error aceptable, y se pueden utilizar códigos correctores de error en los datos para proporcionar un mayor margen contra la interferencia de banda parcial.

Un área problemática en la utilización de sistemas de espectro expandido es la de la sincronización. Como en el espectro expandido DS, la sincronización de código de expansión se divide en dos modos: (1) adquisición y (2) rastreo. La adquisición para un sistema FSK-FH es similar al esquema de búsqueda en serie utilizado para el espectro expandido DS, excepto que el generador de secuencia PN controla un sintetizador de frecuencia para producir las frecuencias de salto en vez de multiplicar directamente por el código PN. En la figura 10.38 se muestra un diagrama de bloques de un sistema de adquisición para la señal FH. El filtro de frecuencia intermedia (IF, *intermediate frequency*) del receptor tiene un ancho de banda del orden de $2f_h$. El detector de envolvente proporciona una medida relativa del parecido entre los códigos de salto de frecuencia, y el detector de umbral se fija para que se active cuando el parecido sea aceptable. A falta de un parecido aceptable, el generador de secuencia PN se adelanta y el proceso se repite. Una variación, llamada "acampar y esperar", consiste en detener totalmente la secuencia del generador PN hasta que se encuentre un parecido y luego se inicia la secuencia. Cuando se encuentra un parecido adecuado, el sistema indica que se alcanzó la sincronización y que debe empezar el rastreo. Una opción es utilizar un modo de "verificación" como tercer modo (e intermedio) para confirmar el parecido un número predeterminado de veces antes de proceder al modo de rastreo.

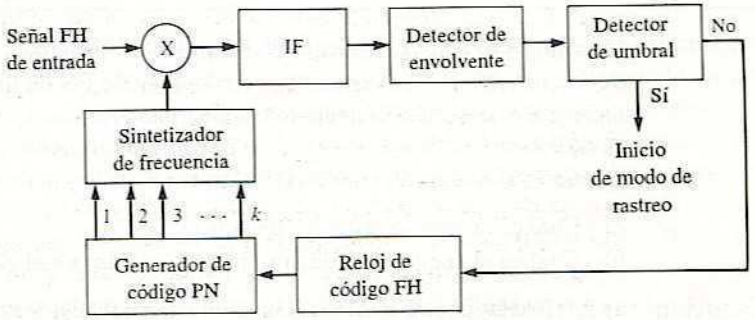


Figura 10.38 Adquisición por búsqueda en serie para espectro expandido FH.

Una vez lograda la adquisición, el sistema de sincronización se activa para rastrear la señal FH de entrada. La sincronización del espectro expandido FH se puede lograr sustituyendo un PLL por el reloj de código de salto de frecuencia utilizado en el sistema

http://libreria-universitaria.blogspot.com

de adquisición. La salida del filtro IF (pasabanda) se aproxima a cero cuando las dos señales en la entrada del mezclador son de frecuencias diferentes, y es máxima cuando las dos frecuencias son iguales. Cuando existe una diferencia de sincronía entre el código de entrada FH y el sintetizador de frecuencia, la salida resultante del detector de umbral es una señal binaria 0, 1: 0 para la porción de un ciclo en el que difieren las frecuencias, y 1 cuando coinciden. Esto se muestra en la figura 10.39. El PLL se cierra a esta señal binaria, y la salida VCO del PLL se utiliza para guiar al generador PN hacia un alineamiento más cercano.

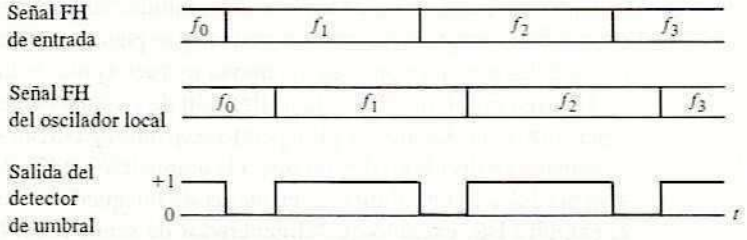


Figura 10.39 Señales para sincronización de FH (rastreo).

Los sistemas de espectro expandido tanto DS como FH se desarrollaron para utilizarse en sistemas de comunicación modernos y seguros. Actualmente, los primeros tienden a ser más aplicables a sistemas comerciales de comunicación por satélite usando el método de acceso aleatorio, mientras que los últimos son más populares en sistemas militares. Como la precisión con la que los códigos PN se pueden alinear es inversamente proporcional a la duración de chip, estos métodos también encuentran aplicaciones en sistemas de radar, sonar y navegación para cálculo de distancias.

Un tercer método de expansión de espectro es emplear ambas técnicas, DS y FH, en un sistema híbrido. Dichos sistemas híbridos ofrecen posibilidades de una muy amplia expansión de espectro.

EJEMPLO 10.9.1

Un sistema de espectro expandido FH utiliza MSK para la modulación de datos. El salto de frecuencia está gobernado por una secuencia PN de longitud máxima generada por un registro de desplazamiento retroalimentado de 10 etapas. La tasa de reloj del registro es de 2 kHz y la tasa de datos es de 20 kbps. El conjunto de frecuencias sintetizadas en respuesta al código PN tiene espaciamientos de frecuencia de 10 kHz.

a) ¿Cuál es la tasa de salto de frecuencia?
b) ¿Cuál es el ancho de banda mínimo requerido por el sistema?

Solución a) $f_h = 2$ kHz; puesto que la tasa de modulación de datos es de 20 kHz, éste es un sistema de salto lento.
b) $B = [(2^{10} - 2)(10) + 20 + 2]$ kHz, o $B = 10.24$ MHz.

Por tanto, la expansión FH es el efecto dominante para determinar el ancho de banda.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

10.10 PSK M-ARIA

Existe un creciente interés en métodos de modulación multinivel para sistemas de comunicación digitales que se requieren para manejar altas velocidades de datos con restricciones de anchos de banda fijos. En esta sección se investiga el uso de la modulación PSK M-aria con este propósito. En una sección posterior se analizarán otros métodos.

Un conjunto conveniente de señales para PSK M-aria es

$$\phi_i(t) = A \cos(\omega_c t + \theta_i), \qquad 0 < t \leq T_s, \tag{10.98}$$

donde los M posibles ángulos de fase θ_i se eligen como

$$\theta_i = 0, \frac{2\pi}{M}, \frac{4\pi}{M}, \cdots, \frac{2(M-1)\pi}{M}. \tag{10.99}$$

La densidad espectral de potencia unilateral de PSK M-aria, para una entrada binaria aleatoria con unos y ceros equiprobables a una tasa de bits de $f_b = 1/T_b$, es

$$S_\phi(\omega) = A^2 T_s \, \mathrm{Sa}^2\left[(\omega - \omega_c)\frac{T_s}{2}\right] \tag{10.100}$$

donde T_s es la duración de un símbolo unitario dada por

$$T_s = T_b \log_2 M. \tag{10.101}$$

Como el ancho de banda mínimo necesario es $B = f_s$, la eficiencia potencial del ancho de banda de la PSK M-aria es

$$\frac{f_b}{B} = \log_2 M \text{ bps/Hz}. \tag{10.102}$$

Por ejemplo, los sistemas de señalización con $M = 8$ pueden transmitir datos con eficiencias de ancho de banda de hasta 3 bps/Hz.

En la figura 10.40(a) se muestra un diagrama fasorial para PSK M-aria, con $M = 8$. Todas las señales en el conjunto tienen igual energía E_s en un intervalo de símbolo $(0, T_s)$, y cada señal se demodula de manera correcta en el receptor si la fase está dentro de $\pm\pi/M$ radianes de la fase correcta θ_i en el momento del muestreo. Por tanto, los umbrales de decisión en el receptor están centrados en ángulos de fase entre las θ_i, como se muestra en la figura 10.40(a). Ninguna información está contenida en la amplitud de la señal, y se supone que la amplitud de entrada está limitada a un nivel fijo. Todos los estados posibles de la señal (si se supone el caso libre de ruido) se ubican en espaciamientos equidistantes en un patrón circular centrado en el origen, como se muestra para el caso $M = 8$ en la figura 10.40(b). El tipo de diagrama de estados de señal mostrado en la figura 10.40(b) se llama *constelación de señales*. Las constelaciones de señales para PSK M-aria tienen simetría circular, y la elección usual de M es una potencia de 2.

En presencia de ruido, el cálculo de la probabilidad de error implica calcular que la fase recibida caiga fuera del segmento angular $(-\pi/M) \leq \theta_i < (\pi/M)$ el momento del

http://libreria-universitaria.blogspot.com

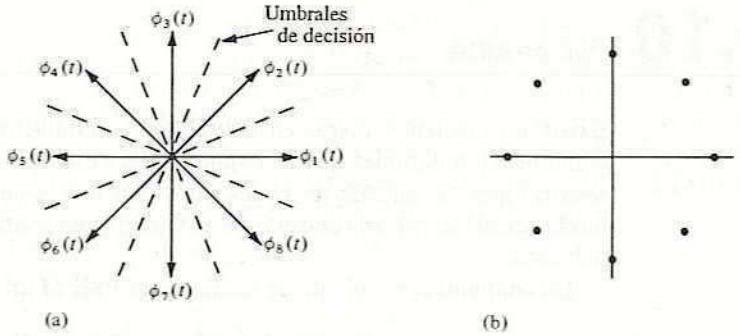


Figura 10.40 Diagramas para PSK *M*-aria, $M = 8$: (a) diagrama fasorial; (b) constelación de estados de la señal.

muestreo. Es difícil calcular esto de manera exacta.† En la figura 10.41 se grafican algunos resultados numéricos en función de $E_s/(\eta \log_2 M)$.‡ Además, en la tabla 10.3 aparecen algunos valores de $E_s/(\eta \log_2 M)$ para una probabilidad de error dada. Para $P_\epsilon < 10^{-3}$, la probabilidad de error de la PSK *M*-aria se puede aproximar por§

$$P_\epsilon \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{\eta}\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{M}}\right), \qquad M > 2. \tag{10.103}$$

Esta aproximación mejora para una *M* fija, a medida que aumenta E_s/η. Se debe observar que estos resultados son para la probabilidad de error de *símbolo*.

Para una *M* grande, $\operatorname{sen}^2(\pi/M) \approx \pi^2/M^2$; a fin de remediar esto para una P_ϵ fija, E_s/η se debe aumentar por un factor de 4 (6 dB) para una duplicación en *M*. La probabilidad de error de bit, P_{be}, se puede encontrar modificando los resultados precedentes de acuerdo con los métodos descritos en la sección 9.12. En particular, si se usa código de Gray (el caso usual),

$$P_{be} \cong P_\epsilon/\log_2 M \tag{10.104}$$

si P_ϵ es aceptablemente pequeña [véase Ec. (9.130)].

Los valores mostrados en la tabla 10.3 indican que la QPSK ($M = 4$) ofrece un buen intercambio entre potencia y ancho de banda, requiriendo aumentos muy modestos (0.3-0.4 dB) en la potencia transmitida para una eficiencia potencial duplicada del ancho de banda por encima del de la PSK coherente ($M = 2$). Por esta razón, la QPSK es muy utilizada en la práctica para transmitir a tasas de datos medias en canales de banda limitada, aun en situaciones en que la potencia transmitida tiene un interés primordial (p. ej., transmisiones por satélite de alta velocidad). Para transmisiones de mayor tasa

† Véase, por ejemplo, S. Stein y J. J. Jones, *Modern Communication Principles*, Nueva York, McGraw-Hill, 1967, Cap. 14.

‡ Las tablas de P_ϵ se dan en W. C. Lindsey y M. K. Simon, *Telecommunication Systems Engineering*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1973, pág. 232.

§ W. C. Lindsey y M. K. Simon, *op. cit.*; véase también J. R. Pierce y E. C. Posner, *Introduction to Communicaction Science and Systems*, Nueva York, Plenum Press, 1980, pág. 238.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

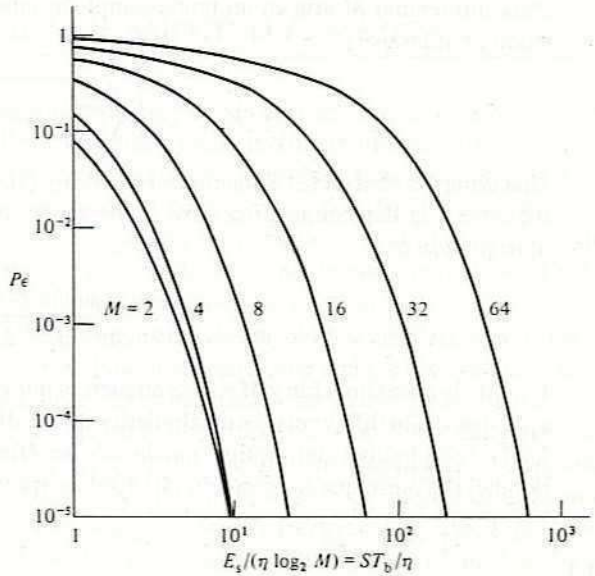


Figura 10.41 Probabilidad de error de la PSK *M*-aria

TABLA 10.3 Requisitos *S/N* de la PSK *M*-aria para tasas de error fijas

		$E_s/(\eta \log_2 M)$	
$\log_2 M$	M	$P_\epsilon = 10^{-4}$	$P_\epsilon = 10^{-5}$
1	2	6.92 (8.40 dB)	9.10 (9.59 dB)
2	4	7.57 (8.79 dB)	9.75 (9.89 dB)
3	8	17.2 (12.4 dB)	22.2 (13.5 dB)
4	16	49.7 (17.0 dB)	64.1 (18.1 dB)
5	32	158.0 (22.0 dB)	203.0 (23.1 dB)
6	64	523.0 (27.2 dB)	673.0 (28.3 dB)

de datos en canales de banda limitada, es usual la elección de $M = 8$. Aunque esta elección ofrece una eficiencia potencial del ancho de banda de 3 bps/Hz, presenta una pérdida de *S/N* de casi 4 dB (véase Tabla 10.3) con respecto al ancho de banda requerido para PSK coherente ($M = 2$) a tasas de error entre 10^{-4} y 10^{-5}. Las elecciones de $M > 8$ se utilizan raras veces en señalización PSK *M*-aria como resultado de la excesiva necesidad adicional de potencia.

Cuando se compara con la señalización BPSK, el uso de PSK *M*-aria requiere una mayor complejidad del equipo para generación y detección, incluyendo la recuperación de portadora. El requisito para la recuperación de portadora en detección coherente se puede solucionar usando una comparación entre las fases de dos símbolos sucesivos. Éste es el mismo concepto descrito en la sección 10.3 para señalización DPSK con $M = 2$, y se llama *PSK diferencial M-aria*. La derivación de la probabilidad de error para

http://libreria-universitaria.blogspot.com

PSK diferencial M-aria es un tanto compleja; una aproximación para razones señal a ruido grandes es[†]

$$P_\epsilon \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{\eta}\,\text{sen}^2\frac{\pi}{\sqrt{2}M}}\right). \tag{10.105}$$

Una comparación de las ecuaciones (10.103) y (10.105) muestra que, dentro de aproximaciones, la detección diferencial aumenta los requisitos de potencia por un factor aproximado de

$$\Gamma = \frac{\text{sen}^2\,\pi/M}{\text{sen}^2(\pi/\sqrt{2}M)}. \tag{10.106}$$

Usando la aproximación y $M = 4$, se encuentra que el aumento en el requisito de potencia para detección diferencial es de alrededor de 2.5 dB. En algunas aplicaciones, el ahorro en la complejidad del equipo puede ser benéfico para este aumento moderado en potencia. Nótese que la ecuación (10.106) se aproxima a 3 dB para $M \geq 8$.

EJEMPLO 10.10.1

Calcule la tasa de bits en error (BER) de un sistema PSK $M = 8$ que opera en las condiciones descritas en el ejemplo 10.6.1.

Solución Usando las ecuaciones (10.103) (10.104), se tiene

$$P_{be} = \frac{2}{\log_2 M}Q\left(\sqrt{\frac{2ST_s}{\eta}\,\text{sen}^2\frac{\pi}{8}}\right)$$

$$P_{be} = \frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{2(7.94 \times 10^{-12})\,\text{sen}^2(\pi/8)}{(1.67 \times 10^{-20})(14.67 \times 10^{6})}}\right)$$

$$P_{be} = \frac{2}{3}Q(3.08) = 6.91 \times 10^{-4}.$$

EJERCICIO 10.10.1

¿En cuántos decibeles se debe aumentar la potencia del transmisor en el sistema PSK $M = 8$ del ejemplo 10.10.1 para proporcionar la misma BER que el sistema QPSK descrito en el ejemplo 10.6.1?

RESPUESTA: 3.4 dB.

[†] W. C. Lindsey y M. K. Simon, *op. cit.*, pág. 248; también se presentan tablas de P_ϵ usando procedimientos de integración numérica.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

10.11 CONMUTACIÓN DE AMPLITUD Y FASE (APK)

La necesidad de aumentos en las velocidades de transmisión de datos en canales de banda limitada lleva a considerar sistemas de comunicación digitales en los que se utilice modulación tanto de fase como de amplitud. Esta categoría general de modulación digital se llama *conmutación de amplitud y fase* (APK). La APK ofrece la ventaja de requerir menor potencia que la PSK para una probabilidad de error dada y un alfabeto de tamaño M, aunque a costa de un aumento en la complejidad del equipo y de una sensibilidad a posibles no linealidades en el canal.

En la figura 10.42 se muestran dos posibles constelaciones de estados de señal para sistemas APK 16-arios. Nótese que cada uno incluye una combinación de modulaciones de fase y de amplitud. La constelación mostrada en la figura 10.42(a) utiliza tres amplitudes, dos con cuatro fases y una con ocho fases. En contraste, la constelación mostrada en la figura 10.42(b) utiliza cuatro amplitudes y cuatro fases. Ambas son ejemplos de constelaciones de señal utilizadas en diseños de modem de 9600 bps para canales telefónicos acondicionados en la frecuencia de 300-3000 Hz con 1650 Hz como frecuencia portadora.[†] La constelación mostrada en la figura 10.42(a) se puede generar insertando convertidores de dos a cuatro niveles en cada una de las trayectorias de las señales I y Q antes de los moduladores balanceados y los filtros pasabajas en un modulador QPSK (véase Fig. 10.23). Como los convertidores de dos a cuatro niveles reducen la tasa de símbolos por un factor de dos y el convertidor serie a paralelo reduce la tasa de símbolos por un factor de dos, se deduce que la eficiencia potencial del ancho de banda de dicho modulador es de 4 bps/Hz.

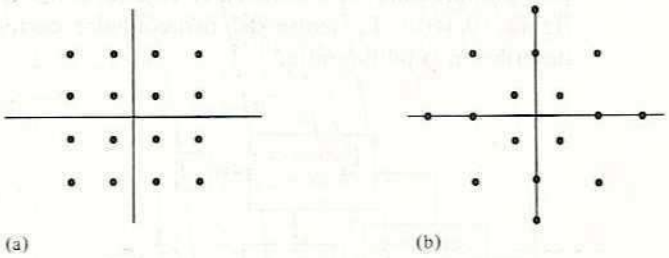


Figura 10.42 Dos ejemplos de constelaciones de estados de señal para señalización APK 16-aria.

Comúnmente, la APK se puede generar usando convertidores binarios a $L = \sqrt{M}$ niveles en cada una de las trayectorias de señal I y Q en un modulador QPSK. En este sentido, la APK se puede considerar también como QAM M-aria. En la figura 10.43 se muestra el diagrama de bloques de un demodulador APK M-ario correspondiente que usa detección en fase y en cuadratura. Los codificadores *A/D flash* de L niveles consisten

[†] Véase, por ejemplo, E. R. Kretzmer, "The Evolution of Techniques for Data Communication over Voiceband Channels", *IEEE Communications Society Magazine*, vol. 16, enero de 1978, págs. 10-14.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

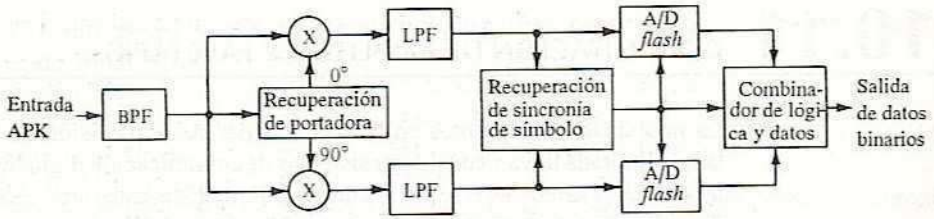


Figura 10.43 Diagrama de bloques de un demodulador APK.

cada uno en $(L - 1)$ comparadores, los cuales se fijan en los diferentes niveles de umbral. Las salidas de los comparadores se muestrean en el tiempo de muestreo correcto para determinar los estados lógicos de los comparadores. Estos estados se aplican a un circuito lógico que determina la corriente de bits de salida de las trayectorias de señal I y Q.

En canales de banda limitada con distorsión de fase y distorsión por trayectoria múltiple, a menudo el demodulador está precedido por un igualador adaptable que opera a una frecuencia intermedia (IF). La operación de estos igualadores es similar a la descrita en la sección 9.11 para operar en banda base, con la excepción de que la igualación se hace tanto para la componente I como para la Q. Los modem modernos de alta velocidad dedicados a canales de banda limitada con distorsión (p. ej., el canal telefónico) consisten a menudo en un modulador/demodulador APK con igualación adaptable.

Otro medio de generación posible, que corresponde a la constelación de estados de señal de la figura 10.42(a), es utilizar primero un convertidor serie a paralelo para dividir la corriente de datos de entrada en dos corrientes de bits, cada una a la mitad de la velocidad. Luego se pueden aplicar estas corrientes de bit a un modulador QPSK, como se muestra en la figura 10.44(a). Las salidas de los dos moduladores QPSK se suman para proporcionar un sistema APK 16-ario, como se muestra en la suma fasorial de la figura 10.44(b). La teoría del demodulador correpondiente es más compleja y se describe en la bibliografía.†

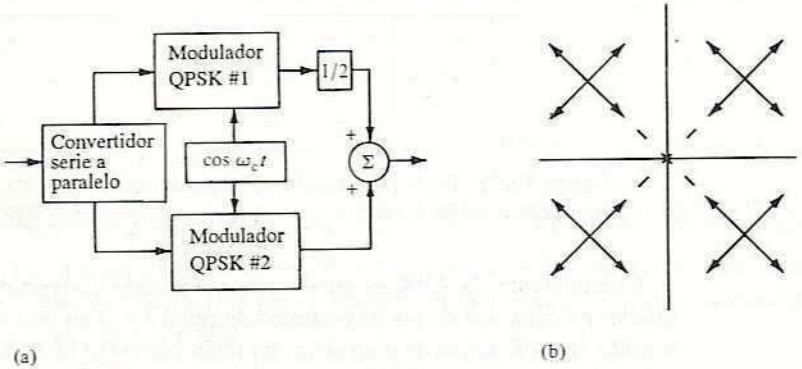


Figura 10.44 Generación de APK 16-aria usando el método de superposición de QPSK: (a) diagrama del modulador; (b) diagramas fasoriales superpuestos.

† Véase K. Miyauchi, S. Saki y H. Ishio, "New Technique for Generating and Detecting Multilevel Signal Formats", *IEEE Transactions on Communications*, COM-24, febrero de 1976, págs. 263-267.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En la figura 10.45 se muestra el desempeño en probabilidad de error de símbolo de muchos sistemas PSK y APK. Nótese que los sistemas APK 8-arios pueden requerir cerca de 1 dB menos de potencia que un sistema PSK 8-ario para la misma probabilidad de error, mientras que los sistemas APK 16-arios requieren cerca de 3.5 dB menos de potencia que un PSK 16-ario. Por tanto, se presenta una ventaja definida para la utilización de APK para $M > 8$. La eficiencia del ancho de banda de los sistemas APK M-arios es la misma que para los sistemas PSK M-arios.

Otro método importante en la APK es usar técnicas de señalización de respuesta parcial, las cuales se describieron en la sección 9.10, en las trayectorias de señal tanto I como Q de un modulador QPSK (QAM). Esta técnica se llama señalización con *respuesta parcial en cuadratura* (QPR). Recuérdese que un sistema de respuesta parcial genera una señal de corriente de datos en banda base de ℓ niveles x_k utilizando una superposición lineal ponderada de la entrada binaria. Para el caso específico de señalización duobinaria (también conocida como clase 1) o duobinaria modificada (también

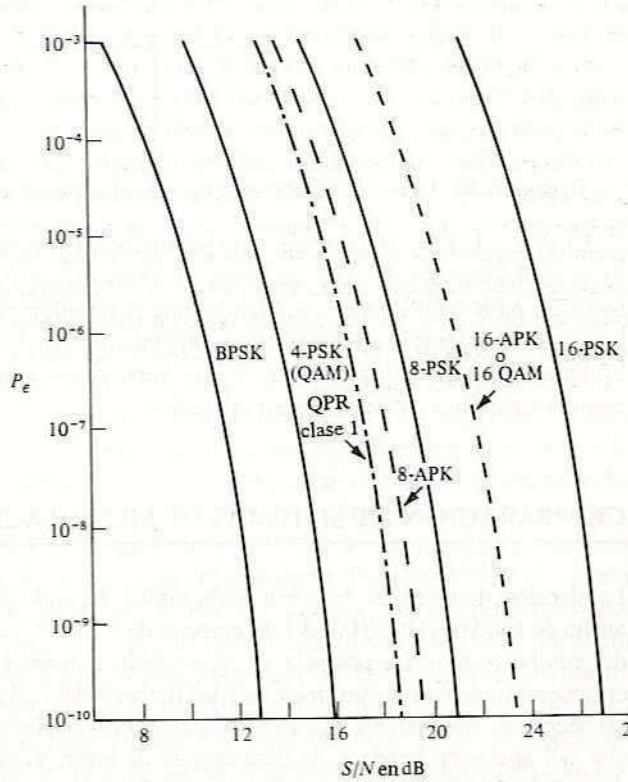


Figura 10.45 Desempeño en probabilidad de error de sistemas PSK, QAM y QPR M-arios y APK M-aria coherente. La S/N cuadrática media se especifica en el ancho de banda de Nyquist bilateral, que es igual al ancho de banda de la tasa de símbolos.†

† De K. Feher, *Digital Communications: Microwave Applications*, © 1981, pág. 71. Reimpreso con autorización de Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

conocida como clase 4), resultan tres posibles niveles de salida. Por tanto, si las trayectorias de señal I y Q de un modulador QPSK (QAM) utilizan señalización duobinaria, la constelación de salida resultante tendrá nueve estados de señal, como se muestra en la figura 10.46. Ahora bien, los sistemas QPR tienen alguna ventaja en S/N sobre sistemas PSK comparables (véase Fig. 10.45), además de que son relativamente fáciles de construir.

En general, los problemas de recuperación de portadora para sistemas APK M-arios son similares a los de los sistemas PSK M-arios. Una excepción es que el lazo de multiplicador de frecuencia $\times M$ no se presta a aplicaciones en las que la constelación de estados de la señal no tiene simetría circular. Una alternativa es utilizar el lazo de Costas (véase Fig. 10.27) con convertidores de $L = \sqrt{M}$ niveles en cada una de las trayectorias de señal I y Q. En la bibliografía se describen otros métodos.

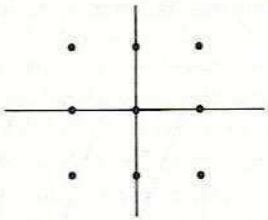


Figura 10.46 Constelación de estados de señal de un modulador QPR duobinario.

La PSK y la FSK M-arias son muy populares y tienen amplia utilización en métodos de modulación digital para sistemas de transmisión de datos actuales aunque los métodos APK y QPR están recibiendo mucha atención en la actualidad. Se espera que los requisitos siempre crecientes para transmisión de datos a través de canales de banda limitada hagan que estos métodos —y sus versiones— constituyan elecciones de diseño comunes para nuevos sistemas en operación.

10.12 COMPARACIÓN DE SISTEMAS DE MODULACIÓN DIGITAL

La elección de métodos de modulación digital depende sobre todo de la eficiencia del ancho de banda (en bps/Hz), del desempeño de error (P_e contra S/N) y de la complejidad del equipo (costo). La potencia de transmisión requerida y la complejidad del equipo en general aumentan con una mejora en la eficiencia del ancho de banda, como se destacó en las secciones precedentes. En secciones anteriores se dieron los resultados para eficiencias del ancho de banda y de desempeños de error, y en la figura 10.47 los métodos de modulación digital representativos se clasifican de acuerdo con la complejidad inherente en el equipo. Sin embargo, la elección de una modulación específica puede depender de otros factores, y el propósito de esta sección es delinear algunos de estos factores.

No todos los canales son lineales, y un factor importante en la elección de un método de modulación digital es si están presentes no linealidades de tipo saturación (p. ej., aquéllas debidas a la utilización de amplificadores que operan con una característica de

http://libreria-universitaria.blogspot.com

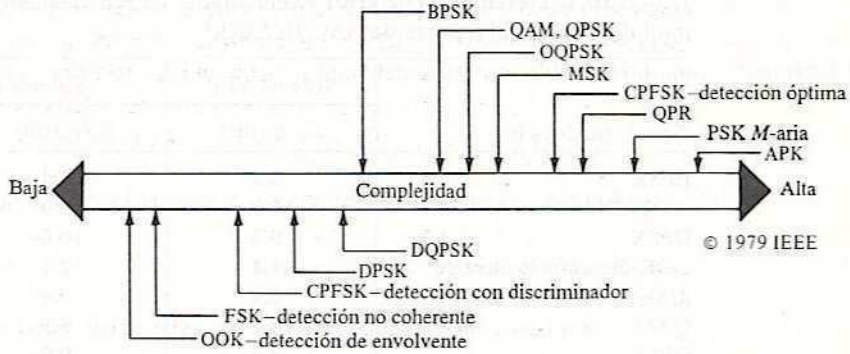


Figura 10.47 Complejidad relativa de esquemas de modulación representativos.†

ganancia no lineal). Los sistemas FSK, BPSK, DPSK, OQPSK y MSK son bastante buenos para mantener su desempeño en dichos canales, mientras que los sistemas PSK *M*-ario y APK *M*-ario constituyen elecciones deficientes en este aspecto.

Otro obstáculo del canal es la *distorsión por retardo*. Si la respuesta en magnitud de un filtro lineal invariable en el tiempo no varía con la frecuencia, entonces la pendiente de la característica de fase y frecuencia se puede identificar con un retardo (véase Sec. 3.12). Para filtros no ideales, es conveniente definir el retardo como la pendiente. Cualquier diferencia de la derivada de la característica de fase y frecuencia de esta constante se define como una distorsión por retardo (el apéndice E presenta algunos datos de distorsión por retardo para canales telefónicos comerciales). La OOK y la BPSK mantienen un buen desempeño en presencia de distorsión por retardo lineal, mientras que los desempeños de error de la QPR y de los métodos de señalización coherentes biortogonales (es decir, QAM, QPSK, OQPSK, MSK) se degradan en forma significativa. Para distorsión por retardo de tipo cuadrático, la FSK es una buena elección, mientras que la DQPSK presenta una severa degradación.

En presencia de desvanecimiento, los desempeños de error de la OOK y los sistemas biortogonales coherentes no se degradan con tanta rapidez como los otros, mientras que la FSK y los sistemas diferenciales coherentes son más pobres que el promedio. La BPSK, la DPSK, la FSK, la VSB y los sistemas biortogonales coherentes tienen tolerancias por encima del promedio a la interferencia de otras señales, mientras que los sistemas OOK y PSK *M*-arios se encuentran por debajo del promedio. La BPSK, la VSB y los sistemas biortogonales coherentes tienen tolerancias por encima del promedio para ISI, mientras que los PSK *M*-arios se encuentran debajo del promedio. Para algunos de los métodos nuevos (p. ej., APK *M*-aria), no se han publicado muchos datos hasta ahora y, por tanto, no se pueden hacer muchos comentarios al respecto.

Por último, nótese que las características del desempeño en las secciones anteriores se refirieron a casos ideales. En la tabla 10.4 se presentan ejemplos de desempeños de error y velocidades de señalización de algunos sistemas mencionados en la literatura.

---

† © 1979 IEEE. Reimpreso, con autorización, de "A Comparison of Modulation Techniques for Digital Radio", J. D. Oetting, *IEEE Transactions on Communications*, COM-27, diciembre de 1979, pág. 1757.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

TABLA 10.4 Desempeño de error y velocidades de señalización de métodos de modulación digital representativos, 10^{-4} BER†

	Sistema ideal	Sistema de banda limitada	
Tipo de modulación	E_b/η (dB)	E_b/η (dB)	B. W. Eff. (bps/Hz)
BPSK	8.4	9.4	0.8
DE-PSK	8.9	9.9	0.8
DPSK	9.3	10.6	0.8
OOK-detección coherente[a]	11.4	12.5	0.8
MSK	8.4	9.4	1.9
QAM	8.4	9.5	1.7
QPSK	8.4	9.9	1.9
MSK-codificación diferencial	9.4	10.4	1.9
DQPSK	10.7	11.8	1.8
PSK 8-aria	11.8	12.8	2.6
QPR	10.7	11.7	2.25
APK 16-aria	12.4	13.4	3.1
PSK 16-aria	16.2	17.2	2.9

[a] Aquí se utiliza E_b/η promedio, de modo que los valores mostrados para la OOK están 3 dB por debajo de los valores pico indicados en la figura 10.23.

Obsérvese que son típicas las degradaciones de 1.0-1.1 dB en E_b/η y el 80-90% en velocidad de señalización (eficiencia del ancho de banda).

10.13 ★ REPRESENTACIÓN DE SEÑALES DIGITALES

En las secciones anteriores se han descrito varios métodos específicos para transmitir señales digitales. Ahora deseamos tratar problemas más generales del diseño de señales digitales y su subsecuente detección.

En los sistemas de comunicación existe una colección infinita de señales distintas, de las que se elige y transmite una a intervalos periódicos. Un método conveniente para el analizar dichos sistemas es el del espacio de señales y espacio vectorial, un concepto estudiado en el capítulo 2. En particular, deseamos expresar una señal dada en términos de un conjunto de funciones ortonormales. La motivación para hacer esto es que existe un conjunto contable de posibles señales, y si el receptor se fija para reconocer un miembro del conjunto, entonces no responderá a los otros miembros del conjunto. Se utiliza un conjunto ortonormal de modo que la energía de la señal no dependa del miembro elegido.

Sea $(0, T)$ el intervalo para la transmisión de cada señal digital. Entonces, las funciones base ortonormales son [véase Ec. (2.21)]‡

$$\int_0^T \phi_i(t)\phi_j(t)\,dt = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \tag{10.107}$$

† J. D. Oetting, *op. cit.*, pág. 1755.

‡ Para simplificar la notación, sólo se utilizarán funciones de valor real.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Por conveniencia, la atención se restringe al caso de un conjunto de dos funciones ortonormales; las extensiones a un conjunto ortonormal más grande son directas.

Las señales $s_m(t)$ se pueden representar por medio del conjunto ortonormal [véase Ec. (2.22)],

$$s_m(t) = a_{m1}\phi_1(t) + a_{m2}\phi_2(t), \tag{10.108}$$

donde los coeficientes a_{mi} se encuentran a partir de [véase Ec. (2.26)]

$$a_{mi} = \int_0^T s_m(t)\phi_i(t)\,dt. \tag{10.109}$$

Por tanto, las señales $s_1(t)$, $s_2(t)$ se pueden representar con

$$\begin{aligned} s_1(t) &= a_{11}\phi_1(t) + a_{12}\phi_2(t), \\ s_2(t) &= a_{21}\phi_1(t) + a_{22}\phi_2(t). \end{aligned} \tag{10.110}$$

La energía de cada señal es [usando las ecuaciones (10.107) y (10.108)]

$$\begin{aligned} \int_0^T s_1^2(t)\,dt &= a_{11}^2 + a_{12}^2, \\ \int_0^T s_2^2(t)\,dt &= a_{21}^2 + a_{22}^2. \end{aligned} \tag{10.111}$$

Así mismo, la energía en la diferencia entre señales es

$$\int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2\,dt = (a_{11} - a_{21})^2 + (a_{12} - a_{22})^2. \tag{10.112}$$

Estos conceptos se pueden extender a señales construidas utilizando más de dos funciones base ortonormales.

Se puede dar una interpretación geométrica a estos resultados considerando el conjunto ortonormal $\phi_n(t)$ como un conjunto ortonormal de vectores base, $\boldsymbol{\phi}_n$. Un vector dado en este espacio vectorial se puede expresar en términos de los vectores base [véase Ec. (2.18)], y los coeficientes se pueden encontrar en términos del producto punto entre el vector dado y el vector base [véase Ec. (2.19)]. Además, las ecuaciones (10.111) y (10.112) muestran que la distancia (o longitud, llamada "norma" del espacio) en el espacio vectorial es análoga a la raíz cuadrada de la energía de la señal en el espacio de señales.

Las señales recibidas presentan ruido aleatorio aditivo, y este ruido también se puede representar en términos del conjunto de funciones base ortonormales. Como el ruido es aleatorio, los coeficientes en la representación en serie ortonormal del ruido son aleatorios. Los coeficientes no están correlacionados entre sí. Si el ruido es blanco con valor medio cero, se puede demostrar que el valor cuadrático medio de cada coeficiente es igual al valor cuadrático medio del ruido.† Sólo son importantes aquellos coeficientes del ruido que utilizan las mismas funciones ortonormales que la señal; los demás son términos sólo de ruido y el receptor los rechaza.

† Véase, por ejemplo, H. L. Van Trees, *Detection, Estimation and Linear Modulation Theory, Part I*, Nueva York, John Wiley & Sons, 1968, Cap. 3.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

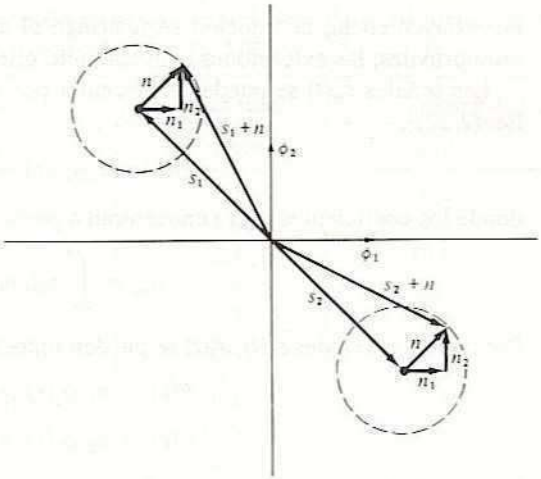


Figura 10.48 Representación geométrica de la señal más ruido.

En la figura 10.48 se muestra una representación geométrica en dos dimensiones de la señal recibida más ruido. Como los coeficientes de ruido n_1, n_2 no están correlacionados y tienen varianzas iguales, el efecto del ruido es expandir todas las posibles posiciones de los vectores recibidos en una región alrededor del punto de la señal sin ruido. La localización de la resultante se puede describir en forma estadística; los círculos punteados de la figura 10.48 se utilizan para delinear localizaciones equiprobables.

La distribución de ruido no depende de la señal. Por tanto, los estados de la señal transmitida se deben localizar lo más separados posible. Si se utilizan dos señales (como en la Fig. 10.48), la mejor ubicación en condiciones de energía fija es tal que dichas señales son colineales y simétricamente opuestas al origen; esto es, $s_1(t) = -s_2(t)$. Este tipo de elección de la señal se llama señalización *antípoda*. Por el contrario, un sistema de señales ortogonales proporciona máxima salida en el receptor para la señal deseada, a la vez que proporciona salida cero para las demás del conjunto. Por tanto, la señalización antípoda proporciona una tasa de error más baja para una potencia promedio dada.

Reconsideraremos las señales digitales ASK, FSK, BPSK y QPSK utilizadas en las secciones previas, pero ahora en un contexto más general. Las representaciones geométricas de dichas señales se muestran en la figura 10.49 para una potencia promedio fija (suponiendo unos y ceros equiprobables) y una potencia de ruido fija. Las señales ASK se obtienen utilizando vectores colineales unilaterales (se muestra la OOK). Las señales FSK se eligen ortogonales en $(0, T)$, mientras que las BPSK son un ejemplo de señalización antípoda.

En la figura 10.49 es fácil ver la ventaja relativa en probabilidad de error de la BPSK sobre la ASK y la FSK. Además de la apreciación física que proporciona, la representación geométrica también tiene la ventaja de que es fácil de extender a señales de dimensiones mayores.†

† Para lectura adicional sobre este tema, véase E. Arthurs y H. Dym, "On the Optimum Detection of Digital Signals in the Presence of White Gaussian Noise —A Geometric Interpretation and a Study of Three Basic Data Transmission Systems", *IRE Transactions on Communication Systems*, CS-10, diciembre de 1962, págs. 336-372.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

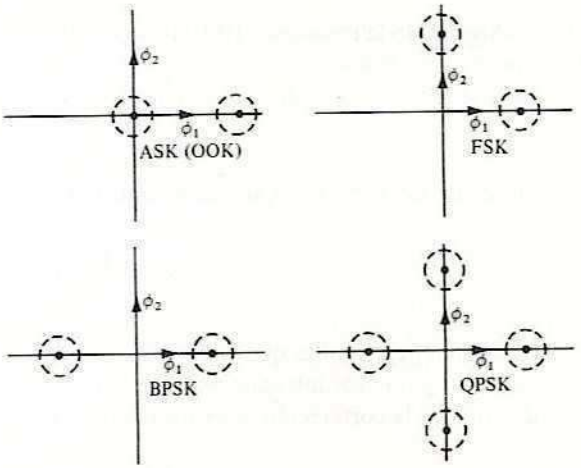


Figura 10.49 Representación geométrica de ASK, FSK, BPSK y QPSK.

En QPSK, las dos portadoras utilizadas (es decir, cos $\omega_c t$ y sen $\omega_c t$) son ortogonales y, por tanto, las dos corrientes de bit en las trayectorias de las señales I y Q se pueden demodular en forma independiente. Así, para una E/η dada, las probabilidades de error de la BPSK y la QPSK detectadas en forma coherente son idénticas. Además, como el retardo de las corrientes de bit no altera la ortogonalidad de las portadoras, la OQPSK tiene el mismo desempeño de error que la BPSK y la QPSK.

La MSK también utiliza la modulación de dos portadoras ortogonales para lograr la señalización antípoda de dos corrientes de datos binarios. Difiere de la OQPSK en que utiliza funciones de ponderación, cos $(\pi t/2T_b)$ y sen $(\pi t/2T_b)$, en las trayectorias de las señales I y Q, pero sin sacrificar la energía de la señal. Por tanto, la MSK tiene tiene el mismo desempeño de error que la BPSK, la QPSK y la OQPSK cuando se utiliza filtrado acoplado para la recuperación de datos. Sin embargo, si la MSK se detectara en forma coherente como una señal FSK (con un tiempo de decisión de bit de T_b segundos), entonces su desempeño sería más pobre que el de la BPSK por 3 dB. La razón de esto es que la distancia entre estados de señal se redujo $1/\sqrt{2}$ con respecto a la señalización antípoda.

En la PSK M-aria, todos los estados de señal deben caer en un patrón circular centrado en el origen. Esto deja poco espacio para la elección del diseño de señales. Por el contrario, los M estados de señal en la APK M-aria se pueden colocar en cualquier patrón sujeto a las condiciones de maximizar la distancia de cada estado de señal a partir de los demás para mantener la tasa de error lo más baja posible. Esto se debe lograr dentro de la restricción de potencia promedio fija. Otros parámetros importantes son las diferencias de fase angular mínimas entre estados de señal (una medida de la inmunidad a la distorsión de fase por fluctuación o retardo) y la razón de potencia pico a promedio (una medida de la inmunidad contra distorsión no lineal).

En la representación ortonormal de señales, la distancia desde el origen se toma como la representación de la raíz cuadrada de la energía de la señal. Para proceder en forma más cuantitativa, también es necesario expresar el ruido en términos de las funciones base ortonormales.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Siguiendo la ecuación (10.108), se escribe

$$n(t) = \sum_i n_i \phi_i(t) \tag{10.113}$$

donde los coeficientes n_i se encuentran a partir de [véase Ec. (10.109)]

$$n_i = \int_0^T n(t)\phi_i(t)\,dt\,. \tag{10.114}$$

Una diferencia aquí es que $n(t)$ es aleatoria. Se supone que $n(t)$ es un proceso aleatorio ergódico y que los intercambios en el orden de operación son válidos, y se procede a determinar la correlación entre los coeficientes en serie.

$$\begin{aligned} E\{n_i n_j\} &= E\left\{\int_0^T n(t)\phi_i(t)\,dt \int_0^T n(t)\phi_j(t)\,dt\right\} \\ &= E\left\{\int_0^T \int_0^T n(t)n(t_1)\phi_i(t)\phi_j(t_1)\,dt\,dt_1\right\} \\ &= \int_0^T \int_0^T E\{n(t)n(t_1)\}\phi_i(t)\phi_j(t_1)\,dt\,dt_1 \\ &= \int_0^T \int_0^T R_n(t - t_1)\phi_i(t)\phi_j(t_1)\,dt\,dt_1 \end{aligned} \tag{10.115}$$

En el caso particular de interés en el que el ruido $n(t)$ tiene media cero y densidad espectral de potencia blanca $S_n(\omega) = \eta/2$, se tiene $R_n(t - t_1) = (\eta/2)\delta(t - t_1)$; entonces, la ecuación (10.115) se vuelve

$$\begin{aligned} E\{n_i n_j\} &= \int_0^T \int_0^T (\eta/2)\delta(t - t_1)\phi_i(t)\phi_j(t_1)\,dt\,dt_1 \\ &= \frac{\eta}{2}\int_0^T \phi_i(t)\phi_j(t)\,dt \\ &= \begin{cases} \eta/2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}. \end{aligned} \tag{10.116}$$

Por tanto, la varianza del ruido en estas condiciones es igual a $\eta/2$ en cada coordenada.

EJEMPLO 10.13.1

Determine la probabilidad neta de error para la BPSK (PRK) en el ruido blanco gaussiano aditivo utilizando un método geométrico y suponiendo unos y ceros equiprobables.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Solución Usando el diagrama de la figura 10.49 y observando que los estados de la señal están a $\pm\sqrt{E_s}$, la frontera de decisión es una línea vertical a través del origen. Usando simetría y notando que la varianza del ruido está dada por $\sigma^2 = \eta/2$, la probabilidad de error es

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{\pi\eta}} \int_0^\infty e^{-(x+\sqrt{E_s})^2/\eta}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2E_s/\eta}}^\infty e^{-z^2/2}\, dz = Q(\sqrt{2E_s/\eta}).$$

Esto coincide con la ecuación (10.24). Además, este método proporciona puntos de vista intuitivos en el diseño de señales, así como consideraciones de detección.

10.14 ★ ALGORITMOS DE DETECCIÓN ÓPTIMA

En los capítulos anteriores se analizaron los cálculos de probabilidad de error para un sistema binario dado. Ahora deseamos investigar la síntesis de un procesador de señales óptimo en el receptor para que dé una probabilidad de error mínima. Nuevamente se restringirá la atención al caso binario, aunque estos métodos se pueden extender a casos más generales.

Para simplificar el problema, regresemos a la consideración de la conmutación encendido-apagado (OOK), en donde la presencia de un pulso significa un uno y su ausencia un cero. Por tanto, existe un uno o un cero en $(0, T)$, y el receptor debe elegir alguno de los dos. En principio, se supone que sólo hay una muestra disponible en la cual basar esta decisión.

Etiquetemos las dos posibles elecciones como H_0 y H_1; cuando se envía un uno, se le llama H_1; cuando se envía un cero, se le llama H_0. La transmisión binaria ocurre en presencia de ruido aditivo. Para simplificar, se supone que el ruido aditivo $n(t)$ tiene distribución gaussiana con media cero. Los dos estados observados en $(0, T)$ son [véanse Ecs. (9.25) y 9.26)]

$$y(t) = \begin{cases} s(t) + n(t) & \text{señal presente,} \\ n(t) & \text{señal ausente.} \end{cases} \tag{10.117}$$

Al final del intervalo $(0, T)$, el receptor tiene las siguientes posibilidades de elección:

1. H_0 verdadero, se elige H_0;
2. H_0 verdadero, se elige H_1;
3. H_1 verdadero, se elige H_1;
4. H_1 verdadero, se elige H_0;

La primera y la tercera alternativas corresponden a decisiones correctas. Además, se pueden presentar dos tipos de error (véase Fig. 9.7). En la segunda alternativa, el error

http://libreria-universitaria.blogspot.com

se puede confundir con una señal cuando la señal no está presente (P_{ϵ_0}) y en la cuarta alternativa la señal se puede perder cuando está presente (P_{ϵ_1}). La probabilidad de error global (neta) es, entonces [véase Ec. (9.33)],

$$P_\epsilon = P_0 P_{\epsilon_0} + P_1 P_{\epsilon_1}, \tag{10.118}$$

donde P_1 es la probabildad de ocurrencia de un 1 (o señal en este caso) y $P_0 = 1 - P_1$.

Tanto P_{ϵ_0} como P_{ϵ_1} son probabilidades condicionales porque dependen de que la señal esté o no presente. Para deducirlas, se escribe

$$p(y\,|\,0) = p_n(y). \tag{10.119}$$

Se supone que el ruido es gaussiano con media cero; por tanto,

$$p_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-n^2/(2\sigma_n^2)}. \tag{10.120}$$

Usando la ecuación (10.120) en la (10.119), se tiene

$$p(y\,|\,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-y^2/(2\sigma_n^2)}. \tag{10.121}$$

Supóngase que la señal es una constante, A, en $(0, T)$ de manera que cuando la señal está presente, $y(t) = A + n(t)$. Esto sólo desplaza el valor medio del ruido de 0 a A (véase Fig. 10.50) y

$$\begin{aligned} p(y\,|\,s) &= p_n(y - A) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} e^{-(y-A)^2/(2\sigma_n^2)}. \end{aligned} \tag{10.122}$$

De la figura 10.50 se puede escribir

$$P_{\epsilon_1} = \int_{H_0} p(y\,|\,s)\,dy, \tag{10.123}$$

$$P_{\epsilon_0} = \int_{H_1} p(y\,|\,0)\,dy, \tag{10.124}$$

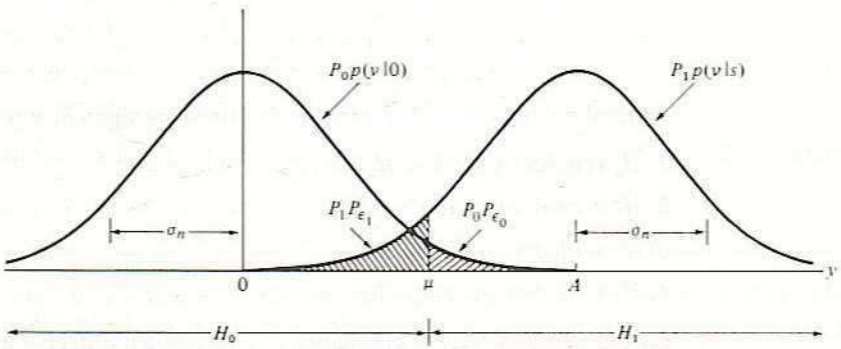


Figura 10.50 Regiones de decisión para el caso binario.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

por lo que la ecuación (1.118) se vuelve

$$P_\epsilon = P_1 \int_{H_0} p(y|s)\,dy + P_0 \int_{H_1} p(y|0)\,dy. \tag{10.125}$$

Ésta es la ecuación que se desea minimizar eligiendo H_0, H_1 de manera correcta.

Se desea minimizar la probabilidad de error determinando un algoritmo (es decir, una regla) para decidir si un $y(t)$ observable dado se debe interpretar como un 1 o un 0. Supóngase que se elige desarrollar una regla para H_1. Se tiene

$$\int_{H_0+H_1} p(y|s)\,dy = 1, \tag{10.126}$$

por lo que la ecuación (10.125) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} P_\epsilon &= P_1\left[1 - \int_{H_1} p(y|s)\,dy\right] + P_0 \int_{H_1} p(y|0)\,dy \\ &= P_1 + \int_{H_1} [P_0 p(y|0) - P_1 p(y|s)]\,dy. \end{aligned} \tag{10.127}$$

Se desea hacer a P_ϵ lo más pequeña posible. Como P_0, P_1 y ambas funciones de densidad de probabilidad en la ecuación (10.127) son no negativas, lo mejor que se puede hacer es que

$$P_1 p(y|s) > P_0 p(y|0). \tag{10.128}$$

Por tanto, aquellos valores de y que satisfacen la desigualdad en la ecuación (10.128) deben asignarse a la decisión H_1. Siguiendo el mismo razonamiento, se concluye que aquellos valores de y que invierten la desigualdad se deben asignar a H_0.

La ecuación (10.128) se puede reescribir como

$$\ell(y) = \frac{p(y|s)}{p(y|0)} > \frac{P_0}{P_1}, \tag{10.129}$$

donde $\ell(y)$ se llama *razón de similitud*. El algoritmo de procesamiento de señal para la mínima probabilidad de error se puede especificar ahora como

$$\ell(y) = \frac{p(y|s)}{p(y|0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P_0}{P_1}. \tag{10.130}$$

Se ha supuesto en este algoritmo que los dos tipos de error son igualmente costosos para el desempeño del sistema. En general, esto es cierto para sistemas de comunicación binaria. Si se desea, los errores de costo desigual pueden permitirse sin dificultad en el algoritmo.

Como las funciones de densidad de probabilidad no son negativas y la función logaritmo es monotónica, a menudo es conveniente tomar el logaritmo natural en ambos lados de la ecuación (10.130) para obtener

$$\ln \ell(y) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln \frac{P_0}{P_1}. \tag{10.131}$$

El algoritmo de procesamiento de señales especificado en las ecuaciones (10.130) y (10.131) se llama *prueba de razón de similitud* (LRT, *likelihood ratio test*).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJEMPLO 10.14.1

(a) Determine la LRT para la conmutación encendido-apagado en presencia de ruido gaussiano aditivo con media cero. (b) Si además el ruido es blanco, especifique la LRT para la salida del filtro acoplado.

Solución a) Se supone que la señal tiene amplitud A cuando se envía un 1 y amplitud cero cuando se envía un 0. Las probabilidades condicionales se dan en las ecuaciones (10.121) y (10.122). Usando la ecuación (10.131), la LRT es

$$\frac{(2Ay - A^2)}{(2\sigma_n^2)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right),$$

o

$$y \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{A}{2}\left[1 + \frac{2\sigma_n^2}{A^2}\ln\frac{P_0}{P_1}\right].$$

Por tanto, cuando $P_0 = P_1 = 0.5$, el procesador de señal coloca el umbral de decisión en $A/2$, como se esperaría [véase Ec. (9.35)]. Si P_1 difiere de 0.5, el umbral de decisión óptimo se desplaza. La cantidad relativa de este desplazamiento depende del logaritmo natural de $(P_0/P_1)^2$ y es inversamente proporcional al pico de la razón señal a ruido.

b) El filtro acoplado es un sistema lineal, por lo que el ruido de salida también tiene distribución gaussiana con media cero y [véase Ec. (9.48)] $\sigma_n^2 = E\eta/2$. La amplitud de la salida con señal presente es E, de modo que la LRT de la parte (a) se vuelve

$$y \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{E}{2} + \frac{\eta}{2}\ln\frac{P_0}{P_1},$$

donde E es la energía de la señal $s(t)$ en $(0, T)$ y $\eta/2$ es la densidad espectral de potencia (bilateral) del ruido.

EJERCICIO 10.14.1

Repita el ejemplo 10.14.1 para el caso de una señal polar binaria con señales transmitidas $-A/2$, $A/2$.

RESPUESTA: (a) $y \gtrless (\sigma_n^2/A) \ln (P_0/P_1)$; (b) $y \gtrless (\eta/2) \ln (P_0/P_1)$.

La prueba de razón de similitud (LRT) se desarrolló antes para el caso de una muestra sobre la cual basar una decisión. Sin embargo, el concepto de la LRT es mucho más general que esto, y ahora se verá el caso más general en el que más de una muestra está disponible en $(0, T)$.

El teorema del muestreo establece que se puede obtener $2BT$ muestras independientes de una señal determinista de banda limitada a B Hz en $(0, T)$. Para el caso de ruido blanco

http://libreria-universitaria.blogspot.com

de banda limitada, las muestras de ruido no están correlacionadas si se encuentran espaciadas $1/(2B)$ segundos (véase Ejer. 8.13.1). Para ruido gaussiano, se concluye que estas muestras de ruido también son independientes. Por tanto, se supondrá que se tienen disponibles $N = 2BT$ muestras independientes de la $y(t)$ observable.

Como las $N = 2BT$ muestras son estadísticamente independientes, se pueden multiplicar sus funciones de densidad de probabilidad para obtener la función de densidad de probabilidad neta. Por tanto, los resultados obtenidos para el caso de una muestra se pueden generalizar con facilidad a fin de dar la LRT para N muestras:

$$\ell(y_1, y_2, \ldots, y_N) = \frac{\prod_{i=1}^{N} p(y_i|s)}{\prod_{i=1}^{N} p(y_i|0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P_0}{P_1} \tag{10.132}$$

donde Π indica multiplicación. Tomando el logaritmo en ambos lados de la ecuación (10.132), se obtiene

$$\ln \ell(y_1, y_2, \ldots, y_N) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln \frac{P_0}{P_1}. \tag{10.133}$$

Nótese que las ecuaciones (10.132) y (10.133) son versiones generalizadas de las ecuaciones (10.130) y (10.131).

EJEMPLO 10.14.2

Suponga que con H_1 el transmisor envía un nivel constante A y con H_0 envía un nivel cero en $(0, T)$. Está presente ruido gaussiano aditivo con media cero y varianza σ^2, y la señal más ruido observable está idealmente limitada en banda a B Hz. Determine la LRT y el procesador de señal óptimo.

Solución Si seguimos las ecuaciones (10.121) y (10.122) para el caso de muestras múltiples, la ecuación (10.132) es

$$\frac{\prod_{i=1}^{N} (1/\sqrt{2\pi}\,\sigma) e^{-(y_i - A)^2/(2\sigma^2)}}{\prod_{i=1}^{N} (1/\sqrt{2\pi}\,\sigma) e^{-y_i^2/(2\sigma^2)}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P_0}{P_1}.$$

Si se cancelan los términos comunes, usando sumatorias en los argumentos de las exponenciales para los productos y tomando el logaritmo natural, se obtiene

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{A}{2} + \frac{2\sigma^2}{NA} \ln \frac{P_0}{P_1},$$

donde $N = 2BT$. Por tanto, el procesador de señal óptimo realiza una operación conocida como *media de la muestra*: $(1/N)\,\Sigma_{i=1}^{N} y_i$ en la señal más ruido observable en $(0, T)$ y la compara con un nivel especificado. Este resultado coincide con el obtenido en el ejemplo 10.14.1(a) para el caso $N = 1$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJERCICIO 10.14.2

Repita el ejemplo 10.14.2 para el caso de una señal polar binaria con señales transmitidas $-A/2, A/2$.

RESPUESTA: $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2}{NA} \ln \frac{P_0}{P_1}$.

La prueba de razón de similitud (LRT) es muy importante porque especifica el algoritmo óptimo para el procesador de señal en términos de la estadística condicional de la cantidad observable. Como se muestra en el ejemplo 10.14.2, se puede utilizar para especificar las operaciones necesarias (que no se requiere que sean lineales) en el receptor a fin de lograr este grado óptimo. El criterio para alcanzar el nivel es tener una mínima probabilidad de error para iguales costos al cometer errores.

El siguiente paso lógico es tratar de encontrar un procesador óptimo para estimar un parámetro en la señal observada después de su detección. Este problema es importante no sólo para sistemas de comunicación digitales sino también para sistemas analógicos. Por ejemplo, nos gustaría saber cuál es el procesador de señal óptimo para recuperar la variación de fase (o frecuencia) en una señal recibida. Se deduce que la razón de similitud desempeña un papel importante en la búsqueda del procesador óptimo para muchos de estos problemas. Sin embargo, deberemos dejar estos (y otros) temas interesantes para futuros trabajos en sistemas de comunicación.

10.15 RESUMEN

Los métodos de modulación digital se utilizan para transmitir señales PCM a través de canales pasabanda. Los métodos de modulación binarios utilizados son la conmutación de amplitud (ASK), la conmutación de frecuencia (FSK) y la conmutación de fase (PSK). En estos métodos, la amplitud, la frecuencia o la fase de una señal senoidal se conmuta en respuesta a la entrada PCM.

Usando detección con filtro acoplado en ruido blanco gaussiano aditivo, la PSK requiere hasta 3 dB menos de potencia promedio de la señal que la ASK o la FSK para una probabilidad de error dada. Se requiere detección coherente para PSK, mientras que se puede utilizar detección coherente o no coherente para la ASK y la FSK. Se puede utilizar PSK diferencial (DPSK) para tener muchas de las ventajas de la PSK y evitar la necesidad de detección coherente. Para un desempeño de error dado, la FSK requiere cerca de 3 dB menos de potencia pico que la ASK, aunque sus requisitos de potencia promedio son similares. Las elecciones comunes para sistemas de comunicación son la PSK, la DPSK y la FSK no coherente.

La PSK en cuadratura (QPSK) utiliza principios de multiplexión en cuadratura para ofrecer el doble de la capacidad en tasa de bits que la PSK binaria (BPSK) dentro del mismo ancho de banda. El retardo de la señal ya sea en fase (I) o en cuadratura (Q) por un periodo de bit produce QPSK de conmutación desplazada (OQPSK). Una ventaja de la OQPSK es que tiene una envolvente más constante que la QPSK después del filtrado pasabanda. Ambos métodos ofrecen eficiencias de ancho de banda de 2 bps/Hz.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Los sistemas de espectro expandido aumentan de manera intencional el espectro modulado, independiente de la modulación de datos. La utilización de espectro expandido permite compartir una banda dada para transmisiones múltiples con sólo una mínima interferencia entre usuarios. Este tipo de multiplexión se llama acceso múltiple por división de código (CDMA). El espectro expandido tiene ventajas en cuanto a comunicaciones seguras, sistemas de llamado selectivo y protección contra perturbación de banda angosta y desvanecimiento selectivo.

El espectro expandido por secuencia directa (DS) utiliza modulación con portadora suprimida de una portadora de datos modulada con un código PN a una velocidad llamada tasa de chip. El ancho de banda expandido depende de la razón de la tasa de chip a la tasa de bits. Es necesario un nivel extra de sincronización en recepción para una correcta secuenciación y sincronía del código PN.

La conmutación de desplazamiento mínimo (MSK) es un ejemplo de FSK coherente en el que la fase de la señal modulada es continua y el desplazamiento de la frecuencia es tal que existe una diferencia de medio ciclo en un intervalo de bit. La MSK tiene características de señalización similares a las de la OQPSK. Una diferencia es que la densidad espectral de potencia de la MSK tiene un lóbulo principal más ancho, pero que disminuye con mayor rapidez al alejarse de la frecuencia portadora.

En PSK M-aria, el modulador genera señales de amplitud constante con espaciamientos de fase de $2\pi(M-1)/M$ para transmitir información M-aria. Después del filtrado pasabanda, dichas señales no necesariamente tienen amplitud constante. Para una potencia de ruido fija, la detección a tasas de error bajas requiere aumentos sustanciales en la potencia de la señal conforme M aumenta. Los sistemas PSK 8-arios son comunes, pero las necesidades de potencia transmitida para $M > 8$ son excesivas en muchas aplicaciones.

Los sistemas de conmutación de amplitud y fase (APK) ofrecen una potencia necesaria menor para una M dada que la PSK M-aria para una probabilidad de error dada. La envolvente de la señal generada no es constante, y se requiere un canal lineal. Tanto los sistemas APK como los PSK M-arios ofrecen eficiencias del ancho de banda de $\log_2 M$ bps/Hz. Ambos son sensibles a distorsiones de canal, y se requiere igualación para obtener buenas características de transmisión. En un tipo particular de señalización APK, llamada respuesta parcial en cuadratura (QPR), se utiliza señalización de respuesta parcial en las señales I y Q con modulación de amplitud en cuadratura (QAM)

A diferencia de los métodos anteriores, la FSK M-aria ortogonal ofrece ahorros en la potencia transmitida, a expensas de un ancho de banda mayor para una tasa de error dada. La FSK M-aria ortogonal se puede generalizar para que incluya otros conjuntos de señales ortogonales. El desempeño de la señalización ortogonal M-aria se aproxima al resultado de Hartley-Shannon para la capacidad de un canal cuando $M \to \infty$.

Los sistemas de espectro expandido por salto de frecuencia (FH) desplazan la frecuencia portadora de una señal modulada en respuesta a un código conocido en recepción. Las frecuencias seleccionadas y la velocidad a la cual se seleccionan (llamada tasa de salto) se pueden controlar en forma independiente para obtener anchos de banda amplios. Los sistemas FH se denominan de salto rápido o de salto lento, dependiendo de la tasa de salto de frecuencia relativa a la tasa de bits.

Los conceptos de espacios vectoriales se pueden utilizar para dar interpretaciones geométricas a los problemas de comunicación digital. El concepto de constelación de estados de señal es útil en la señalización M-aria. Las probabilidades condicionales se

http://libreria-universitaria.blogspot.com

pueden utilizar para formar la prueba de razón de similitud. Esta prueba proporciona un algoritmo de procesamiento de señal que produce una probabilidad mínima de error en la detección de señales en presencia de ruido.

Referencias seleccionadas para lectura adicional

1. Haykin, S., *Communication Systems*. 2a. ed.,Nueva York, John Wiley & Sons, 1983.
   El capítulo 7 cubre métodos de modulación digital en el contexto de la detección con filtro acoplado y la estimación de máxima similitud.
2. Ziemer, R. E., y Tranter, W. H., *Principles of Communications*, 2a. ed., Boston, Houghton Mifflin, 1985.
   Los capítulos 7 y 8 ofrecen un tratamiento extenso de muchos de los temas de este capítulo, con énfasis en la detección con filtro acoplado y la estimación de máxima similitud.
3. Feher, K., *Digital Communications: Microwave Applications*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1981.
   En los capítulos 3, y 6 a 8 se hace un buen análisis tanto de la teoría como de la práctica de los métodos PSK *M*-ario y APK, con énfasis en sistemas de microondas terrestres.
4. Lucky, R. W., Salz, J. y Weldon Jr., E. J., *Principles of Data Communications*, Nueva York, McGraw-Hill, 1968.
   Los capítulos 7 a 9 cubren con cierto detalle los temas de ASK, FSK y PSK con énfasis en canales telefónicos.
5. Wozencraft, J. M. y Jacobs, I. M., *Principles of Communication Engineering*, Nueva York, John Wiley & Sons, 1965.
   Un texto muy conocido que cubre, en el capítulo 4, los principios de recepción óptima y de interpretación geométrica de señales.
6. Spilker Jr., J. J., *Digital Communications by Satellite*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1977.
   En los capítulos 11-13 se hace un análisis algo extenso de la generación, la detección y los efectos de la distorsión en sistemas BPSK y QPSK, con énfasis en canales vía satélite.
7. Cooper, G. R. y McGillem, C. D., *Modern Communications and Spread Spectrum*, Nueva York, McGraw-Hill, 1986.
   En los capítulos 8 a 13 se aborda la generación y detección del espectro expandido y sus aplicaciones en comunicaciones.
8. Ziemer, R. E. y Peterson, R. L., *Digital Communications and Spread Spectrum Systems*, Nueva York, Macmillan, 1985.
   Buenos análisis de la modulación digital, métodos de espacios de señales e introducción a sistemas de espectro expandido DS y FH. Las últimas partes de este texto son más especializadas y avanzadas.
9. Korn, I., *Digital Communications*, Nueva York, Van Nostrand Reinhold, 1985.
   Análisis profundo de métodos de modulación digitales.
10. Lindsey, W. C. y Simon, M. K., *Telecommunication Systems Engineering*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1973.
    Tratamiento extenso de los sistemas coherentes en fase.

PROBLEMAS

10.1.1 Se transmite un código binario utilizando conmutación de amplitud (OOK) a una velocidad de 3 Mbps. La razón potencia de portadora (cuando se conmuta a encendido) a potencia de ruido térmico en la entrada del receptor es de 10 fW/K. Si se suponen unos y ceros equiprobables, calcule la mínima probabilidad de error esperada si la representación del código utilizada es
a) NRZ(L); b) RZ.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

10.1.2 a) Deduzca una expresión para la probabilidad de error de ASK si el receptor de correlación mostrado en la figura 10.2(b) tiene una señal de referencia $A \operatorname{sen}(\omega_c t + \theta)$, donde θ es un error de fase.

b) Utilizando el resultado de la parte (a), determine el máximo error de fase para estar dentro de la probabilidad de error de un receptor no coherente si $E/(2\eta) = 18$.

10.1.3 Cierto sistema ASK binario propuesto utiliza las siguientes señales para transmitir en presencia de ruido blanco gaussiano aditivo:

$$\phi(t) = \begin{Bmatrix} A \operatorname{sen} \omega_c t & \text{para un 1} \\ \gamma A \operatorname{sen} \omega_c t & \text{para un 0} \end{Bmatrix} \quad \text{o en } (0, T),$$

donde $0 \leq \gamma < 1$.

a) Deduzca una expresión de la mínima probabilidad de error P_ϵ para este sistema, suponiendo unos y ceros equiprobables.

b) Grafique P_ϵ contra γ para $E/(2\eta) = 18$. Utilice una escala logarítmica de cinco ciclos para P_ϵ, y la ecuación (I.5) del apéndice I como una aproximación para Q.

c) Sea $P_{\epsilon 0}$ el valor de P_ϵ para $\gamma = 0$. Determine el valor más grande de γ para el cual P_ϵ no es más del 10% mayor que $P_{\epsilon 0}$.

10.1.4 Se transmite una señal de datos binaria NRZ(L) utilizando conmutación de amplitud (OOK) a una velocidad de 1 Mbps. Suponga unos y ceros equiprobables. Determine y grafique la densidad espectral de potencia alrededor de la frecuencia portadora para los siguientes casos:

a) Una serie alterna de unos y ceros.

b) Una serie aleatoria de unos y ceros (véase Ej. 8.13.2).

10.2.1 Un sistema FSK binario dado opera en presencia de ruido blanco gaussiano aditivo con densidad espectral de potencia (bilateral) $\eta/2 = 1$ fW/Hz. Suponga unos y ceros equiprobables, y $T_b = 0.8$ ms. Las señales de señalización son

$$\phi_1(t) = A \cos (1.2 \times 10^6 t)$$

$$\phi_2(t) = A \cos (1.0 \times 10^6 t)$$

y $A = 10$ μV a través de un ohm.

a) Encuentre la probabilidad de error de bit utilizando detección coherente.

b) Encuentre la probabilidad de error de bit utilizando detección no coherente.

c) Estime el ancho de banda necesario.

10.2.2 Se genera una señal FSK binaria con fase discontinua por medio de la conmutación entre dos osciladores. La salida resultante se puede escribir como [véase Ec. (10.9)]

$$\phi(t) = Ap_1(t) \cos (\omega_1 t + \theta_1) + Ap_2(t) \cos (\omega_2 t + \theta_2),$$

donde $p_1(t)$ es una señal de conmutación binaria que es 0 o 1 en $(0, T)$ y $p_2(t) = 1 - p_1(t)$.

a) Encuentre el espectro de potencia para una secuencia alternada periódica de unos y ceros.

b) Grafique el espectro de potencia determinado en la parte (a) para $\Delta f T = 1$ y para $\Delta f T = 2$.

10.2.3 Determine $R_\phi(\tau)$ para $\phi(t)$ en el problema 10.2.2, y luego encuentre $S\phi(\omega)$ para unos y ceros equiprobables. Suponga que θ_1, θ_2 están distribuidas de manera uniforme en $(0, 2\pi)$, que los dos osciladores operan en forma independiente y que $\omega_c = (\omega_1 + \omega_2)/2$ es mucho mayor que $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$. [*Sugerencia*: Separe el valor medio de $p_1(t)$ y $p_2(t)$.]

10.2.4 Sean $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ dos señales FSK binarias en $(0, T)$ con frecuencia portadora ω_c y una diferencia de frecuencia de $2\Delta\omega$, donde $\Delta\omega \ll \omega_c$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

a) Demuestre que $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ son ortogonales en $(0,T)$ si $2\Delta wT = n\pi$.

b) Grafique $\log_{10} P_\epsilon$ contra $2\Delta\omega T$ para $E/\eta = 16$ en la ecuación (10.15).

10.2.5 Las transmisiones FSK se permiten en algunas bandas de alta frecuencia para radioaficionados utilizando ya sea $2\Delta f = 170$ Hz ("banda angosta") o $2\Delta f = 850$ Hz ("banda ancha"), y con $2\Delta fT = 3.75, 18.75$, respectivamente. Suponga que la magnitud rms de la señal (libre de ruido) en la entrada del receptor es de 8 μV a través de 50 Ω y que estas transmisiones se reciben en presencia de ruido blanco gaussiano aditivo con densidad espectral de potencia (bilateral) $\eta/2 = 1$ fW/Hz.

a) Calcule la mínima probabilidad de error utilizando demodulación coherente; suponga unos y ceros equiprobables.

b) Repita la parte (a) utilizando demodulación no coherente.

c) ¿Por qué cree que los valores de $2\Delta fT$ se eligen a esos valores fraccionarios?

d) ¿Cuáles son las ventajas relativas de cada elección de $2\Delta f$?

✓ **10.2.6** Utilice una FFT con $N = 512$ para calcular el espectro de potencia de la señal FSK binaria $\phi(t) = \text{sen}\,[2\pi(f_c \pm \Delta f)t]$ en $(0, 2)$. Sea $f_c = 64$, $(f_c + \Delta f)$ corresponde a 1, $(f_c - \Delta f)$ corresponde a 0. Para un patrón de simulación, subdivida el intervalo $(0, 2)$ en cuatro de igual duración y utilice las siguientes secuencias: 1010, 1100, 0001, 0111. Utilice igual ponderación para promediar los cuatro espectros de potencia. Grafique el espectro de potencia promedio en $(7N/32, 9N/32)$ para $\Delta f = 0.25, 0.5, 1.0$.

10.3.1 Este problema examina la sensibilidad de la suposición equiprobable en la probabilidad neta de error. Suponga que un sistema BPSK (PRK) coherente opera con $E/\eta = 10$ y que las probabilidades de ceros y unos son iguales a P_0, P_1, respectivamente.

a) Encuentre la probabilidad neta de error, P_{ϵ_n}, para $P_1 = 0.4, 0.5, 0.6$, suponiendo que el umbral de detección está en cero en cada caso.

b) Encuentre la potencia adicional de señal necesaria, en decibeles, para mantener la P_ϵ para $P_1 = 0.5$ cuando $P_1 = 0.4, 0.6$.

c) ¿Cuál es la P_ϵ para la ubicación óptima de los umbrales?

10.3.2 Se transmite un código binario utilizando BPSK (PRK) a una velocidad de 1.5 Mbps en presencia de ruido blanco gaussiano aditivo. La razón potencia de portadora a temperatura de ruido térmico en la entrada del receptor es de 1 fW/K. Especifique cualquier suposición que haga en su solución.

a) Calcule la mínima probabilidad de error.

b) Calcule la razón S/N (en decibeles) en la entrada del receptor.

c) Calcule el cambio en la S/N de entrada (en decibeles) para un aumento de un orden de magnitud en la probabilidad de error.

10.3.3 En experimentos de detección remota utilizando el satélite Nimbus F, las señales se envían de cada transmisor una vez por minuto y durante un segundo [véase, p. ej., la referencia dada para el problema de diseño del capítulo 8]. Esta transmisión de un segundo consiste en 320 ms de una portadora sin modular para localización y adquisición, seguida por 640 ms de datos con codificación Manchester modulados en PSK a 100 bps y con $\Delta\theta = \pi/3$. Para simplificar, suponga que la señal de datos resultante tiene un desfasamiento periódico, alternando entre $+\Delta\theta$, $-\Delta\theta$.

a) Encuentre la serie de Fourier de esta señal PSK en términos de $\Delta\theta$.

b) ¿Coincide el resultado de la parte (a) con el del ejercicio 6.5.1?

c) ¿Coincide el resultado de la parte (a) con la figura 10.13?

d) Grafique la densidad espectral de potencia de esta señal PSK para $\Delta\theta = \pi/3$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

10.3.4 Un sistema BPSK (PRK) dado transmite datos en presencia de ruido blanco gaussiano aditivo con una probabilidad de error $P_\epsilon = 10^{-5}$. Este sistema PSK se prueba para $\Delta\theta < \pi/2$.

a) Grafique P_ϵ como función de $\Delta\theta$ para $0 \leq \Delta\theta < \pi/2$.

b) El sistema de satélite descrito en el problema 10.3.3 debe cumplir con un objetivo de diseño de $P_\epsilon = 10^{-4}$ al mismo tiempo que asigna una fracción de la potencia transmitida a la portadora para un rastreo con PLL. ¿Qué fracción de la potencia transmitida se puede asignar a la portadora en estas condiciones?

10.3.5 Considere el lazo de Costas mostrado en la figura 10.16. Sea $p(t) = \cos(\omega_c t + \theta_i)$ la entrada. Escriba una señal para cada trayectoria en el diagrama de bloques y demuestre que el lazo de Costas mantiene al VCO centrado a la frecuencia de la portadora suprimida e insensible a $p(t)$, y, por tanto, proporciona una señal de referencia aceptable para el detector síncrono.

10.3.6 Se desea transmitir la corriente de datos 1011000101110010 utilizando DPSK.

a) Determine la secuencia codificada. Suponga un 1 como el dígito extra (preámbulo).

b) Utilice el receptor de la figura 10.17 para demodular la señal codificada DPSK de la parte (a).

c) Introduzca un error en el cuarto dígito (sin incluir el dígito de preámbulo) en la corriente de bits codificada DPSK de la parte (a); luego repita la parte (b). Explique su resultado.

10.4.1 Clasifique los sistemas de modulación digital binaria cubiertos, suponiendo que el principal criterio es a) la simplicidad del receptor o b) la menor necesidad de potencia pico para una tasa de error dada (10^{-4}).

10.4.2 Compare las necesidades de potencia promedio, expresadas en decibeles, para BPSK (PRK), DPSK, FSK coherente (ortogonal), FSK no coherente, ASK (OOK) coherente y ASK (OOK) no coherente para señalización NRZ a 300 bps, suponiendo que $\eta/2 = 10^{-14}$ W/Hz y $P_\epsilon = 10^{-5}$.

10.4.3 Un transmisor de alta frecuencia está limitado en potencia pico a 1 kW. Las pérdidas de trayectoria hasta el receptor se estiman en 135 dB. La densidad espectral de potencia (bilateral) del ruido blanco gaussiano aditivo es $\eta/2 = 10^{-18}$ W/Hz. Suponga señalización NRZ a 1 Mbps, y unos y ceros equiprobables.

a) Determine la mínima probabilidad de error usando ASK (OOK), FSK coherente (ortogonal) y BPSK (PRK).

b) Estime la razón S/N de entrada (en decibeles) para cada elección de la parte (a), usando el ancho de banda de los primeros ceros para ASK, BPSK, y una aproximación de $4/T_b$ para FSK.

10.5.1 Un sistema de espectro expandido BPSK de secuencia directa con potencia promedio P utiliza señalización de datos NRZ y opera en presencia de perturbación de un tono continuo con potencia media P_J. El agente perturbador opera a la frecuencia central de la transmisión BPSK. Suponga que la velocidad del código expansor es cuatro veces mayor que la velocidad de datos, y que el periodo de código expansor se puede suponer muy grande.

a) Dibuje las densidades espectrales de potencia correspondientes a la ecuación (10.37).

b) Dibuje las densidades espectrales de potencia correspondientes a la ecuación (10.38).

c) Suponga un filtro IF ideal con ancho de banda mínimo (Nyquist) para la señalización de datos NRZ. Plantee la integral para la razón de potencia de señal a perturbación. (*Opcional:* Resuelva la integral en forma numérica.)

http://libreria-universitaria.blogspot.com

10.5.2 Un sistema de espectro expandido BPSK de secuencia directa con potencia promedio P utiliza señalización de datos NRZ y opera en presencia de perturbación de un tono continuo con potencia media P_j. Suponga que la velocidad del código expansor es 100 veces mayor que la velocidad de datos, y que el periodo de código expansor se puede suponer muy grande. Suponga también un filtro IF ideal con ancho de banda igual al ancho de banda del primer cero de la señal modulada BPSK.

a) Determine la razón de potencia de perturbación en la salida del filtro IF a la de la entrada del receptor.

b) Demuestre que la potencia de perturbación es más efectiva en la frecuencia central de la transmisión BPSK.

10.5.3 Dos sistemas de espectro expandido BPSK de secuencia directa operan con señalización de datos NRZ y códigos de expansión PN. Los diagramas de bloques de los dos transmisores se muestran en la figura P-10.5.3(a). El sistema 1 transmite datos $d_1(t)$ usando una frecuencia portadora ω_1, una potencia promedio P_1 y una señal expansora $c_1(t)$. El sistema 2 transmite datos $d_2(t)$ usando una frecuencia portadora ω_2, una potencia promedio P_2 y una señal expansora $c_2(t)$. Suponga que $\omega_1 \neq \omega_2$, y que $d_1(t)$, $d_2(t)$, $c_1(t)$, $c_2(t)$ son estadísticamente independientes. Las tasas de datos son nominalmente iguales para ambos sistemas, lo mismo que las tasas de chip. Suponga también que se cumple la desigualdad $(1/T_{ch}) > (1/T_b)$. Se fija un receptor de compresión para demodular la señal transmitida por el sistema 1; en la figura P-10.5.3(b) se muestra un diagrama de bloques simplificado del receptor. Determine la razón de la potencia de la señal deseada a la potencia de la señal de interferencia en la salida del filtro IF para un ancho de banda mínimo (Nyquist) del filtro IF. Especifique cualquier suposición que haga en su solución.

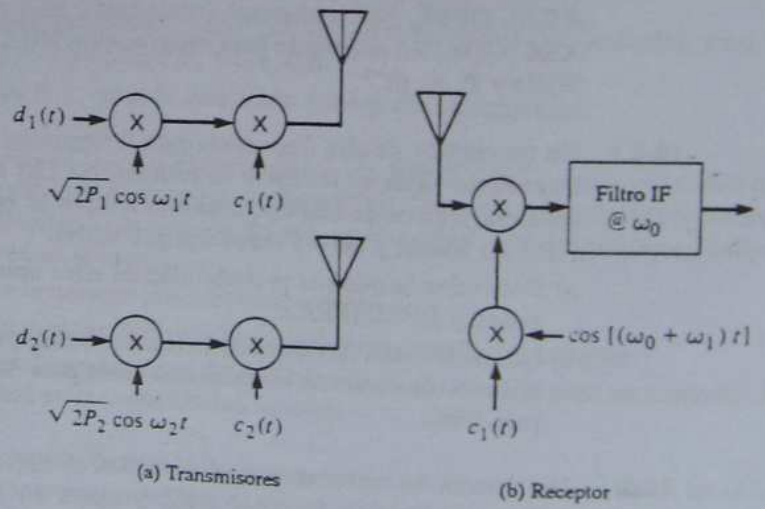


Figura P-10.5.3.

10.6.1 Las corrientes de datos $d_1(t)$ y $d_2(t)$ se componen de bits de índice impar e índice par, respectivamente, de la corriente de bits en serie dada en el problema 10.3.6. Usando la figura 10.24(d), dibuje la fase de la señal modulada resultante con respecto a la portadora (codificada en Gray) si la modulación usada es

a) QPSK;

b) OQPSK.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

10.6.2 Investigue una mejora propuesta para la transmisión de datos en GOES hacia estaciones terrestres (véase Ej. 10.3.1) que consiste en duplicar la tasa de datos y utilizar QPSK. Las necesidades de ancho de banda permanecen fijas. Suponga que se usará codificación de Gray. Calcule las necesidades de potencia del transmisor del satélite para este cambio propuesto para a) una tasa de error de símbolo fija; b) una BER fija.

10.6.3 Un sistema QPSK de 10 Mbps que utiliza señalización de datos NRZ y codificación de Gray opera en presencia de ruido blanco gaussiano aditivo. El receptor tiene un ancho de banda de ruido igual a dos tercios del ancho de banda del primer cero de la señal modulada, y la S/N del receptor es de 12 dB. Calcule la probabilidad de error de símbolo y la BER del sistema.

10.6.4 En la figura P-10.6.4 se muestra el diagrama de bloques de un lazo de cuarta potencia utilizado para recuperación de portadora QPSK. Analice la operación de este lazo, suponiendo una entrada libre de ruido.

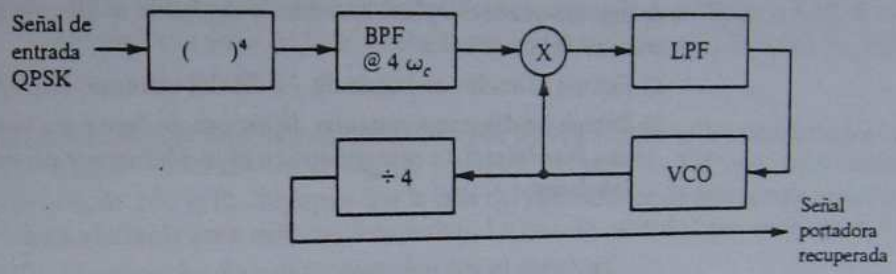


Figura P-10.6.4.

10.6.5 Dibuje un diagrama de bloques completo de un receptor OQPSK para datos binarios NRZ, incluyendo los subsistemas tanto de recuperación de portadora como de sincronía de símbolos.

10.6.6 Encuentre $v_\epsilon(t)$ para el lazo de Costas de la figura 10.27, y grafique $v_\epsilon(t)$ como función del error. ¿Tiene este dibujo similitudes con la señal de error en un PLL? Explique.

10.7.1 Repita el problema 10.6.1 para modulación MSK. Suponga que el bit precedente a la secuencia mostrada es cero.

10.7.2 Repita el problema 10.6.3 para modulación MSK.

10.7.3 a) Una medida del ancho de banda equivalente es la requerida para una densidad espectral de potencia/energía que tiene la misma potencia/energía que la señal [véase Fig. 4.14]. Compare los anchos de banda equivalentes para PSK, QPSK y MSK sobre esta base.

b) Otra forma de medir analíticamente el ancho de banda es en términos de los segundos momentos [véase Ec. (3.81)]. Calcule el ancho de banda equivalente para MSK sobre esta base, y compárela con el ancho de banda del primer cero.

c) ¿Por qué no se puede utilizar el método de la parte (b) para PSK y QPSK?

10.7.4 Calcule el contenido porcentual de potencia para QPSK y MSK para anchos de banda $W = 1/T_b, \ldots, 8/T_b$ y presente sus resultados en una tabla.

10.7.5 En la figura P-10.7.5 se muestra el diagrama de bloques de un sistema de recuperación de portadora para MSK. Suponiendo una señal libre de ruido en la entrada, demuestre que, excepto para una ambigüedad de fase de π radianes, este sistema proporciona las señales de referencia coherentes deseadas para la detección de MSK.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

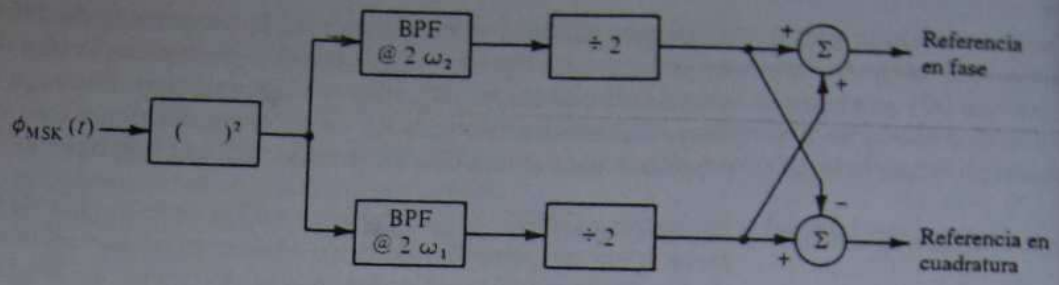


Figura P-10.7.5.

10.7.6 En la figura P-10.7.6 se muestra cierto método de mezcla en un sistema de transmisión de datos MSK en serie. Considere la corriente de bits 1111000110100101. Tome los bits de índice impar como $d_1(t)$ y los de índice par como $d_2(t)$. El generador PN de tres etapas mostrado en la figura 7.51 se utiliza para generar el código de mezcla. Tanto las secuencias de datos como la secuencia de código se forman utilizando NRZ, con los ceros representados por −1 y los unos como +1. El generador PN se dispara con la corriente de bits de manera que se desplaza a su estado siguiente conforme se aplica la señal $d_2(t)$ al puerto de entrada del mezclador.

a) Estime el ancho de banda de −3 dB del sistema. Especifique sus suposiciones.

b) Dibuje un diagrama reticular de exceso de fase para la salida, $\phi(t)$, del sistema. Suponga una fase inicial de cero grados en el modulador y un estado inicial (preámbulo) de 0 en los datos.

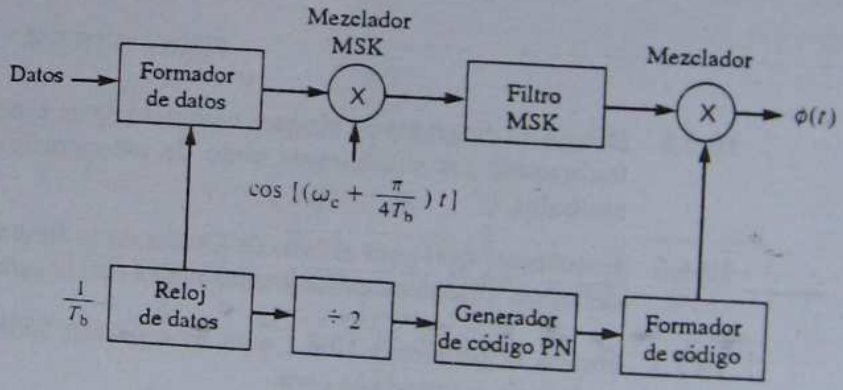


Figura P-10.7.6.

★ **10.8.1** Una estación receptora propuesta para un experimento espacial que requiere una tasa de bits de 0.3 Mbps tiene un ancho de banda de 1 MHz y una ganancia de recepción en antena de 48 dB. La ganancia de antena del vehículo espacial es de 6 dB y las pérdidas de trayectoria (en decibeles) son $\alpha = 100 + 20 \log_{10} d$, donde d está en millas. Suponiendo que la potencia promedio del transmisor es de 10 W y la densidad espectral de potencia del ruido es $\eta/2 = 2 \times 10^{-21}$ W/Hz, estime la máxima distancia sobre la cual se puede mantener la comunicación con una BER de 10^{-5} y utilizando

a) FSK ortogonal M-aria;

b) QPSK.

★ **10.8.2** Grafique la potencia promedio necesaria, para densidad espectral de ruido y tasa de transmisión de bits fijas, en función del ancho de banda para una FSK M-aria, $M > 2$, $P_e = 10^{-4}$ y $P_e = 10^{-5}$. Utilice una escala logarítmica para el ancho de banda y una lineal para la potencia. Esta gráfica muestra los compromisos de S/N, ancho de banda y probabilidad de error en los sistemas FSK M-arios.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

★ **10.8.3** Grafique f_b/B en función de E_b/η con los datos tomados de la tabla 10.2 para $P_e = 10^{-4}$ y $P_e = 10^{-5}$; grafique en coordenadas log-log. Grafique también la capacidad de canal límite de Hartley-Shannon [Ec. (9.9)] en estas coordenadas. Como $N = \eta B$, $S = E_b f_b$ y el valor límite de f_b es C, el caso límite para f_b/B es

$$\frac{C}{B} = \log_2\left(1 + \frac{EC}{\eta B}\right) \quad \text{o} \quad \frac{E}{\eta} = \frac{2^{C/B} - 1}{C/B}.$$

Esta gráfica contrasta el desempeño de la FSK M-aria con el de un sistema ideal.

★ **10.8.4** Usando un cambio en el orden de integración y un cambio de variables, demuestre que la ecuación (10.11) se obtiene de las ecuaciones (10.94) y (10.95) para el caso $M = 2$.

10.9.1 Un sistema de espectro expandido FH utiliza modulación de datos FSK binaria (NRZ) a 5 kbps y tres saltos de frecuencia por intervalo de bit. El salto de frecuencia está gobernado por una secuencia PN de longitud máxima generada por un registro de desplazamiento retroalimentado de 11 etapas. El desplazamiento de frecuencia del modulador FSK, Δf, se fija para $\Delta f T_b = 1$. Las diferencias de frecuencia entre saltos se fijan en $4\Delta f_h$, donde $\Delta f_h T_h = 1$. Determine el ancho de banda neto requerido por el sistema. Especifique sus suposiciones.

10.9.2 Un sistema de espectro expandido FH/BPSK de salto lento utiliza modulación de datos BPSK a una velocidad de 200 kbps y cuatro frecuencias FH con espaciamientos de frecuencia de 200 kHz. Suponga que la fase del sintetizador de frecuencia está distribuida en forma aleatoria para cada salto sucesivo. La tasa de salto de frecuencia es de 5 kHz.

a) ¿Cuál es el ancho de banda requerido por el sistema?

b) Dibuje la densidad espectral de potencia de la señal transmitida.

✓ **10.9.3** Calcule y grafique el espectro de potencia de un sistema de espectro expandido FH que utiliza FSK binaria para la modulación de datos y cuatro frecuencias de salto. Utilice una FFT de 128 puntos, $T = 1$, frecuencias de salto dadas por $f_h T = 26, 30, 34, 38$. Utilice modulación de datos de señal cuadrada a velocidad máxima y fije $\Delta f T = 1$.

10.10.1 Supóngase que se tiene en consideración una mejora para el sistema de transmisión por satélite del ejemplo 10.3.1 a fin de manejar posibles incrementos en la tasa de datos. Se decide que la potencia del transmisor se puede incrementar, pero no puede exceder los 200 W. Aparte de la modulación, no se pueden hacer otros cambios al sistema, incluyendo el ancho de banda. Determine si se puede cumplir la BER dada con la limitación de potencia del transmisor; en caso contrario, determine la mejor BER que puede lograr. Suponga codificación de Gray. Para cada caso, liste la tasa de datos, la potencia del transmisor y la BER esperada. Los casos por considerar son

a) PSK $M = 4$;

b) PSK $M = 8$.

10.10.2 En la figura P-10.10.2 se muestra un diagrama de bloques de un posible modulador PSK $M = 8$. El convertidor serie a paralelo cambia la corriente de bits de entrada a una velocidad f_b en tres señales polares binarias A, B, C, cada una a una velocidad $f_b/3$. La señal C controla dos amplificadores, cada uno con dos posibles ganancias prefijadas (se supone que son idénticos). Cuando $C = 1$, la ganancia del amplificador superior es grande y la del inferior es pequeña; ocurre lo contrario cuando $C = 0$.

a) Dibuje el diagrama fasorial para este modulador cuando las ganancias de los amplificadores tienen la razón 2:1.

b) Determine la relación de las ganancias de los amplificadores para 8 ángulos de modulación iguales.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

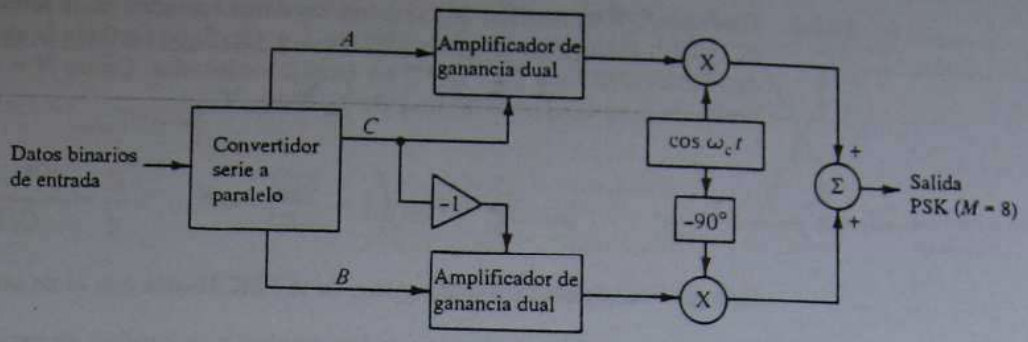


Figura P-10.10.2.

10.10.3 Un canal telefónico permite la transmisión de señales en el intervalo de frecuencias de 600-3000 Hz. Suponiendo que la frecuencia portadora es de 1800 Hz, demuestre que a) se puede enviar 2400 bps usando PSK de cuatro fases con forma de coseno elevado; y que b) se puede enviar 4800 bps usando PSK de ocho fases con 50% de atenuación senoidal. c) ¿Cuál es el ancho de banda a -6 dB para cada caso?

10.10.4 Se requiere un sistema de transmisión de datos para manejar una tasa de datos de 64 kbps usando PSK M-aria con detección coherente y BER de 10^{-4}. Suponga ruido blanco gaussiano aditivo, forma espectral de atenuación totalmente cosenoidal ($\alpha = 1$) (para ISI), un ancho de banda a -6 dB de 16 kHz y codificación de Gray.

a) Determine la mínima relación E_s/η necesaria para cumplir con los requisitos del sistema.

b) Repita la parte (a) si los requisitos en la tasa de datos se pueden relajar un poco (aunque usted debe decidir y especificar dónde se presenta la siguiente "ruptura" en el desempeño del sistema).

c) Convierta sus respuestas a requisitos de S/N del sistema.

10.11.1 Explique por qué existe una degradación significativa en el desempeño de un sistema APK cuando la señal modulada se pasa a través de un amplificador no lineal (de tipo saturación). Considere el caso de una señal APK de banda limitada, así como el de una sin limitación de banda.

10.11.2 Se transmiten datos binarios a 9600 bps a través de una línea telefónica acondicionada que utiliza un ancho de banda de 2400 Hz. Calcule la S/N promedio necesaria para mantener una $P_e = 10^{-5}$ usando (a) PSK 16-aria y (b) APK 16-aria (véase Fig. 10.45). Suponga que existe ruido blanco aditivo gaussiano.

10.11.3 Sea la distancia al origen en una constelación de estados de señal la raíz cuadrada de la energía de la señal. Suponga que cada separación en ϕ_1 y ϕ_2 en las constelaciones de estados de señal 16-APK mostradas en la figura 10.42 es igual a 2Δ. Determine Δ en términos de la energía promedio por símbolo E_s para cada caso, suponiendo que todos los estados de señal son equiprobables.

10.11.4 El atenuador que sigue al modulador 1 QPSK en la figura 10.44 se fija en $K = 1/2$ en aquel diagrama. Dibuje las constelaciones de estados de señal resultantes si la ganancia de este atenuador se fija en

a) $K = 1/4$;

b) $K = 3/4$.

★ **10.13.1** Se sabe que la probabilidad de error para el sistema PSK binario de la figura 10.49 es 10^{-4} con $P_0 = P_1 = 0.5$. Determine en forma geométrica la probabilidad de error correspondiente para ASK(OOK) y FSK usando la misma potencia promedio transmitida.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

★ **10.13.2** En la figura P-10.13.2 se muestra una constelación de estados de señal para QPSK. Usando un método de espacio de señales, derive la mínima probabilidad de error de este sistema cuando opera en presencia de ruido blanco aditivo gaussiano con densidad espectral de potencia $S_n(\omega) = \eta/2$. Suponga que los cuatro estados de señal son equiprobables; observe que la energía se ha normalizado para proporcionar una energía promedio por símbolo de E_s. [*Sugerencia*: Calcule primero la probabilidad de una decisión correcta.]

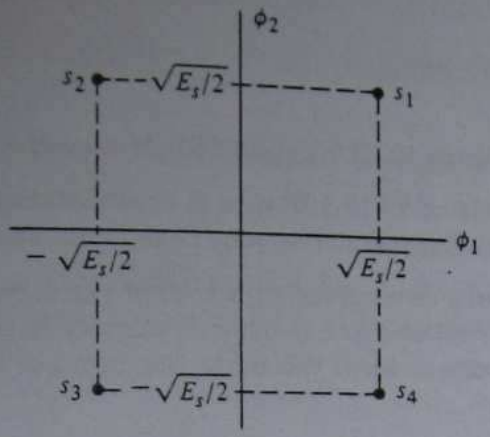


Figura P-10.13.2.

★ **10.13.3** Calcule la P_ϵ para constelación de estados de señal 16-APK mostrada en la figura 10.42(a). Exprese su respuesta en términos de E_s, la energía promedio por símbolo. [*Sugerencia*: Clasifique las regiones de detección en varios grupos; vea también la sugerencia del problema 10.13.2.]

★ **10.13.4** (Aproximación por unión de fronteras) En sistemas multiestado, se puede volver tedioso y un tanto difícil evaluar con exactitud la probabilidad de error. En tales casos, podemos estar satisfechos de encontrar una frontera, y este problema investiga uno llamado aproximación por unión de fronteras. Considere el caso QPSK mostrado en la figura P-10.13.2; suponga que se desea calcular P_ϵ utilizando el siguiente método sistemático. Primero, quite todos los estados de señal en consideración excepto el par (s_1, s_2) y encuentre $P_{\epsilon|s_1}$; el área cubierta es el semiplano izquierdo. En seguida considere el par (s_1, s_4) y encuentre $P_{\epsilon|s_1}$; el área cubierta es el semiplano inferior. En tercer lugar, considere el par (s_1, s_3) y encuentre $P_{\epsilon|s_1}$; el área cubierta es un semiplano inclinado a $-\pi/4$ de la horizontal. Ahora, aproximamos los tres cuadrantes sobre los cuales se va a calcular P_ϵ tomando la unión (suma) de las tres áreas calculadas. Por supuesto, algunas porciones de estas áreas se encuentran cubiertas más de una vez en este procedimiento, y por tanto esta aproximación proporciona un límite superior. Calcule la aproximación por unión de fronteras para el sistema QPSK del problema 10.13.2.

★ **10.3.5** (Aproximación del vecino más próximo) Si la probabilidad de error es pequeña, entonces puede ser útil una mejor aproximación al método desarrollado en el problema 10.13.4, el cual se explora en este problema.

a) Utilice la aproximación por unión de fronteras [véase Prob. 10.13.4] para encontrar una frontera en P_ϵ para la constelación de estados de señal mostrada en la figura P-10.13.5. Suponga que todos los estados de señal son equiprobables y normalice a una energía promedio por símbolo, denominas E_s.

b) Añada una aproximación más suponiendo que la probabilidad de error está gobernada sólo por el vecino más próximo (vecinos, si hay varios equidistantes) en la constelación.

c) Grafique los resultados para las partes (a) y (b) en función de E_s/η y compare.

d) ¿Por qué esta aproximación trabaja mejor cuando la probabilidad de error es pequeña?

http://libreria-universitaria.blogspot.com

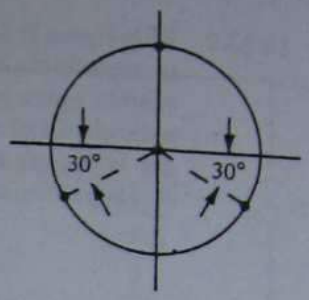


Figura P-10.13.5.

★ **10.13.6** Repita el problema 10.13.5(b) para PSK M-aria, $M > 2$.

★ **10.13.7** Repita el problema 10.13.5(b) para la constelación de estados de señal mostrada en la figura 10.42(a). Exprese su respuesta en términos de E_s, la energía promedio por símbolo.

★ **10.14.1** Una señal bipolar de amplitud ±1 V se recibe en presencia de ruido gaussiano aditivo con varianza 0.2 V^2. Determine el umbral óptimo y la probabilidad de error resultante si se toma una muestra de señal más ruido. Suponga que ambos tipos de error son igualmente costosos y:

a) $P_1 = 0.5$;

b) $P_1 = 0.75$;

c) Varianza de ruido de 0.4 V^2, P_1 como en las partes (a) y (b).

★ **10.14.2** Una observación simple $y = s + n$ consiste en una señal s que puede ser 0 o 1 y ruido aditivo con una pdf dada por $p(n) = \exp(-2|n|)$. Determine el umbral de detección óptimo y su correspondiente probabilidad de error si a) $P_1 = P_0$; b) $P_1 = 2P_0$.

★ **10.14.3** Calcule y grafique la probabilidad de error para el problema 10.14.2 como función de P_1 $(0 < P_1 < 1)$. Establezca sus suposiciones.

★ **10.14.4** En un experimento dado, se hacen N observaciones para determinar cuál de dos posibles hipótesis, H_0 y H_1, es correcta. En ambas posibilidades las observaciones son variables aleatorias gaussianas estadísticamente independientes con media cero. Con H_0 cada y_i observable tiene una varianza σ_0^2, mientras que con H_1 cada y_i observable tiene una varianza σ_1^2. Determine el algoritmo óptimo de procesamiento de señal para detección con mínima probabilidad de error.

★ **10.14.5** Una señal $s(t)$ dada se debe detectar en presencia de ruido blanco gaussiano con base en N observaciones. Usando la prueba de razón de similitud (LRT), demuestre que para una restricción de energía fija el receptor óptimo lleva a cabo una correlación cruzada. [*Sugerencia*: Fije una decisión basada en las posibles condiciones $y = s + n$, $y = n$, escriba la pdf para el ruido y sustituya variables.]

★ **10.14.6** Se envía cualquiera de las señales $s_1(t)$ o $s_2(t)$ en $(0, T)$ en presencia de ruido gaussiano aditivo con media cero y varianza σ^2. Suponga que estas dos señales son equiprobables y que tienen igual energía en $(0, T)$. Utilice la prueba de razón de similitud (LRT) para determinar qué procesamiento de señal se debe considerar en el receptor.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

PROBLEMAS DE DISEÑO

Problema de diseño

10.1 Sistema de comunicación vía satélite Intelsat

En 1965 se lanzó el primero de una serie de satélites de comunicación Intelsat, seguido por los diseños de las series II, III, IV, IVA, V y VI. Intelsat se fundó en agosto de 1964 y es administrado y operado por un consorcio internacional, el cual tenía 117 miembros en 1989. El sistema Intelsat se destina principalmente para servicios telefónicos de larga distancia, con algunas facilidades para servicios de televisión y datos.

Se utilizan tres configuraciones estándar para las estaciones terrestres en el sistema: las estaciones *A* y *B* operan en la banda de 6/4-GHz, mientras que las estaciones *C* operan en la banda de 14/11-GHz. Para la banda de 6/4-GHz, la banda de 500 Mhz de 5.925 a 6.425 GHz se utiliza para el enlace ascendente y la de 3.7 a 4.2 GHz se utiliza para el enlace descendente. Las estaciones *A* tienen grandes antenas (26 a 30 m) y requisitos estrictos para los amplificadores de bajo ruido; las estaciones *B* tienen requisitos un poco más relajados.

El satélite actúa como un transpondedor (receptor/transmisor). La banda de 500 Mhz se subdivide en 12 bandas de 36 MHz (más la banda de resguardo), cada una manejada por un transpondedor. El método de acceso es FDMA (*frequency division multiple access*, acceso múltiple por división de frecuencia), similar a los métodos FDM analizados en el capítulo 5. FDMA dispone de un grupo de frecuencias y las asigna a los usuarios, ya sea con base en preasignación o en asignación por demanda. En el primer caso, se modula una portadora (usando FM) para un grupo de canales telefónicos FDM estándar (agrupados usando técnicas de SSB; los grupos pueden ser 24, 60, 96, ..., 972 canales de 4 kHz). Cada asignación tiene su propio segmento de ancho de banda (2.5 MHz para 24 canales, 5 MHz para 60, etc.) y el sistema global se denomina FDM/FM/FDMA. Los países miembros alquilan estas asignaciones de canales dedicados.

Un segundo tipo de asignación ofrecida es el de un solo canal por portadora (SCPS). En este caso, un transpondedor de 36 MHz se subdivide en 800 canales de 45 kHz de ancho de banda cada uno. Cada canal puede manejar 64 Kbps, y se utiliza QPSK para permanecer en el ancho de banda asignado. Además, se comparte en tiempo (TDMA) un canal de señal común (CSC) que opera a 128 kbps (PSK) para requisitos de utilización de canal y asignación de frecuencias. Los canales son activados por voz, de modo que cada uno puede manejar una conversación telefónica bidireccional. Este subsistema particular se conoce por el acrónimo SPADE (*single-channel-per-carrier pulse-code-modulated multiple-access demand-assignment equipment*). Los canales están disponibles a petición, aumentándose la eficiencia del transpondedor del satélite en canales donde el tráfico es ligero y variable.

Su asignación en este problema de diseño depende de los requisitos del profesor, pero debería incluir lo siguiente.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

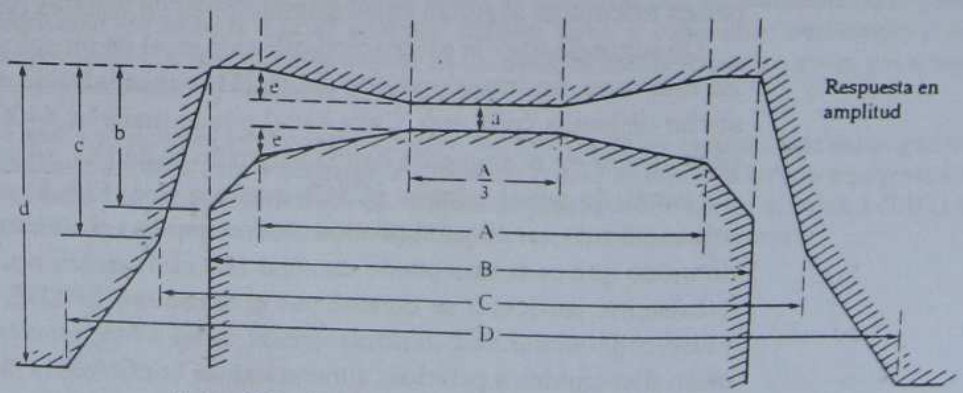
a) Hacer lecturas e investigación adicionales con respecto a la serie de satélites de comunicación Intelsat (u otra serie, como lo diga su profesor); esta breve introducción ha sido ¡sólo para iniciarlo! Dibuje los diagramas de asignación de tiempo o frecuencia, clasifique los métodos utilizados y describa el o los métodos de control de asignación. Algunas sugerencias de lectura son la referencia 2 del capítulo 4, la referencia 4 del capítulo 7 y la referencia 6 del capítulo 10; se citan referencias adicionales. Véase también R. L. Freeman, *Telecommunication System Engineering*, 2a. ed., Nueva York, John Wiley & Sons, 1981.

b) Para televisión, están disponibles dos modos de transmisión: (1) transpondedor completo y (2) medio transpondedor. Para este servicio, en seguida se muestra una máscara espectral típica para la respuesta en amplitud del transmisor de una estación *B*, adaptada de las especificaciones para la serie de satélites Intelsat IV y IVA que fueron presentados en la década de los setenta (cortesía de COMSAT). (Intelsat ha empezado a exhibir la serie de satélites VI en 1989.)

Modo	Vídeo (MHz)	A (MHz)	B (MHz)	C (MHz)	D (MHz)
Medio	17.5	12.6	15.75	18.0	26.5
Completo	30.0	24.0	30.0	34.0	50.0

Modo	Vídeo (MHz)	a (MHz)	b (MHz)	c (MHz)	d (MHz)	e (MHz)
Medio	17.5	0.3	2.5	6.5	25	0.1
Completo	30.0	0.5	2.5	8.0	25	0.3

Diseñe un TDM (hipotético) y un sistema de modulación para manejar tantos canales de 64 kbps como sea posible y estar aún dentro de las restricciones espectrales de cada modo para televisión (no se permite la inserción de un filtro entre el transmisor y la antena para cumplir los objetivos del diseño). Especifique sus suposiciones.



Notas: (1) Las figuras son simétricas con respecto a la frecuencia central
(2) Las figuras no están dibujadas a escala
(3) La escala de amplitud es lineal en dB
(4) La escala de frecuencia es lineal en MHz

Máscara espectral estándar B Intelsat (cortesía de COMSAT).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

APÉNDICE

A Tablas matemáticas seleccionadas

A.1 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\cos A \cos B = \tfrac{1}{2}[\cos(A + B) + \cos(A - B)]$$

$$\operatorname{sen} A \cos B = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B)]$$

$$\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \cos A$$

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 A = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A$$

$$\operatorname{sen}^2 A = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2A)$$

$$\cos^2 A = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2A)$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{1}{2j}(e^{jA} - e^{-jA})$$

$$\cos A = \tfrac{1}{2}(e^{jA} + e^{-jA})$$

$$e^{\mp jA} = \cos A \pm j \operatorname{sen} A$$

A.2 IDENTIDADES EN FUNCIONES COMPLEJAS

$$z = x + jy = \sqrt{x^2 + y^2}\, e^{j \tan^{-1}(y/x)}$$

$$z^* = x - jy = \sqrt{x^2 + y^2}\, e^{-j \tan^{-1}(y/x)}$$

$$|z|^2 = zz^* = x^2 + y^2$$

$$\mathcal{R}e\{z\} = \tfrac{1}{2}[z + z^*]$$

$$\mathcal{I}m\{z\} = \frac{1}{2j}[z - z^*]$$

$$\mathcal{R}e\{z_1 z_2\} = \mathcal{R}e\{z_1\}\mathcal{R}e\{z_2\} - \mathcal{I}m\{z_1\}\mathcal{I}m\{z_2\}$$

$$\mathcal{I}m\{z_1 z_2\} = \mathcal{R}e\{z_1\}\mathcal{I}m\{z_2\} + \mathcal{I}m\{z_1\}\mathcal{R}e\{z_2\}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

A.3 SERIES

Exponencial:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots.$$

Trigonométrica:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots.$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots.$$

Binomial (para $x^2 < 1$):

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{1}{2!}n(n-1)x^2 \pm \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)x^3 + \cdots.$$

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp nx + \frac{1}{2!}n(n+1)x^2 \mp \frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)x^3 + \cdots.$$

A.4 SUMATORIAS

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

A.5 INTEGRALES INDEFINIDAS

$$\int \operatorname{sen} ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax$$

$$\int \operatorname{sen}^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

$$\int \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

$$\int \operatorname{sen} ax \cos ax\, dx = \frac{1}{2a}\operatorname{sen}^2(ax)$$

$$\int x \operatorname{sen} ax\, dx = \frac{1}{a^2}(\operatorname{sen} ax - ax \cos ax)$$

$$\int x \cos ax\, dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax \operatorname{sen} ax)$$

$$\int x^2 \operatorname{sen} ax\, dx = \frac{1}{a^3}(2ax \operatorname{sen} ax + 2 \cos ax - a^2x^2 \cos ax)$$

$$\int x^2 \cos ax\, dx = \frac{1}{a^3}(2ax \cos ax - 2 \operatorname{sen} ax + a^2x^2 \operatorname{sen} ax)$$

$$\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)} \qquad a^2 \neq b^2$$

$$\int \cos ax \cos bx\, dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)} \qquad a^2 \neq b^2$$

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx\, dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} \qquad a^2 \neq b^2$$

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int xe^{ax}\, dx = \frac{1}{a^2}e^{ax}(ax - 1)$$

$$\int x^2e^{ax}\, dx = \frac{1}{a^3}e^{ax}(a^2x^2 - 2ax + 2)$$

$$\int x^ne^{ax}\, dx = \frac{x^n}{a}e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\, dx$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{1}{a^2 + b^2}e^{ax}(a \operatorname{sen} bx - b \cos bx)$$

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{1}{a^2 + b^2}e^{ax}(a \cos bx + b \operatorname{sen} bx)$$

$$\int \left[\frac{\operatorname{sen} ax}{x}\right]^2 dx = a\int \frac{\operatorname{sen} 2ax}{x}\, dx - \frac{\operatorname{sen}^2 ax}{x}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right)$$

$$\int \frac{x^2\, dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{x}{b^2} - \frac{a}{b^2}\tan^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right)$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

$$\int \frac{dx}{(a^2 + b^2x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2 + b^2x^2)} + \frac{1}{2a^3b}\tan^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right)$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(a^2 + b^2x^2)^2} = \frac{-x}{2b^2(a^2 + b^2x^2)} + \frac{1}{2ab^3}\tan^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right)$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 + b^2x^2)^3} = \frac{x}{4a^2(a^2 + b^2x^2)^2} + \frac{3x}{8a^4(a^2 + b^2x^2)} + \frac{3}{8a^5b}\tan^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right)$$

A.6 INTEGRALES DEFINIDAS

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{x}dx = \begin{cases} \pi/2 & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -\pi/2 & a < 0 \end{cases}$$

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} u}{u}du \triangleq \operatorname{Si}(x) \quad \text{(una integral tabulada como función de } x\text{)}$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 ax}{x^2}dx = |a|\pi/2$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/a}$$

$$\int_0^\infty xe^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a}$$

$$\int_0^\infty x^2e^{-ax^2}dx = \frac{1}{4a}\sqrt{\pi/a}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a + b)} \qquad a > 0, b > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{ax^4 + b} = \frac{\pi}{2\sqrt{2b}}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/4} \qquad ab > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{ax^6 + b} = \frac{\pi}{3b}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/6} \qquad ab > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^{2n}} = \frac{[\pi/(2n)]}{\operatorname{sen}[\pi/(2n)]} \qquad n \text{ es un entero, } n > 0$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

APÉNDICE

B Decibeles

El decibel es una unidad logarítmica de medición usada para comparar dos niveles de potencia. Denotando con P_r el nivel de potencia de referencia, el decibel (dB) se define mediante la ecuación

$$(\text{dB}) \triangleq 10 \log_{10} (P/P_r) . \tag{B.1}$$

Como el decibel es una unidad logarítmica, las operaciones de multiplicación y división se reducen a suma y resta, mientras que las potencias y raíces, a multiplicación y división. Sin embargo, la suma y la resta requieren la conversión a valores numéricos. El signo de un logaritmo cambia cuando su argumento se invierte. Dada una razón de potencias expresada en decibeles, la razón de potencia puede hallarse del inverso de la ecuación (B.1):

$$P/P_r = 10^{(\text{dB})/10} \tag{B.2}$$

Los decibeles también se usan para indicar niveles de potencia absolutos agregando una tercera letra a la notación. Si el nivel de referencia P_r es de 1 watt, la potencia P se expresa en "decibeles por encima de 1 watt" (dBW) por medio de

$$P_{\text{dBW}} = 10 \log_{10} P. \tag{B.3}$$

De igual forma, si la potencia de referencia P_r es de 1 miliwatt, la potencia P se expresa en "decibeles por encima de 1 miliwatt" (dBm).

La definición de la ecuación (B.1) puede ponerse en términos de tensiones V y V_r a través de resistencias R y R_r de la siguiente manera:

$$(\text{dB}) = 10 \log_{10} \left[\frac{V^2/R}{V_r^2/R_r} \right] \tag{B.4a}$$

$$= 20 \log_{10} (V/V_r) - 10 \log_{10} (R/R_r) . \tag{B.4b}$$

Para el caso en que $R = R_r$, esto se convierte en

$$(\text{dB}) = 20 \log_{10} (V/V_r) . \tag{B.5}$$

Si además la tensión de referencia se toma como uno, se tiene

$$V_{\text{dB}} = 20 \log_{10} V. \tag{B.6}$$

A veces, la ecuación (B.6) se usa como definición del decibel. Esto es válido siempre que se empleen los adecuados factores de normalización al hacer cualquier comparación en los cálculos de potencia usando la definición de la ecuación (B.1).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La utilización predominante del decibel en sistemas de comunicación es por razones de potencia. Salvo indicación contraria, las ecuaciones (B.1) y (B.2) son las relaciones de definición.

EJERCICIO B.1

(a) Convierta las siguientes razones de potencia a dB: 4000, 0.003. (b) Convierta a valores numéricos (en términos de potencia) lo siguiente: 29.3 dB, -7 dBW, 27 dBm.

RESPUESTA: (a) 36.0 dB, -25.2 dB; (b) 851, 0.200 W, 0.501 W.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

APÉNDICE

C Bandas de frecuencias de radiodifusión

TABLA C.1 Designaciones de frecuencias

ELF	Frecuencia extremadamente baja	30–300 Hz
VF	Frecuencia de voz	300–3000 Hz
VLF	Frecuencia muy baja	3–30 kHz
LF	Frecuencia baja	30–300 kHz
MF	Frecuencia media	300–3000 kHz
HF	Frecuencia alta	3–30 MHz
VHF	Frecuencia muy alta	30–300 MHz
UHF	Frecuencia ultraalta	300–3000 MHz
SHF	Frecuencia superalta	3–30 GHz
EHF	Frecuencia extremadamente alta	30–300 GHz

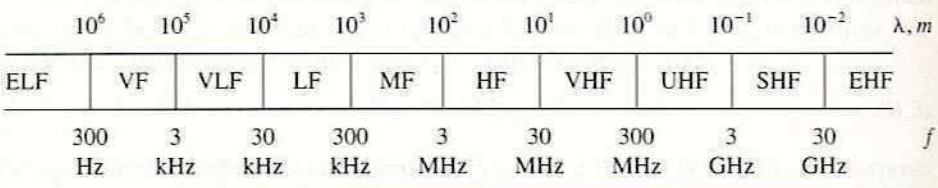

10^6 10^5 10^4 10^3 10^2 10^1 10^0 10^{-1} 10^{-2} λ, m
ELF VF VLF LF MF HF VHF UHF SHF EHF
300 Hz 3 kHz 30 kHz 300 kHz 3 MHz 30 MHz 300 MHz 3 GHz 30 GHz f

TABLA C.2 Bandas de frecuencia de radar[a]

Banda	Frecuencia	Banda	Frecuencia
HF	3–30 MHz	X	8–12 GHz
VHF	30–300 MHz	K_u	12–18 GHz
UHF	300–3000 MHz	K	18–27 GHz
L	1–2 GHz	K_a	27–40 GHz
S	2–4 GHz	V	40–75 GHz
C	4–8 GHz	W	75–110 GHz
		milimétrica	110–300 GHz

[a] E. C. Jordan (ed), *Reference Data for Engineers: Radio, Electronics, Computers, and Communications*, Indianápolis, Howard W. Sams & Co., 1985.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Banda AM†

A las estaciones se les asignan frecuencias portadoras a intervalos de 10 kHz desde 540 hasta 1600 KHz. El ancho de banda de las transmisiones es de alrededor de 10 kHz nominales. A estaciones que están próximas suelen asignárseles frecuencias portadoras separadas por 30 kHz o más. La interferencia entre transmisiones se controla mediante una combinación de asignación de frecuencia, potencia del transmisor, patrón de transmisión de la antena y posibles restricciones de operación nocturna. La estabilidad requerida de la portadora es de ±20Hz; la salida de potencia autorizada es para una portadora no modulada.

Banda FM†

A las estaciones se les asignan frecuencias portadoras a intervalos de 200 kHz desde 88 MHz hasta 108 MHz. Las transmisiones recibidas más allá de la distancia visual son débiles y propensas al desvanecimiento. Los receptores de FM tienden a suprimir las señales débiles cuando hay señales fuertes. Esto ayuda a definir el alcance de la estación. La desviación de frecuencia pico es de 75 kHz. La mínima estabilidad de la frecuencia portadora es de ±0.002% (es decir, ±2 kHz a 100 MHz).

TABLA C.3 Niveles de potencia de transmisión permitidos especificados por la FCC

Banda AM	Clase de radiodifusión	Potencia promedio, kW
	Local	0.1–1.0
	Regional	0.5–5.0
	Clara	0.25–50

Banda FM: 0.25, 1, 3, 5, 10, 25, 50, 100 kW, dependiendo de la clase de servicio (tamaño de la comunidad) y del área de cobertura para asignación de licencia.

Televisión-vídeo:	Canales	Potencia efectiva radiada (promedio), kW
	VHF (2–6)	100
	VHF (7–13)	316
	UHF	5000

Televisión-audio: 10% (–10 dB) –20% (–7 dB) de potencia en la portadora de vídeo.

† *Ibid.*

http://libreria-universitaria.blogspot.com

TABLA C.4 Asignación de estaciones de televisión VHF[a]

Número de canal	Intervalo de frecuencias (MHz)	Portadora de video (MHz)[b]
1		No utilizada
2	54–60	55.25
3	60–66	61.25
4	66–72	67.25
5	76–82	77.25
6	82–88	83.25
		(Banda FM estándar 88-108)
7	174–180	175.25
8	180–186	181.25
9	186–192	187.25
10	192–198	193.25
11	198–204	199.25
12	204–210	205.25
13	210–216	211.25

[a] Para mayor información sobre sistemas de televisión, véase K. B. Benson (ed.), *Television Engineering Handbook*, Nueva York, McGraw Hill, 1986, Cap. 13.

[b] La portadora de audio es 4.50 MHz más alta que la de video.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

TABLA C.5 Asignación de estaciones de televisión UHF

Número de canal	Intervalo de frecuencias (MHz)	Portadora de vídeo (MHz)[a]	Número de canal	Intervalo de frecuencias (MHz)	Portadora de vídeo (MHz)[a]
14	470–476	471.25	42	638–644	639.25
15	476–482	477.25	43	644–650	645.25
16	482–488	483.25	44	650–656	651.25
17	488–494	489.25	45	656–662	657.25
18	494–500	495.25	46	662–668	663.25
19	500–506	501.25	47	668–674	669.25
20	506–512	507.25	48	674–680	675.25
21	512–518	513.25	49	680–686	681.25
22	518–524	519.25	50	686–692	687.25
23	524–530	525.25	51	692–698	693.25
24	530–536	531.25	52	698–704	699.25
25	536–542	537.25	53	704–710	705.25
26	542–548	543.25	54	710–716	711.25
27	548–554	549.25	55	716–722	717.25
28	554–560	555.25	56	722–728	723.25
29	560–566	561.25	57	728–734	729.25
30	566–572	567.25	58	734–740	735.25
31	572–578	573.25	59	740–746	741.25
32	578–584	579.25	60	746–752	747.25
33	584–590	585.25	61	752–758	753.25
34	590–596	591.25	62	758–764	759.25
35	596–602	597.25	63	764–770	765.25
36	602–608	603.25	64	770–776	771.25
37	608–614	609.25	65	776–782	777.25
38	614–620	615.25	66	782–788	783.25
39	620–626	621.25	67	788–794	789.25
40	626–632	627.25	68	794–800	795.25
41	632–638	633.25	69	800–806	801.25

[a] La portadora de audio es 4.50 MHz más alta que la de vídeo.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

TABLA C.6 Frecuencias de canales de televisión por cable

Número de canal CATV	Designación literal	Nombre de la banda	Frecuencia (MHz)[a]	Número de canal CATV	Nombre de la banda	Frecuencia (MHz)[a]
2–6		VHF-L	(véase TV)[b]	37	Hiper	300–306
95	A-5	Med	90–96	38		306–312
96	A-4		96–102	39		312–318
97	A-3		102–108	40		318–324
98	A-2		108–114	41		324–330
99	A-1		114–120	42		330–336
14	A		120–126	43		336–342
15	B		126–132	44		342–348
16	C		132–138	45		348–354
17	D		138–144	46		354–360
18	E		144–150	47		360–366
19	F		150–156	48		366–372
20	G		156–162	49		372–378
21	H		162–168	50		378–384
22	I		168–174	51		384–390
7–13		VHF-H	(véase TV)	52		390–396
23	J	Super	216–222	53		396–402
24	K		222–228	54		402–408
25	L		228–234	55		408–414
26	M		234–240	56		414–420
27	N		240–246	57		420–426
28	O		246–252	58		426–432
29	P		252–258	59		432–438
30	Q		258–264	60		438–444
31	R		264–270	61		444–450
32	S		270–276	62		450–456
33	T		276–282	63		456–462
34	U		282–288	64		462–468
35	V		288–294	65	Ultra	468–474
36	W		294–300	⋮		⋮
				94		642–648

[a] La frecuencia portadora de vídeo está 1.25 MHz por encima del límite inferior de la banda asignada; la frecuencia portadora de audio está 4.5 MHz por encima de la frecuencia portadora de vídeo para cada canal,

[b] Las asignaciones para los canales 5 y 6 se pueden desplazar 2 MHz hacia arriba, permitiendo entonces una asignación no hecha para 72–78 MHz (canal 1).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

TABLA C.7 Bandas de aficionados[a]

Designación de la banda	Posición de las frecuencias (MHz)
160 metros	1.800–2.000
80 metros	3.500–4.000
40 metros	7.000–7.300
20 metros	14.000–14.350
15 metros	21.000–21.450
10 metros	28.000–29.700
6 metros	50.0 –54.0
2 metros	144–148
	220–225
	420–450
	1 215–1 300
	2 300–2 450
	3 300–3 500
	5 650–5 925
	10 000–10 500
	24 000–24 500
	48 000–50 000
	71 000–76 000
	165 000–170 000
	240 000–250 000
	arriba de 300 000

Notas

1. La máxima potencia de entrada autorizada en la etapa final del transmisor es de 1 kW.
2. La máxima modulación de amplitud permitida es de 100%. Excepto para pruebas cortas o ajustes, el transmisor no puede emitir una onda portadora a frecuencias menores que 51 MHz a no ser que module para propósitos de comunicación.
3. Banda lateral única: habitualmente se usa la banda lateral inferior para 80 m y 40 m; la superior se usa en frecuencias más altas.

[a] Para mayor información, véase FCC *Rules and Regulations*, vol. VI, parte 97, o *The Radio Amateur's Handbook*, American Radio Relay League, Newington, Conn., 06111.

TABLA C.8 Servicio de radio civil[a]

Estas posiciones de las frecuencias corresponden a estaciones fijas y móviles ideadas para radiocomunicaciones, señales por radio y control de objetos o dispositivos remotos por radio, de corto alcance para uso personal o de negocios.

Clasificaciones

Clase de estación	Servicio	Banda (MHz)	Máxima potencia de entrada al transmisor (W)	Máxima potencia media de salida (W)	Tolerancia de frecuencia (%)
A	General	460–470	60	48	0.0005
B	General	460–470	5	4	0.5
C	Control remoto	26.96–27.23	5	4	0.005
	Control aficionado	72–76	5	4	0.005
D	Radioteléfono	26.96–27.41	5	4	0.005

[a] Para mayor información, véase *FCC Rules and Regulations*, vol. VI, parte 95.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Asignación de frecuencias

Clases A y B

Estaciones base/móvil (MHz)	Sólo móvil (MHz)
462.550	467.550
462.575	467.575
462.600	467.600
462.625	467.625
462.650	467.650
462.675	467.675
462.700	467.700
462.725	467.725

Clase C (sólo móvil; puede emplear sólo modulación de amplitud de tono o conmutación encendido-apagado de la portadora no modulada)

1. Para control por radio de objetos o aparatos remotos:
   26.995 MHz
   27.045
   27.095
   27.145
   27.195
   27.255
2. Para control remoto de cualquier modelo usado como entretenimiento:
   72.16 MHz
   72.32
   72.96
3. Sólo para control remoto de modelos de avión:
   72.08 MHz
   72.24
   72.40
   75.64

Clase D
(Sólo para uso de radioteléfono móvil)

Canal	Frecuencia (MHz)	Canal	Frecuencia (MHz)	Canal	Frecuencia (MHz)
1	26.965	15	27.135	28	27.285
2	26.975	16	27.155	29	27.295
3	26.985	17	27.165	30	27.305
4	27.005	18	27.175	31	27.315
5	27.015	19	27.185	32	27.325
6	27.025	20	27.205	33	27.335
7	27.035	21	27.215	34	27.345
8	27.055	22	27.225	35	27.355
9[a]	27.065	24	27.235	36	27.365
10	27.075	25	27.245	37	27.375
11	27.085	23	27.255	38	27.385
12	27.105	26	27.265	39	27.395
13	27.115	27	27.275	40	27.405
14	27.125				

[a] El canal 9 se reserva para comunicaciones de emergencia: (a) que impliquen la inmediata salvación de vidas o la protección de la propiedad; (b) necesarias para prestar asistencia a un conductor.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

TABLA C.9 Defensa civil[a]

Servicio de comunicación de desastres

Canal	Frecuencia asignada (MHz)	Ancho de banda (kHz)	Servicio
1	1.7505	1	Radiotelegrafía
2	1.7515	1	Radiotelegrafía
3	1.7525	1	Radiotelegrafía
4	1.7535	1	Radiotelegrafía
5	1.7545	1	Radiotelegrafía
6	1.7555	1	Radiotelegrafía
7	1.7565	1	Radiotelegrafía
8	1.7575	1	Radiotelegrafía
9	1.7615	7	Radiotelefonía
10	1.7685	7	Radiotelefonía
11	1.7755	7	Radiotelefonía
12	1.7825	7	Radiotelefonía
13	1.7895	7	Radiotelefonía
14	1.7965	7	Radiotelefonía

El canal 9 se reserva para la "escena de desastre".

[a] Para mayor información, véase *FCC Rules and Regulations, vol. VI*, parte 99.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

APÉNDICE

D Transmisiones de televisión comercial

Los sistemas de televisión comercial muestran varios aspectos de las opciones en el diseño de señales y los compromisos en sistemas de comunicación. Aquí se destacarán las opciones en el diseño de señales y no en los circuitos. Las normas de televisión varían de un país a otro y, salvo que se indique otra cosa, los sistemas analizados aquí son los que se usan actualmente en Estados Unidos.

D.1 TELEVISIÓN EN BLANCO Y NEGRO

Para transmitir información bidimensional (en este caso la imagen) por medio de un sistema coordenado unidimensional (en este caso el tiempo), es necesario emplear alguna técnica de barrido. En televisión, cada imagen se divide en 525 líneas y se recorre línea por línea. Se ha decidido que el tiempo para el barrido completo de una imagen sea de $\frac{1}{30}$ de segundo para que la interferencia de la línea de alimentación parezca estacionaria y, por tanto, mucho menos notable en la pantalla. Cada imagen completa se llama *cuadro*.

Aunque el ojo humano interpreta como movimiento continuo secuencias de imágenes a razón de 15 cuadros por segundo o más, hay cierta vibración perceptible hasta que se usan velocidades de cerca de 40 cuadros por segundo.† Para eliminar la vibración en la imagen de televisión se envían líneas alternadas a razón de 60 por segundo. Esto se llama *barrido entrelazado* y se muestra en la figura D.1. El barrido empieza arriba a la izquierda y se efectúa de izquierda a derecha, retrocediendo rápidamente tras cada barrido (el lento barrido vertical produce cierta inclinación de las líneas). Esto se repite hasta la parte baja de la pantalla, donde sólo se recorre media línea. Se han barrido ahora 262.5 líneas, y esto se llama *campo*. El tiempo de barrido de un campo es de $\frac{1}{60}$ de segundo, por lo que la frecuencia horizontal de barrido es de $(262.5)(60) = 15\,750$ Hz.

Al final del campo, el haz del tubo de rayos catódicos retrocede con rapidez hacia arriba (con un movimiento en zigzag horizontal) hasta alcanzar el centro superior de la pantalla. El haz se apaga (borra) durante los retrocesos horizontal y vertical, por lo que no se ve en la pantalla. A continuación, el haz repite el barrido horizontal a razón de

† Las películas de cine mudo se proyectan a 16 cuadros por segundo, las sonoras a 24. Los proyectores de cine utilizan un obturador con el doble de velocidad (48 cuadros por segundo) para eliminar la posible vibración.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

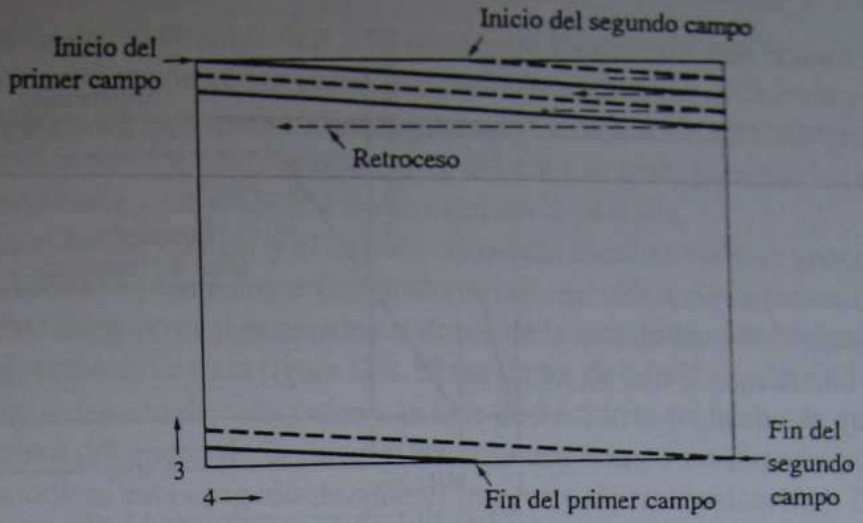


Figura D.1 Barrido entrelazado.

15.75 kHz con un lento movimiento hacia abajo a una tasa de barrido vertical de 60 Hz, siguiendo la trayectoria en línea discontinua de la figura D.1, hasta alcanzar la esquina inferior derecha de la pantalla, y se reinicia el retroceso vertical. Los dos campos totalizan 525 líneas entrelazadas para formar la imagen completa (el cuadro). En resumen, el método de barrido entrelazado proporciona una tasa de campo de 60 Hz para eliminar la vibración mientras mantiene una tasa de cuadros de 30 Hz.

El esquema de líneas usado para cada cuadro se llama *trama* (la trama es lo que se ve cuando no se recibe información de imagen). Aunque el tamaño de la trama depende del receptor en particular (dado usualmente como una medida diagonal), las dimensiones relativas ancho-altura (conocidas como razón de aspecto) se normalizan en 4:3.

Con esta razón de aspecto de 4:3, la imagen completa puede considerarse como un arreglo de 700 × 525 puntos de intensidad variable. Por tanto, hay un máximo de (700)(525)(30) = 11 025 000 elementos de imagen para enviar cada segundo (en realidad, ésta es una opción pesimista dado que durante el tiempo relativamente largo de retroceso vertical se pierden cerca de 21 líneas). Según el criterio de que el tiempo de elevación del sistema debe igualar a un elemento de imagen, el ancho de banda de un sistema de respuesta tipo *RC*:

$$B \approx 0.35/t_r = (0.350)\,(11\ 025\ 000) = 3.86\ \text{MHz}$$

a una respuesta mucho más empinada:

$$B \approx 1/(2t_r) = (0.500)\,(11\ 025\ 000) = 5.51\ \text{MHz}$$

da cierta idea del tipo de ancho de banda requerido. En la práctica, un ancho de banda de 4 MHz se considera adecuado.

La información de vídeo para televisión se transmite usando modulación de amplitud de gran portadora. Entonces, la doble banda lateral necesita 8 MHz por canal para el vídeo. Sin embargo, las asignaciones de un ancho de 6 MHz para estaciones experimentales desde 1936 tienden a restringir los anchos de banda a estos límites. Para soslayar estas restricciones, se usa una forma de banda lateral residual para transmitir la información de vídeo. En la figura D.2 se muestra un diagrama espectral simplificado de una transmisión de televisión.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

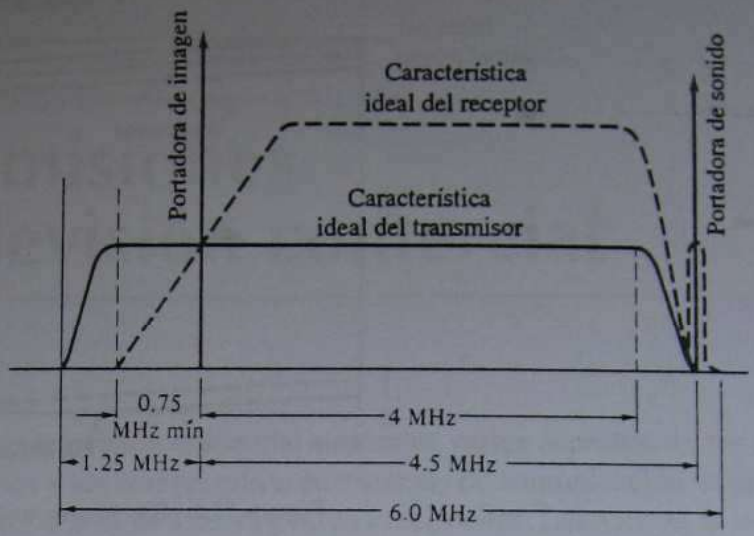


Figura D.2 Espectro simplificado de un canal de televisión.

La banda lateral inferior de la transmisión se atenúa por debajo de 0.75 MHz y está completamente limitada en banda a 1.25 MHz por debajo de la portadora de vídeo (la total eliminación de una banda lateral en el transmisor requeriría un filtrado mucho más elaborado y costoso). La característica pasabanda del receptor completa la característica de la banda lateral residual, como se muestra en la figura D.2. La información de audio se transmite usando FM, con una desviación de frecuencia pico de 25 kHz, y está centrada 4.5 MHz por encima de la portadora de vídeo.

Los niveles de la modulación de amplitud usados para el vídeo se muestran en la figura D.3. En Estados Unidos, se utiliza una modulación negativa estándar; es decir, menor amplitud corresponde a una escena más brillante, mientras que mayor amplitud corresponde a una escena más oscura. Como la mayoría de las imágenes contienen más niveles blancos que negros, puede obtenerse una eficiencia algo mayor con modulación negativa que con positiva. El negro de referencia se define por el 70% de la modulación y el nivel mínimo (blanco) de modulación es de 12.5%, como se muestra en la figura D.3.

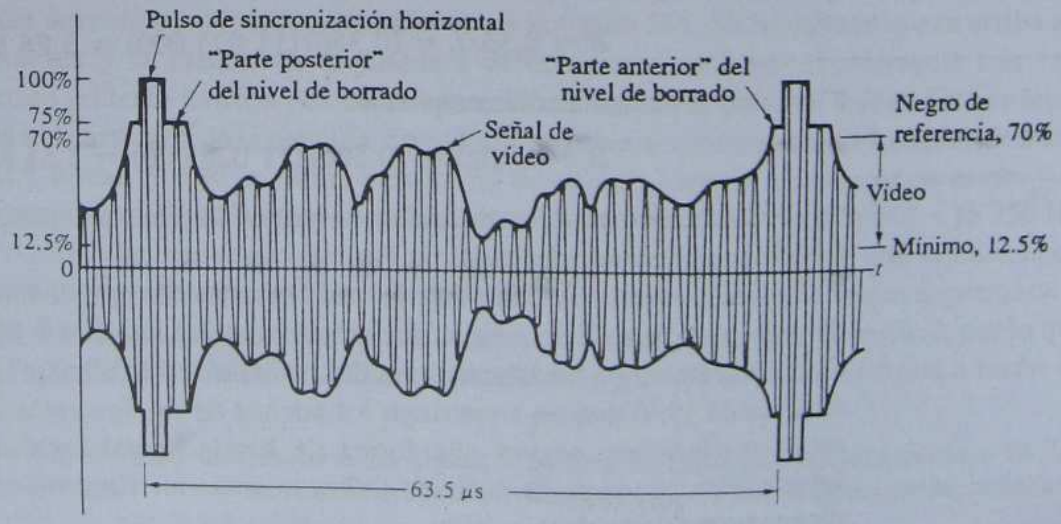


Figura D.3 Señal de vídeo modulada.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Se necesita una sincronización adecuada para reconstruir una imagen estable. Los pulsos de sincronización se envían al principio de cada línea de barrido y al 100% del nivel de modulación para que se identifiquen con facilidad. Un nivel de borrado enviado con modulación de 75% asegura que el haz del CRT se corte para que los transitorios y los retrocesos horizontal y vertical no se vean en la pantalla.

La sincronización vertical y el barrido de media línea se realizan generando un tren de pulsos al final de cada campo. Este tren consiste en una serie de pulsos de igualación y de sincronización vertical generados al doble de la tasa de barrido horizontal (es decir, a 31.5 kHz), como se ve en la figura D.4. El oscilador de barrido horizontal es accionado por el flanco delantero de cada pulso a la tasa de 31.5 kHz (el hecho de que sólo pueda barrer la mitad del ancho de la imagen durante ese tiempo no importa porque el tubo de rayos catódicos está apagado durante el intervalo de sincronización). Los pulsos de igualación se mantienen estrechos para no accionar el oscilador de barrido vertical. La sincronización vertical está compuesta de seis pulsos anchos consecutivos. Las muescas entre estos pulsos se necesitan para mantener horizontal la sincronización del oscilador. Estos pulsos anchos se aplican a un integrador con el fin de formar una señal de amplitud lo bastante grande como para separarla de cualquier otra, y de accionar el oscilador de barrido vertical. Siguen más pulsos de igualación y algunos pulsos a la tasa del barrido horizontal de 15.75 kHz. En el momento en que aparece la primera traza de vídeo, todos los efectos transitorios de la sincronización ya desaparecieron del receptor. Nótese que es necesaria la tasa de 31.5 kHz para producir la variación de la media traza horizontal del barrido entrelazado.

La señal de televisión comercial puede transmitir información adicional de varias maneras, sin interferir con la imagen y el sonido normales. Estas formas incluyen el uso del intervalo de borrado horizontal, del intervalo de borrado vertical, del canal de audio (empleando multiplexión de tiempo o de frecuencia) y del canal de vídeo (usando también multiplexión de tiempo o de frecuencia). La primera y la última opciones se usan en la emisión de color, como se describe en una sección posterior. La multiplexión de información adicional en el canal de audio se utiliza en algunos servicios por

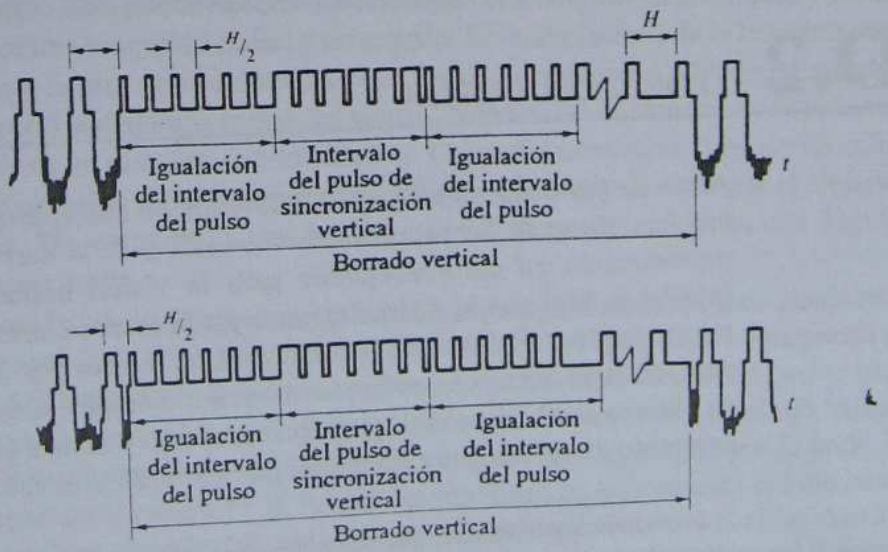


Figura D.4 Sincronización vertical para cada campo.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

suscripción. Aquí dedicamos un poco de atención al interés reciente en el uso del intervalo de borrado vertical.

Como se mencionó antes, el tiempo que toma el intervalo de retroceso vertical equivale a 21 líneas horizontales. Las primeras nueve líneas están ocupadas por seis pulsos igualadores, seguidos por el intervalo del pulso de sincronización vertical y otro conjunto de seis pulsos igualadores, como se muestra en la figura D.4. Esto deja disponibles las líneas 10-21 para otros pulsos (es posible ver estas líneas ajustando el control de retención vertical del televisor hasta que aparezca la barra de separación de imágenes).

Algunas líneas del intervalo de borrado vertical ya se han asignado. Las líneas de transmisión 17 y 18 portan la señal de prueba del intervalo vertical (VITS, *vertical-interval test signal*). Estas señales de vídeo y croma se usan para comprobar la calidad de las transmisiones de la red y de la estación. La línea 19 porta las señales de referencia del intervalo vertical (VIR, *vertical-interval reference*), que constan de las referencias del negro, de la luminancia y de la croma. Algunos receptores de televisión están equipados con tinte de color automático y circuitos de nivel que usan las señales VIR como referencia.

La línea 21 es empleada por algunas estaciones para encabezar las imágenes y ayudar así a los televidentes con deficiencias auditivas. Toda la línea 21 del primer campo y la mitad de la línea 21 del segundo campo están disponibles para este propósito. La señal de datos NRZ que se transmite usa la codificación estándar ASCII de 7 bits más el de paridad. El decodificador extrae los datos de encabezamiento del intervalo de borrado vertical y los muestra cerca del final de la pantalla de televisión.

Se espera que el diseño de los receptores cambie en un futuro cercano como resultado de los avances en el hardware digital. Un sistema ya propuesto para producción, llamado televisión de definición mejorada (IDTV, *improved definition television*), utiliza memoria digital para duplicar el número de líneas horizontales exhibidas, lo que da 525 líneas por campo. Las nuevas líneas de barrido por insertar entre las líneas existentes se derivan de las combinaciones de la línea anterior, la línea siguiente y la línea o las líneas correspondientes del campo precedente.

D.2 TEORÍA DEL COLOR

Antes de pasar directamente a la televisión en color, será conveniente examinar brevemente algunas de las propiedades del color y de la mezcla de colores. Para hacer una reproducción en color aceptable para la visión humana, se necesitan tres colores primarios. Mezclando de manera apropiada estos colores primarios, es posible aproximar todos los colores de la naturaleza. Los colores primarios son el rojo, el verde y el azul, de cuya mezcla se obtienen otros. Por ejemplo, si se mezclan luz roja y luz verde, se obtiene el amarillo.[†] De igual forma, el rojo y el azul producen un color rosa-violeta conocido como magenta, mientras que el verde y el azul producen un azul particular

[†] Se supone que todas las adiciones son incoherentes; es decir, se supone que la adición es de energía.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

conocido como cian. Si se mezclan los tres (en iguales proporciones), el resultado se conoce como blanco.

En televisión es habitual describir una imagen en términos de su *luminancia* (brillantez) y su *crominancia* (color). La información sobre la crominancia puede, a su vez, describirse en términos de matiz y saturación. Para mostrar el uso de estos términos, colocamos los tres colores primarios en los vértices de un triángulo equilátero, como se muestra en la figura D.5. Del examen de la mezcla se deduce que el amarillo, el magenta y el cian se ubicarán a lo largo de los lados de este triángulo de color (crominancia) y el blanco estará en su centro.

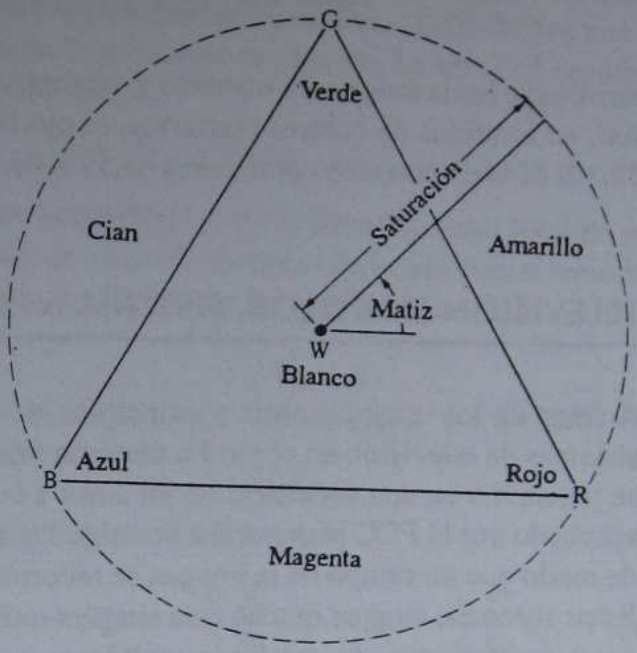


Figura D.5 Triángulo de color que muestra el matiz y la saturación.

Supóngase ahora que esta información de color se describe en términos de coordenadas circulares. Esto puede hacerse inscribiendo el triángulo en un círculo y definiendo los colores por una magnitud radial y un ángulo. El *matiz* (color) de la luz varía entonces con el ángulo y la proporción de color puro (es decir, saturado) a blanco, llamada *saturación*, varía con la distancia radial del centro. Nótese que la saturación de determinado color depende de su dilución con luz blanca. Cerca del centro, se dice que un color está altamente diluido (llamado comúnmente pálido o pastel), mientras que al alejarse está más saturado. Sin embargo, todos los puntos a lo largo de una línea con ángulo fijo tienen el mismo matiz.

La luminosidad de la luz es una medida de su energía incidente. Ésta puede tomarse como una tercera dimensión perpendicular al plano de la figura D.5. La respuesta de los detectores a la longitud de onda varía, por lo que es necesario tomar en cuenta también esa respuesta. Por supuesto, en el caso de la televisión comercial, es el ojo humano el que responde en forma desigual a la energía con diferentes longitudes de onda. En la figura D.6 aparece el resultado de muchas mediciones de la respuesta del ojo humano. De aquí se concluye que esa respuesta (es decir, la luminosidad vista por el ojo) es mayor a una longitud de onda de 550 milimicras (un color amarillo verdoso). La respuesta

http://libreria-universitaria.blogspot.com

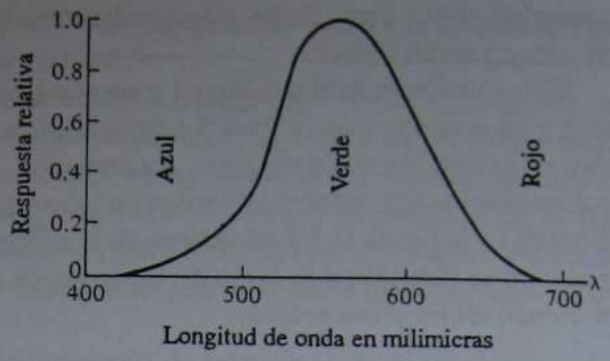


Figura D.6 Respuesta del ojo humano normal.†

disminuye hacia longitudes mayores y menores, cayendo más rápidamente hacia el azul. Así, en términos de colores primarios, el ojo humano interpreta el blanco no como el 33.3% de cada uno sino como cerca de 59% de verde, 30% de rojo y 11% de azul.

D.3 TELEVISIÓN EN COLOR. SISTEMA NTSC

A fines de los años cuarenta y principios de los cincuenta, se proponían diferentes sistemas de televisión en color. La mayoría eran secuenciales, es decir, la información se transmitía en una secuencia de un color a la vez. Por ejemplo, uno de ellos (CBS), aprobado por la FCC para prueba por algunos años, usaba una rueda giratoria de color de modo que un campo de la imagen se recorría en rojo, el siguiente en verde, etcétera. Estos sistemas, aunque mucho más simples que aquellos en que toda la información de color se transmite de manera simultánea, no eran fácilmente compatibles con los métodos existentes de televisión en blanco y negro ni con las restricciones de ancho de banda.

A principios de los años cincuenta se formó un comité —el National Television Systems Commitee— para tratar de resolver el problema de la compatibilidad. El diseño del sistema NTSC resultante fue autorizado por la FCC en 1953 y es el que se usa actualmente en Estados Unidos. En lugar de transmitir en secuencia las señales roja, verde y azul, el sistema NTSC separa la información en señales de luminancia y de crominancia que se transmiten en forma simultánea usando multiplexión en frecuencia. La mayoría de las ideas básicas de este sistema, con algunos refinamientos, se han incorporado a otros sistemas de televisión en color usados en otros países.

El sistema NTSC está concebido para ser compatible con el monocromático (es decir, blanco y negro) basándose en 525 líneas y 60 campos por segundo con barrido entrelazado. Un componente de luminancia Y se forma por la suma de los tres colores primarios, R, G, B. Las señales de color resultantes se cuantifican en la misma propor-

† Ésta es una respuesta de adaptación a la luz (visión fotópica) que corresponde a las condiciones normales de brillantez de la luz diurna. Cuando se adapta a la oscuridad (visión escotópica), la respuesta pico del ojo humano se desplaza hacia abajo aproximadamente 50 milimicras. Sin embargo, en condiciones escotópicas el ojo pierde un poco de la percepción del color.

http://librería-universitaria.blogspot.com

ción que la respuesta del ojo humano a las frecuencias de los colores primarios, de modo que

$$E_Y = 0.30E_R + 0.59E_G + 0.11E_B . \tag{D.1}$$

Toda la información necesaria para una imagen monocromática está contenida en esta señal de luminancia.

Además de esta señal, se transmiten dos señales de diferencia de color. Estas diferencias de color se forman restando la luminancia. Como el componente $(G - Y)$ es menor que los otros dos (y por ello está sujeto a mayores errores debidos al ruido), los componentes que se envían son $(R - Y)$ y $(B - Y)$. Estas señales de diferencia de color se transmiten usando multiplexión en cuadratura (DSB-SC) en una subportadora situada ω_s rad/s por encima de la portadora de imagen. La señal de crominancia (diferencia de color) puede escribirse como

$$(E_R - E_Y) \cos \omega_s t + (E_B - E_Y) \operatorname{sen} \omega_s t . \tag{D.2}$$

La suma de las ecuaciones (D.1) y (D.2) forma la señal total de vídeo, que se modula en la portadora de imagen usando técnicas de banda lateral residual.

En el receptor, pueden detectarse las señales siguientes:†

$$\begin{Bmatrix} E_R - E_Y \\ E_B - E_Y \\ E_Y \end{Bmatrix} . \tag{D.3}$$

La ecuación (D.1) puede reescribirse como

$$(E_G - E_Y) = -\frac{0.30}{0.59}(E_R - E_Y) - \frac{0.11}{0.59}(E_B - E_Y) . \tag{D.4}$$

Por tanto, la tercera señal de diferencia de color $(E_G - E_Y)$ puede hallarse por medio de una adecuada ponderación y suma (como en las operaciones con matrices). Las señales E_Y, $(E_R - E_Y)$, $(E_G - E_Y)$ y $(E_B - E_Y)$ pueden aplicarse a las rejillas de control apropiadas del tubo de imagen.

Tómense ahora los valores de los componentes $(R - Y)$, $(A - Y)$ y Y para seis colores saturados cuyos valores aparecen en la tabla D.1. Las dos diferencias se transmiten en cuadratura a la frecuencia subportadora de color ω_s, y pueden usarse relaciones fasoriales. Expresando las diferencias de color en términos de magnitud y fase, se tiene

$$\sqrt{(R - Y)^2 + (B - Y)^2} \tan^{-1} [(R - Y)/(B - Y)] . \tag{D.5}$$

Nótese que en la ecuación (D.5) la magnitud es una medida de la saturación del color y la fase es una medida del matiz. La amplitud instantánea máxima total es proporcional a la suma del componente de luminancia, Y, con la magnitud de la ecuación (D.5). Esta cantidad aparece en la última columna de la tabla D.1.

---

† Es posible usar la detección a lo largo de los ejes que se han girado 33° (llamados ejes I y Q) para ganar algo del ancho de banda agregado en las señales de diferencia de color. Esto se analizará brevemente. Los receptores caseros modernos suelen emplear el método delineado aquí y sacrifican todo el ancho de banda de color (y, en consecuencia, la definición) disponible.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

TABLA D.1 Adición de componentes de luminancia y crominancia para seis colores saturados

Color	Componentes R	G	B	Y	$(R-Y)$	$(B-Y)$	Magnitud/fase [usando la Ec. (D.5)]	Magnitud máxima total
Azul	0	0	1	0.11	−0.11	0.89	$0.90 \angle 353°$	1.01
Rojo	1	0	0	0.30	0.70	−0.30	$0.76 \angle 113°$	1.06
Magenta	1	0	1	0.41	0.59	0.59	$0.83 \angle 45°$	1.24
Verde	0	1	0	0.59	−0.59	−0.59	$0.83 \angle 225°$	1.42
Cian	0	1	1	0.70	−0.70	0.30	$0.76 \angle 293°$	1.46
Amarillo	1	1	0	0.89	0.11	−0.89	$0.90 \angle 173°$	1.78

Para una transmisión monocromática, se tiene $R = B = G$, y $Y = 1.0$. Sin embargo, la última columna muestra que la transmisión de un color totalmente saturado requiere picos instantáneos mayores, hasta en un 78%, que los requeridos para la monocromática. Como el nivel pico de modulación ya es de 70% en la monocromática, ésta es una sobrecarga demasiado grande en el transmisor, por lo que es necesario reducir la amplitud de las señales de diferencia de color.

Puesto que hay dos de estas señales, pueden introducirse dos constantes de escala, a_1 y a_2, para reducir la modulación pico. Para transmisiones monocromáticas, $Y = 1.0$ y el índice de modulación máximo es de 70%. Se considera que 33% (es decir, un índice de modulación de 93%) es una sobrecarga pico razonable debida a diferencias de color. Por tanto, para el máximo nivel pico de modulación puede escribirse:

$$Y + \sqrt{a_1^2(R-Y)^2 + a_2^2(B-Y)^2} = 1.33\,. \tag{D.6}$$

En la tabla D.1 puede verse que los dos colores saturados con mayores posibles sobrecargas son el amarillo y el cian. Sustituyendo los valores para estos colores sucesivamente en la ecuación (D.6), se obtienen dos ecuaciones en las constantes de escala desconocidas a_1 y a_2:

$$0.89 + \sqrt{a_1^2(0.11)^2 + a_2^2(0.89)^2} = 1.33\,, \tag{D.7}$$

$$0.70 + \sqrt{a_1^2(0.70)^2 + a_2^2(0.30)^2} = 1.33\,. \tag{D.8}$$

La solución simultánea de estas ecuaciones da $a_1 = 0.877$ y $a_2 = 0.493$. Entonces, la señal total de video, incluyendo la señal de crominancia corregida, que se usa para modular la amplitud de la portadora transmitida, es†

$$E_T = E_Y + 0.877(E_R - E_Y)\cos \omega_s t + 0.493(E_B - E_Y)\operatorname{sen} \omega_s t\,. \tag{D.9}$$

Los valores de la crominancia corregida aparecen en la tabla D.2. Estos resultados también se pueden mostrar construyendo un diagrama fasorial de las relaciones de fase a la frecuencia de la subportadora de color ω_s, como se muestra en la figura D.7.

† En el receptor, el componente $(R - Y)$ es ponderado —en relación con la señal de luminancia— por $1/0.877 = 1.14$, y el componente $(B - Y)$ por $1/0.493 = 2.03$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

TABLA D.2 Relaciones de fase para señal de crominancia corregida

Color	Componentes $0.877(R-Y)$	Componentes $0.493(B-Y)$	Magnitud/fase [usando la Ec. (D.5)]
Azul	−0.0965	0.439	0.450 ∠347°
Rojo	0.614	−0.148	0.631 ∠103.5°
Magenta	0.517	0.291	0.594 ∠60.7°
Verde	−0.517	−0.291	0.594 ∠240.7°
Cian	−0.614	0.148	0.631 ∠283.5°
Amarillo	0.0965	−0.439	0.450 ∠167°

Surge la pregunta de cuánto ancho de banda puede permitirse para las señales de crominancia. Por fortuna, la resolución del ojo humano es menor para el color que para el blanco y el negro. De hecho, estudios de la visión humana han mostrado que ésta no es la misma para todas las combinaciones de color. En naranja y cian pueden resolverse detalles más finos que en verde y magenta. Para aprovechar esto, la subportadora de crominancia de referencia puede adelantarse 33° (en el transmisor) en la figura D.7. Los nuevos ejes formados se llaman I y Q y aparecen en la figura D.7. Para la señal Q, se halla que una banda de 0.5 MHz comparativamente angosta es adecuada. Se utiliza DSB, lo que da un ancho de banda modulado de 1 MHz. Para la señal I se necesita una banda mucho más ancha. A fin de acomodar el ancho de banda más amplio, se utiliza modulación de banda lateral residual para restringir

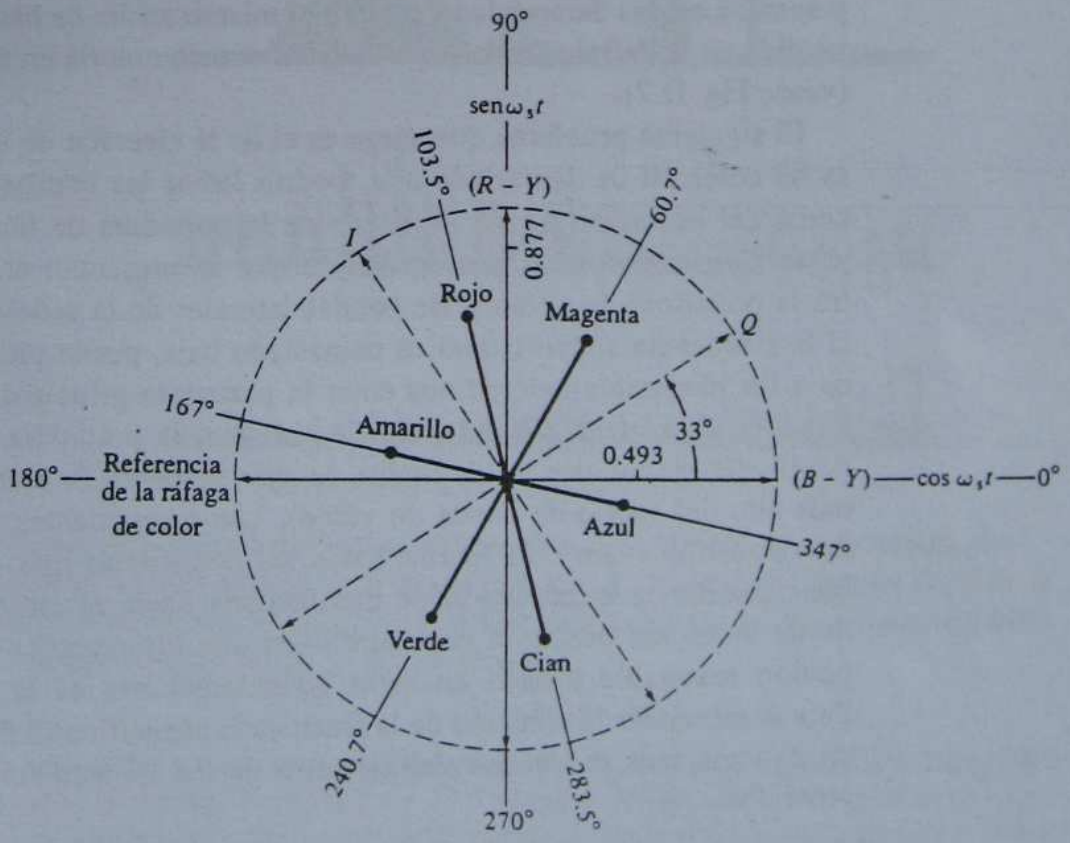


Figura D.7 Diagrama fasorial de relaciones de fase de crominancia.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

el ancho de banda de la señal *I* a cerca de 500 kHz por encima de la frecuencia subportadora. En la figura D.8 se muestra un diagrama espectral simplificado de una transmisión de televisión en color.

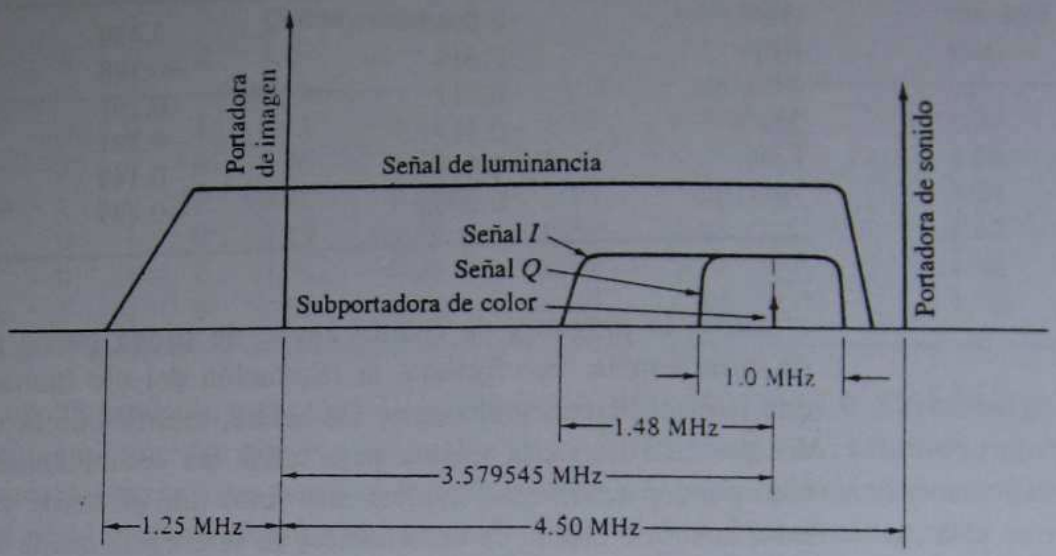


Figura D.8 Espectro de la televisión en color, que muestra los espectros *I* y *Q*.

En el receptor debe usarse demodulación a lo largo de los ejes *I* y *Q* para aprovechar el mayor ancho de banda de la señal *I*. Sin embargo, esto hace más difícil el diseño del receptor, por lo que generalmente no se utiliza. Como ya se vio, es más simple demodular a lo largo de los ejes $(R - Y)$ y $(B - Y)$ y derivar el componente $(G - Y)$ por ponderación y suma. Los dos demoduladores usan el mismo ancho de banda, por lo que hay cierta pérdida en la definición del color, la cual es más notoria en los matices naranja y cian (véase Fig. D.7).

El siguiente problema que surge es el de la elección de la frecuencia subportadora de color. Si es demasiado alta, podría llenar las bandas laterales de color hasta cerca del límite del ancho de banda de la portadora de imagen, que es de 4 MHz, y también aumentar la posibilidad de que se presenten elementos heterodinos entre la portadora de audio y las bandas laterales de la señal de color. Por otra parte, si la frecuencia subportadora es demasiado baja, puede producir interferencia debida a los elementos heterodinos entre la portadora principal de imagen y las bandas laterales de la señal de color (en la práctica, la portadora de imagen es alrededor de 10 dB mayor que la de audio, lo que favorece la elección cerca del extremo más alto del ancho de banda de vídeo). Las componentes espectrales de una señal de vídeo típica son más fuertes hacia las frecuencias más bajas por lo que es más fácil insertar la información de crominancia hacia el extremo superior de la banda de vídeo sin perder la compatibilidad con los receptores monocromáticos. Una opción razonable basada en estas consideraciones es la vecindad de 3.5 MHz. Para comprender la elección de la frecuencia específica (3.579545 MHz) se necesita un examen más cuidadoso del espectro de las transmisiones de televisión monocromática.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En la figura D.9(a) se muestra la fotografía de un analizador de espectro que exhibe una transmisión de la televisión comercial. En la figura D.9(b) se muestra una porción expandida del espectro cercana a la portadora de imagen. Nótese que, como resultado del muestreo de barrido horizontal, la información espectral de luminancia tiende a concentrarse alrededor de los armónicos de la frecuencia de barrido horizontal. Se pueden observar estas bandas laterales bien definidas, introducidas por el proceso de muestreo en todos los múltiplos de la frecuencia de barrido horizontal.† La armónica cero o de referencia es la principal portadora de imagen.

La información de crominancia también se muestrea a la tasa de barrido horizontal, pero su referencia se halla en la frecuencia subportadora de color. Por tanto, esta frecuencia subportadora se puede elegir de tal forma que los espectros de las señales de crominancia queden exactamente entre los de la señal de luminancia. De esta forma, es posible transmitir tanto la señal de luminancia como las de crominancia en el mismo

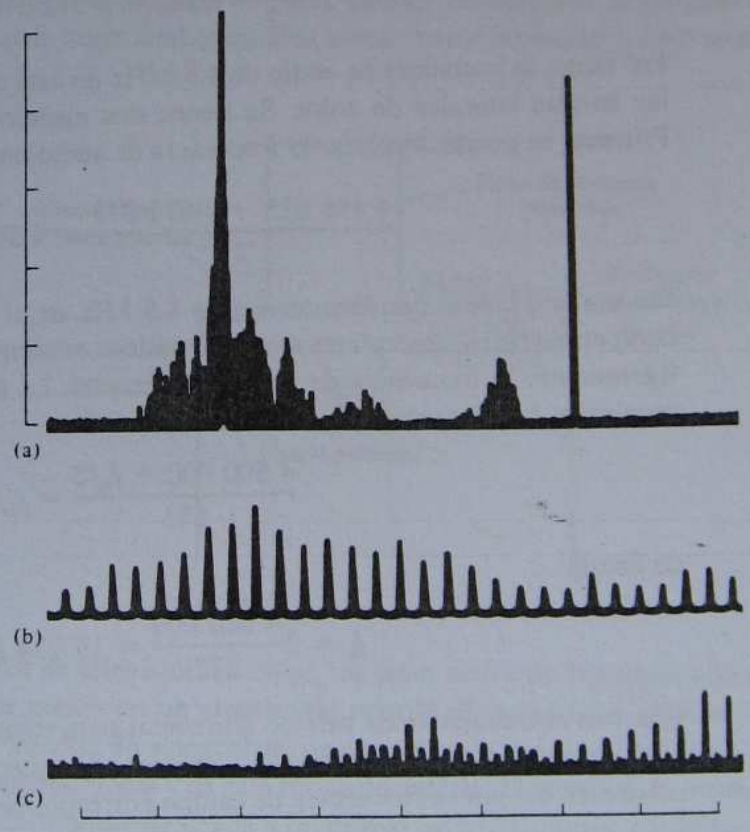


Figura D.9 Despliegue del analizador de espectro para una transmisión de televisión comercial: (a) 1 MHz por división; (b) 50 kHz por división cerca de la portadora de imagen; (c) 50 kHz por división cerca de la subportadora de color (la escala vertical es de 10 dB por división).

† Si la imagen fuera totalmente estacionaria, las bandas laterales alrededor de cada múltiplo de la frecuencia de barrido horizontal de 15.75 kHz deberían, a su vez, tener líneas armónicas espaciadas 60 Hz (la frecuencia de barrido vertical). En la práctica, la información de la imagen en general varía demasiado para individualizar estas líneas.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

ancho de banda que se utiliza de manera normal para transmisiones de televisión monocromática.

Con el fin de colocar las bandas laterales de crominancia entre las bandas laterales de luminancia, es necesario elegir la frecuencia subportadora de color a una y media veces la frecuencia de barrido horizontal. En otras palabras, la frecuencia subportadora de color debe ser un múltiplo impar de un medio de la tasa de barrido horizontal. Otra consideración es que se desearía tener a la portadora de sonido (a 4.5 MHz) colocada entre las bandas laterales de color para evitar posibles efectos heterodinos de baja frecuencia. Tomando el 571avo armónico, se obtiene

$$\frac{15\ 750}{2}(571) = 4\ 496\ 625\ \text{Hz},$$

y para $n = 573$,

$$\frac{15\ 750}{2}(573) = 4\ 512\ 375\ \text{Hz}.$$

Por tanto, la portadora de audio de 4.5 MHz no está centrada, como se deseaba, entre las bandas laterales de color. Se tienen dos elecciones posibles para corregir esto. Primero, se puede desplazar la frecuencia de audio un poco hacia arriba,

$$\frac{4\ 496\ 625 + 4\ 512\ 375}{2} = 4\ 504\ 500\ \text{Hz}.$$

Sin embargo, este desplazamiento de 4.5 kHz en el espectro FM de audio no sería compatible con los receptores monocromáticos existentes.† La segunda elección es bajar ligeramente la frecuencia de barrido horizontal. La frecuencia de barrido horizontal requerida, f_h, debe satisfacer entonces la ecuación

$$\frac{4\ 500\ 000 + f_h/2}{573} = f_h/2, \tag{D.10}$$

de donde

$$f_h = 2\frac{4\ 500\ 000}{572} = 15\ 734.266\ \text{Hz}. \tag{D.11}$$

Esta nueva frecuencia de barrido horizontal para transmisión de color está dentro del 0.1% del valor monocromático (15 750) y está de acuerdo con los diseños de receptores existentes. La nueva frecuencia de campo correspondiente es

$$\frac{2}{525}(15\ 734.266) = 59.94\ \text{Hz}. \tag{D.12}$$

Tanto la tasa de campo de 59.94 Hz como la tasa de barrido horizontal de 15 734.266 Hz se hallan muy cerca de las tasas de 60 Hz y 15 750 Hz utilizadas en transmisiones monocromáticas para permitir la sincronización en ambos tipos de receptores. Sin

† En las transmisiones de audio de la televisión se utiliza un desplazamiento de frecuencia pico de 25 kHz, y el desplazamiento de 4.5 kHz no es despreciable.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

embargo, las nuevas tasas no están ya en sincronía con la frecuencia de la línea de alimentación de 60 Hz. Por tanto, cualquier aparición de la línea de alimentación en el vídeo aparecerá "atravesando" lentamente y en forma vertical la imagen, con un periodo cercano a 17 s (es decir, 1/0.06) cuando el receptor se sintoniza a una emisora de color. Esto se toma como una desventaja menor para los propósitos de compatibilidad, la cual se puede minimizar con buenos procedimientos de diseño.

Se elige que la subportadora de color sea la 455ava armónica de un medio de la tasa de barrido horizontal, o

$$(455)\left(\frac{15\ 734.266}{2}\right) = 3\ 579\ 545\ \text{Hz}. \qquad \text{(D.13)}$$

Como la multiplexión en cuadratura se utiliza para la información de color, es esencial que el detector síncrono en el receptor esté exactamente en fase y en frecuencia con el transmisor. Esto se consigue enviando ocho ciclos —conocidos como "ráfaga de color"— de la subportadora de color durante el intervalo de borrado que sigue al pulso de sincronía horizontal (conocida como "parte posterior"). Esto se muestra en la figura D.10.

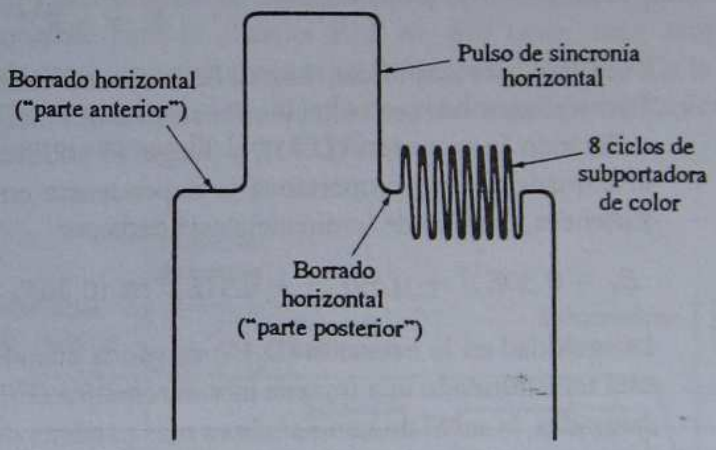

Borrado horizontal ("parte anterior")
Pulso de sincronía horizontal
8 ciclos de subportadora de color
Borrado horizontal ("parte posterior")

Figura D.10 Ráfaga de subportadora de color.

En el receptor de televisión en color, los ocho ciclos de la subportadora de color se seleccionan por medio de un circuito de retardo disparado por el pulso de sincronía horizontal. Un método de sincronización es comparar la fase de la ráfaga de color con la fase de un oscilador local y de esta forma corregirla. Un método alternativo es utilizar un filtro de banda angosta de Q alta a fin de que las oscilaciones se inicien con la ráfaga de color y luego continúen durante el lapso de un barrido horizontal. La ráfaga de color no se transmite durante el retroceso vertical o durante cualquier transmisión en blanco y negro. Para detectar la ausencia de la ráfaga de color se utiliza un circuito "eliminador de color" en el receptor de televisión en color, deshabilitándose los amplificadores de color de modo que las posibles pérdidas de color no se presenten en la imagen.

La estabilidad de la frecuencia subportadora de color se debe controlar con sumo cuidado, en particular durante el periodo de una línea horizontal. Las tolerancias para las estaciones de radiodifusión comercial para la frecuencia de 3.579545 MHz son ±0.0003%, o alrededor de ±10Hz. Las frecuencias de barrido horizontal y vertical en el

http://libreria-universitaria.blogspot.com

transmisor se obtienen con divisores de frecuencia apropiados de la frecuencia subportadora de color.

Hasta este punto, se ha supuesto en forma tácita que el tubo de rayos catódicos en el receptor opera como un dispositivo lineal, por lo que la intensidad de luz de salida es proporcional a la amplitud de la señal de entrada. Esto no es cierto en la práctica, y una relación más real es

$$I = kE^{\gamma}, \tag{D.14}$$

donde I representa la intensidad de la luz de salida, k es una constante arbitraria, E es la señal, y γ (gamma) es una constante, entre 2.2 y 2.5. Por tanto, la luz de salida aumenta con mayor rapidez que la señal de entrada. Si no se corrige, las graduaciones en la luz alta de la imagen se expanden, mientras que las graduaciones en las sombras se comprimen. Para compensar esto, en el transmisor se utiliza un amplificador no lineal que tenga una dependencia opuesta en la característica de transferencia para efectuar la corrección gamma necesaria.

La corrección gamma es muy directa para transmisiones monocromáticas. Un amplificador cuya característica de transferencia de entrada y salida es de la forma

$$E_o = k_1 E_i^{1/\gamma} \tag{D.15}$$

se utiliza para amplificar la señal de la cámara antes de la modulación en el transmisor. Para transmisiones en color, las tres señales de color primarias tienen corrección gamma, utilizando la ecuación (D.15), y luego se codifican en las señales de luminancia y crominancia. Esto proporciona la dependencia correcta de la imagen en cada color. Entonces, la señal de luminancia está dada por

$$E_Y = 0.30E_R^{1/\gamma} + 0.59E_G^{1/\gamma} + 0.11E_B^{1/\gamma} \leq (0.30E_R + 0.59E_G + 0.11E_B)^{1/\gamma}. \tag{D.16}$$

La igualdad en la ecuación (D.16) es válida cuando $E_R = E_G = E_B$; es decir, cuando se está transmitiendo una imagen monocromática (B/N). Por otra parte, para colores muy saturados, la señal de luminancia es más pequeña de lo que debería y la información de color completa ya está presente en el receptor. Lo que sucede, por supuesto, es que algo de la información de luminancia para colores muy saturados se envía realmente en las señales de crominancia cuando se aplica corrección gamma. Esto provoca cierta pérdida de la definición en escenas con colores muy saturados y alguna distorsión en cambios súbitos de color como resultado de transmisiones parciales de la información de luminancia a través del sistema de crominancia de banda angosta. Sin embargo, en la práctica esto no constituye una desventaja.

Como existe este efecto de acoplamiento cruzado entre los canales de luminancia y de crominancia cuando se aplica corrección gamma, se presenta una diferencia a cuyo ángulo de referencia se envía la ráfaga de subportadora de color. De las posibles elecciones; 0, ±90°, ±180°, la última proporciona el menor acoplamiento cruzado de luminancia y se elige como ángulo de referencia (véase Fig. D.7).

En resumen, el sistema de televisión en color NTSC produce imágenes de color con definición y matiz adecuados para el ojo humano, con una asignación global de ancho de banda de 6 MHz. Esto proporciona una buena compatibilidad con la recepción monocromática y es razonablemente simple de transmitir y recibir.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

D.4 OTROS SISTEMAS DE TELEVISIÓN EN COLOR

El sistema de televisión en color NTSC descrito antes fue el primer sistema adoptado para difusión comercial en forma permanente. Se han desarrollado otros sistemas de color desde que el sistema NTSC se puso en operación. Básicamente, estos sistemas tienen muchas similitudes con el sistema NTSC pero tratan de superar algunos de sus defectos. Dos de estos sistemas se describen aquí en forma breve.

En el sistema de televisión en color PAL (Phase Alternating Line), las señales de diferencia de color $(R - Y)$ y $(B - Y)$ se transmiten en un ancho de banda de 1 MHz usando multiplexión en cuadratura. Sin embargo, el canal $(R - Y)$ se invierte en polaridad en líneas sucesivas en el transmisor. La fase correcta se restaura por medio de un conmutador de inversión de polaridad síncrono en el receptor. Por este medio, el efecto de los errores en la fase diferencial ocurridos en la transmisión (o en la grabación de vídeo) se puede corregir en forma parcial promediando el efecto sobre varias líneas. [Recuerde, de la figura D.7, que la definición del ojo a lo largo del eje $(R - Y)$ es mejor que a lo largo del eje $(B - Y)$]. La fase de la ráfaga de color alterna entre 135° y 225° (esto es, 180° ±45°) para sincronizar al conmutador de inversión de polaridad. El diseño del receptor requerido para el sistema PAL es, por tanto, más complicado (y en consecuencia más caro), con ciertas ventajas de mejor desempeño. En la figura D.11 se muestra un diagrama espectral simplificado de una transmisión británica de televisión en color que utiliza el sistema PAL de 625 líneas.

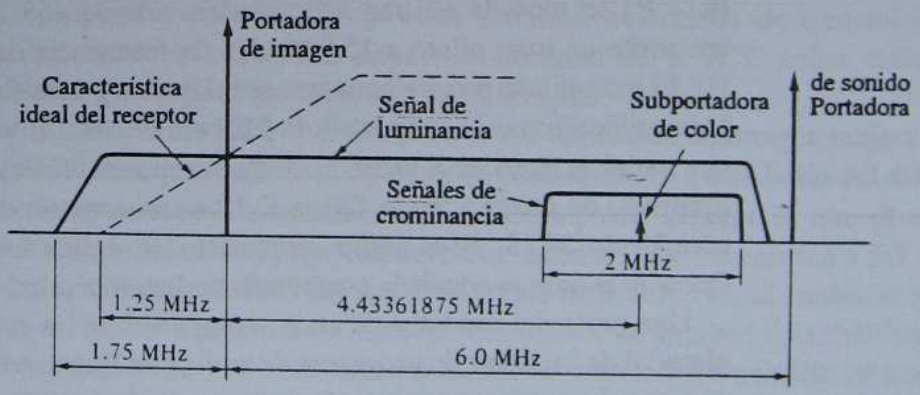


Figura D.11 Espectro simplificado del sistema PAL de 625 líneas británico.

En Francia se utiliza otro sistema de color, el sistema Séquential Couleur à Mémoire (SECAM). En el sistema SECAM, las señales de diferencia de color $(R - Y)$ y $(B - Y)$ se envían por separado en líneas alternadas, es decir, la señal $(R - Y)$ para una línea se transmite con la línea mientras se descarta la señal $(B - Y)$, y en la siguiente línea se transmite la señal $(B - Y)$ mientras se descarta la señal $(R - Y)$. Para transmitir información de color se utiliza modulación de frecuencia de la subportadora de color.

En el receptor SECAM, se utiliza un arreglo de retardo de línea y de conmutador para permitir la comparación de la línea previa de información de color con la presente. Así, la resolución de color en la dimensión vertical se reduce un medio, pero se evita la

http://libreria-universitaria.blogspot.com

multiplexión en cuadratura y el posible acoplamiento cruzado entre señales de color. El uso de FM para la información de color hace al sistema SECAM inmune —a diferencia de los sistemas NTSC y PAL— a distorsión de color debido a variaciones de amplitud. El mayor defecto del sistema SECAM es que el uso de FM para la información de color tiende a causar algunos efectos de patrón de interferencia de vídeo en transmisiones monocromáticas, lo que da lugar a un grado muy pobre de compatibilidad.

D.5 TV ESTÉREO

Los estándares de televisión de la FCC proporcionan una buena calidad de sonido monaural, que requiere un canal de audio capaz de tener una respuesta en frecuencia de 50 Hz a 15 kHz y una razón señal a ruido de 60 dB. Como resultado del creciente interés de los consumidores en el audio estéreo de alta calidad, en 1984 la FCC aprobó un sistema Zenith/dbx para la adición de audio estéreo a las transmisiones de televisión comercial en Estados Unidos. Como este sistema en realidad proporciona varios canales adicionales para transmitir información en la portadora de audio de la señal de televisión, también se conoce como sonido multicanal para televisión (MTS, *Multichannel Television Sound*). El sistema MTS mantiene la compatibilidad con receptores de televisión monaurales.

Los principios de MTS son similares en muchos aspectos a los que se utilizan en FM estéreo. El canal de suma (L + R) ocupa el intervalo de frecuencia de 50 Hz a 15 kHz para proporcionar compatibilidad con los sistemas monaurales. El canal de diferencia (L – R) se modula en una subportadora de 31.468 kHz utilizando DSB-SC, y se transmite un tono piloto a 15.734 kHz (la frecuencia de barrido horizontal, abreviada H). El tono piloto proporciona una señal que se puede detectar y duplicar en frecuencia para proporcionar la subportadora 2H para el canal L – R. Esto indica al receptor que una señal estéreo está presente y que se puede utilizar para controlar un indicador luminoso de estéreo. En la figura D.12 se muestra un diagrama del espectro de audio compuesto MTS. Este audio compuesto se aplica a la entrada del modulador de frecuencia para producir la porción de audio en la señal de radiodifusión de televisión.

Una parte del espectro de audio compuesto se ha asignado para la transmisión del material de un segundo programa de audio (SAP, *second audio program*). El canal SAP es capaz de manejar un intervalo de frecuenncia de audio de 50 Hz a 10 kHz y a menudo se utiliza para programación en un segundo idioma. Se modula en frecuencia utilizando una subportadora en 5H (78.67 kHz) y una desviación pico de frecuencia de 10 kHz. Existen facilidades para un cuarto canal en MTS, llamado canal profesional. Este canal utiliza una subportadora de 6.5H (102.27 kHz) y se emplea principalmente en las estaciones de televisión para propósitos de coordinación de programas.

El canal L + R utiliza preénfasis/deénfasis pasivo estándar de 75 μs (2.1 kHz) para mantener compatibilidad con los receptores de televisión monaurales. Para ayudar a superar los efectos de la densidad espectral de ruido que aumenta con la frecuencia, el canal L – R utiliza el doble del nivel de modulación del canal L + R. Tanto los canales L – R como SAP utilizan preénfasis/deénfasis pasivo de 390 μs (0.41 kHz) y ambos se codifican con circuitos dbx ® para reducción de ruido (véase Ap. F).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

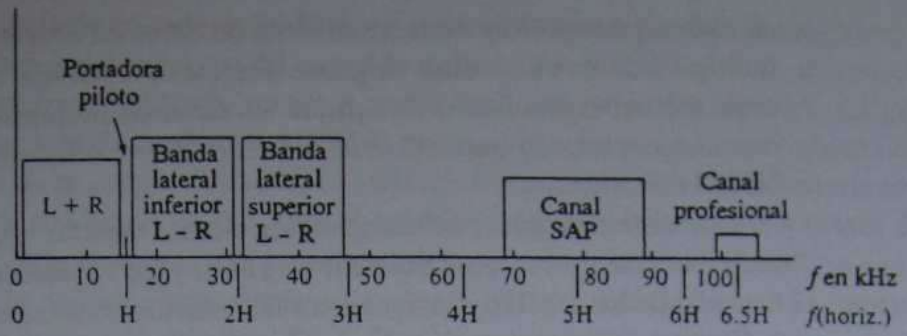

Portadora piloto
L + R
Banda lateral inferior L - R
Banda lateral superior L - R
Canal SAP
Canal profesional
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 f en kHz
0 H 2H 3H 4H 5H 6H 6.5H f(horiz.)

Figura D.12 El espectro compuesto de audio MTS para televisión estéreo.

El sistema MTS proporciona una buena reproducción de sonido estéreo dentro de las restricciones de compatibilidad de los estándares de televisión FCC. Proporciona así mismo canales de audio adicionales en niveles de modulación reducidos para evitar los términos de frecuencia de pulsos de interferencia con la señal de vídeo.

D.6 HDTV[†]

Con el desarrollo de despliegues de alta resolución de vídeo en color, en la actualidad el interés se ha centrado en el desarrollo de sistemas de televisión con una resolución de vídeo mejorada. Dichos sistemas se denominan televisión de alta definición (HDTV). Al momento de escribir este libro, se habían remitido a la FCC, para su evaluación y prueba, 23 propuestas para HDTV y otros sistemas avanzados de transmisión de televisión. Se espera que en 1992 haya una decisión de la FCC sobre estándares de transmisión en radiodifusión para sistemas terrestres.

Un punto a favor de la HDTV es que ofrece una definición de imagen mejorada del orden de 1000 líneas de barrido con 60 campos por segundo,[‡] o alrededor del doble de lo que se consigue usando estándares NTSC. Otro punto a favor es que ofrece un despliegue de "pantalla ancha", que requiere una razón de aspecto cercana a 5:3 o 16:9 en comparación con la razón 4:3 de uso actual. Una estimación rápida muestra que un sistema que utiliza el doble del número de elementos de imagen (pixeles) en cada dimensión espacial y una razón de aspecto de 5:3 en vez de 4:3 requeriría un aumento en el ancho de banda de vídeo, suponiendo que no existen más cambios, del orden de $(5/4)2^2 = 5$. Como el vídeo utiliza ya gran parte de los 6 MHz del canal asignado, esta magnitud del aumento en el ancho de banda de RF está claramente fuera de los límites. Los métodos de procesamiento de señal para tratar de evitar estas limitaciones incluyen (1) aprovechar la redundancia en el sistema presente; (2) utilizar transmisión en serie

[†] Las referencias para esta sección incluyen a L. Feldman, "High Definition TV", *Radio Electronics*, febrero de 1989, pág. 35; "High Definition Television Update", *IEEE Spectrum*, vol. 25, abril de 1988, págs. 56-62; Special Issue on Advanced Television Systems, *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, CE-34, febrero de 1988; Special Issue on High Definition Television, *IEEE Transactions on Broadcasting*, BC-33, diciembre de 1987.

[‡] Para compatibilidad con NTSC, la mayoría de los sistemas propuestos utilizan 59.94 campos por segundo.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

en el tiempo y posible almacenamiento de datos en el receptor; (3) utilizar una mayor multiplexión en cuadratura. Algunos sistemas propuestos utilizan una combinación de estos métodos; otra forma de agrupar los sistemas propuestos es si son (1) compatibles con el receptor, (2) parcialmente compatibles o (3) incompatibles con los estándares NTSC existentes.

Los sistemas que son compatibles deben mostrar una imagen convencional al recibirse con un receptor estándar (NTSC), y no requieren ancho de banda adicional más allá de los 6 MHz ya asignados a las estaciones emisoras de TV. Deben ofrecer una definición de imagen mejorada, calidad de color superior y audio estereofónico de alta calidad al recibir transmisiones HDTV. Los mismos requisitos son válidos para sistemas parcialmente compatibles, excepto por la necesidad de ancho de banda adicional. Los sistemas que no son compatibles requerirían estándares de transmisión y recepción completamente diferentes. Se describen brevemente algunos ejemplos de las propuestas en estas diferentes categorías.

Un ejemplo de sistema HDTV compatible con multiplexión en cuadratura es el sistema Advanced Compatible TV (ACTV-1) desarrollado por RCA, GE, NBC y The David Sarnoff Research Center. Este sistema transmitiría vídeo NTSC estándar, más las componentes de baja frecuencia de un "panel lateral" comprimido en tiempo en cada extremo de la traza horizontal (que no se ve en un receptor NTSC estándar). Las componentes de alta frecuencia del panel lateral se expanden en tiempo y se limitan en banda a cerca de 1 MHz. La información de luminancia de alta frecuencia, 5.0–6.2 MHz, se desplaza hacia la banda base utilizando un mezclador de 5 MHz y luego un filtro pasabajas a 1.2 MHz. Estas dos señales se modulan en cuadratura en una subportadora de 3.108 MHz (395avo armónico de un medio de la tasa de barrido horizontal). Una cuarta señal, que lleva la información de luminancia vertical temporal (V-T), se limita en banda a 0.75 MHz y se modula en cuadratura con la portadora de imagen (principal). Esta señal V-T es necesaria para suavizar la luminancia vertical en la imagen HDTV reconstruida. El ACTV-1 transmite 1050 líneas entrelazadas por cuadro con una resolución que excede las 400 líneas en ambas dimensiones espaciales, y es compatible con los estándares existentes de NTSC.

Los sistemas parcialmente compatibles utilizan una asignación de canal de 6 MHz para la transmisión NTSC estándar, pero necesitan un ancho de banda adicional para la transmisión HDTV. El Sistema Philips de alta definición para Norteamérica (HDS-NA) transmite una señal NTSC en un canal estándar de 6 MHz y utiliza medio canal (3 MHZ) para transmitir de manera digital información necesaria para el vídeo HDTV. Una posible ventaja de la utilización de medio canal es que el canal aumentado se podría compartir con otra estación HDTV. La potencia de la señal en el canal aumentado puede estar a un nivel más bajo que el necesario para la señal NTSC principal. Las asignaciones de canal con frecuencia se escalonan en áreas urbanas para evitar la interferencia, y estos canales de respaldo adyacentes podrían emplearse para estas transmisiones aumentadas.

El sistema propuesto Zenith Spectrum-Compatible HDTV (SC-HDTV) es un ejemplo de sistema compatible con las asignaciones de canales de TV de 6 MHz actuales, aunque no utiliza los estándares NTSC. En este sistema, el vídeo a frecuencias por encima de 200 kHz se transmite en formato analógico, mientras que las señales por debajo de 200 kHz se envían en forma digital. La codificación de vídeo divide una señal

http://libreria-universitaria.blogspot.com

de luminancia de entrada de 30 MHz en cuatro componentes: dos limitadas en banda al tercio inferior del espectro (el segundo utiliza una codificación de diferencias), una limitada en banda al tercio medio y una al tercio superior del espectro. La primera se envía a una tasa de cuadro total (59.94) mientras que las otras se multiplexan en tiempo a una tasa de un quinto de cuadro (11.988/s). Por tanto, el vídeo estacionario se refresca a la tasa de cuadro de 11.988, pero el cambio (movimiento) se envía a la tasa de cuadro de 59.94. Esto se acopla a la capacidad de resolución del ojo humano, que es bastante menor para objetos en movimiento que para escenas estacionarias. Se transmiten dos señales de diferencia de color ($R - Y, B - Y$) a un tercio de la resolución y se multiplexan a un quinto de la tasa de cuadro. Estas seis componentes de vídeo se multiplexan en tiempo en dos señales de 3 MHz que modulan portadoras en fase y en cuadratura en el centro del canal de 6 MHz asignado, usando DSB-SC. Se reinserta una portadora piloto para ayudar a la regeneración de portadora en el receptor.

En el sistema Zenith propuesto, los datos digitales consisten en componentes de vídeo de baja frecuencia, información de sincronía, audio de alta calidad, encabezado, etcétera. Se utiliza codificación para corrección de error, y estos datos digitales se transmiten durante las líneas 22-23 en el intervalo de borrado vertical a 22.4 Mbps usando QAM de 16 estados en las mismas portadoras suprimidas que el vídeo analógico. Como este sistema intenta optimizar la utilización del espectro disponible (sin portadoras y con densidad espectral relativamente plana), la potencia de transmisor necesaria para un nivel de desempeño dado se puede reducir y, por tanto, este sistema podría utilizar canales por ahora restringidos como canales de respaldo entre los canales asignados para uso activo en un área dada.

Un ejemplo de sistema que es incompatible con los estándares NTSC existentes y con la asignación de canal de 6 MHz es el sistema Multiple Sub-Nyquist Encoding (MUSE) desarrollado por NHK (la corporación japonesa de radiodifusión). Este sistema utiliza transmisión en serie en tiempo con una secuencia de cuatro campos, transmite primero todo pixel distinto de toda línea diferente, luego las muestras restantes de aquellas líneas, luego pixeles distintos de líneas alternas, etcétera. Utiliza dos resoluciones para el despliegue de vídeo, dependiendo de la presencia de movimiento detectada. Si existe movimiento, la resolución es la de los sistemas NTSC con ancho de banda de 4 MHz. Si no lo hay, la resolución es la de un ancho de banda de vídeo de 8.1 MHz (banda base). El sistema MUSE utiliza 1125 líneas de rastreo por cuadro con un rastreo entrelazado de 2:1, 60 cuadros por segundo y una razón de aspecto de 16:9, y requiere un ancho de banda aproximado de 10 MHz. La NHK proyecta iniciar algunas transmisiones de HDTV vía satélite en 1990 usando el sistema MUSE.

Este breve análisis es una muestra de los muchos sistemas de procesamiento de señales que se han propuesto a la FCC. Luego seguirán las fases de evaluación y prueba bajo condiciones cuidadosamente especificadas y mantenidas. Los costos relativos, tanto en términos económicos como de ancho de banda y de compatibilidad, deberán confrontarse contra el desempeño y los beneficios proporcionados. La disponibilidad de espectro es una de las mayores tareas para sistemas de difusión terrestre en Estados Unidos. Es posible que finalmente evolucionen muchos estándares diferentes, dependiendo del uso de sistemas de radiodifusión terrestre, por cable o vía satélite.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Referencias seleccionadas para lectura adicional

1. Mandl, M., *Principles of Electronic Communications*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1973, Caps. 8 y 9.
2. Stark, H., Tuteur, F. B. y Anderson, J. B., *Modern Electrical Communications: Analog, Digital, and Optical Systems*, 2a. ed., Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1988, Cap. 6.
3. Herrick, C. N., *Color Television: Theory and Servicing*, Reston, Va., Reston Publishing Co., 1976.
4. Sims, H. V., *Principles of PAL Colour Television*, Londres, Iliffe Books Ltd., 1969.
5. Patchett, G. N., *Colour Television*, Londres, Norman Price (Publishers) Ltd., 1967.
6. Benson, K. B. (ed.), *Television Engineering Handbook*, Nueva York, McGraw-Hill, 1986.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

APÉNDICE

E Canales telefónicos

Un canal telefónico básico de banda de voz permite el paso de componentes de frecuencia en el intervalo de 0.3–3 kHz con una distorsión tolerable para el oído humano. Sin embargo, cuando se utilizan canales de banda de voz para transmitir datos, pueden presentarse problemas como resultado de la respuesta en frecuencia no uniforme de la magnitud y un retardo de fase que no es lineal con la frecuencia. Para solucionar esto, en Estados Unidos existen cinco tipos de líneas "acondicionadas" para servicios de datos. Las especificaciones para las líneas mantenidas por la AT & T se muestran en la tabla E.1† (la distorsión por retardo de envolvente se define más adelante).

TABLA E.1 Algunos límites típicos de los parámetros telefónicos[a]

	Distorsión por atenuación (respuesta en frecuencia) relativa a 1 kHz		Distorsión por retardo de envolvente relativo a media banda	
Acondicionamiento de canal	Intervalo de frecuencia (Hz)	Variación (dB)	Intervalo de frecuencia (Hz)	Variación (μs)
Basic	500–2500	−2 /+8	800–2600	1750
	300–3000	−3 /+12		
C1	1000–2400	−1 /+3	1000–2400	1000
	300–2700	−2 /+6	800–2600	1750
	300–3000	−3 /+12		
C2	500–2800	−1 /+3	1000–2600	500
	300–3000	−2 /+6	600–2600	300
			500–2800	3000
C3	500–2800	−0.5/+1.5	1000–2600	110
	300–3000	−0.8/+3	600–2600	300
			500–2800	650
C4	500–3000	−2 /+3	1000–2600	300
	300–3200	−2 /+6	800–2800	500
			600–3000	1500
			500–3000	3000
C5	500–2800	−0.5/+1.5	1000–2600	100
	300–3000	−1 /+3	600–2600	300
			500–2800	600

[a] De *Data Communications Using Voiceband Private Channels*, Bell System Publication 41004, octubre de 1973, © American Telephone and Telegraph Company 1973. Reimpreso con autorización.

† "AT & T" es la abreviatura utilizada por la American Telephone and Telegraph Company.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La mayoría de los sistemas telefónicos de larga distancia utilizan canales SSB-SC múltiples que están multiplexados en frecuencia en una portadora de alta frecuencia (microonda). Las subportadoras no se transmiten. La subportadora que se reinserta para demodulación correcta no es de frecuencia o de fase cerrada pero se mantiene en ±5 Hz de la frecuencia subportadora correcta.

No es práctico medir la característica de desfasamiento de un canal SSB debido a la ausencia de fase cerrada. Por tanto, se envía una señal senoidal AM de banda angosta a través del canal, y la diferencia entre los desfasamientos entre las bandas laterales superior e inferior se detecta como función de la frecuencia portadora. Para frecuencias de modulación bajas (AT&T utiliza $83\frac{1}{3}$ Hz), esta diferencia de fase es aproximadamente la derivada de la característica de retardo de fase. La característica de retardo de fase se puede obtener, excepto por una constante arbitraria, por integración del retardo de envolvente. La *distorsión por retardo de envolvente* se define como la máxima diferencia en el retardo de envolvente sobre una banda de frecuencias dada.

El retardo de distorsión es muy tolerable para comunicación de voz, pero es un problema serio en transmisiones de tipo pulso porque no todas las componentes de frecuencia llegan al mismo tiempo. Por ejemplo, si se aplicara una señal cuadrada de 1 kHz a un canal que tuviera una distorsión de fase apreciable, las armónicas fundamental y tercera (todas las demás se atenúan en forma severa) podrían tener desfasamientos muy diferentes. En la figura E.1 se muestra una señal resultante típica.

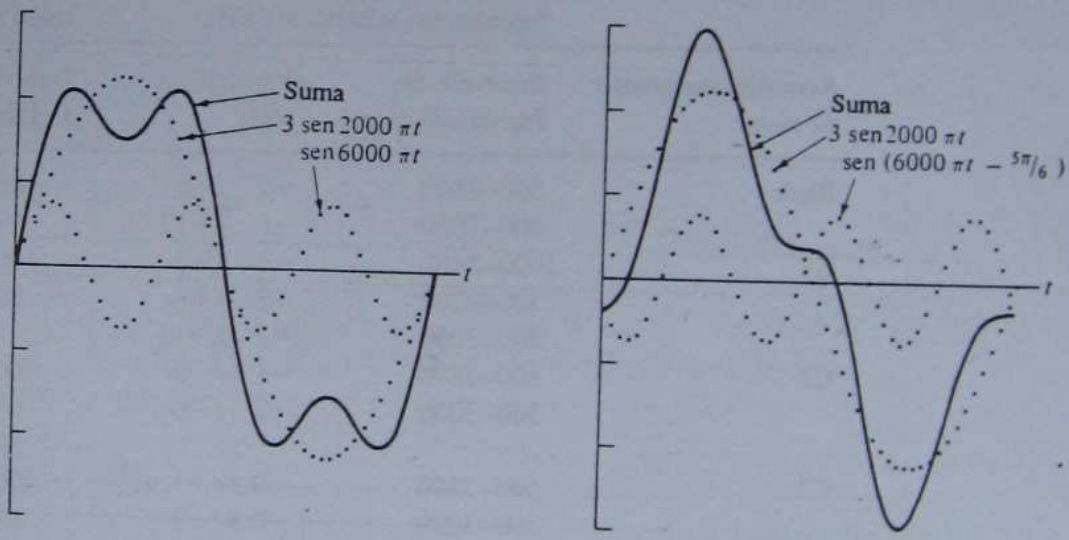


Figura E.1 Señales de entrada y de salida para un canal con distorsión por retardo.

Estos efectos se vuelven importantes en la transmisión por facsímil, la transmisión bidimensional de imágenes a través de sistemas telefónicos comerciales. Los ejemplos incluyen transmisión de noticias y facturas, tablas meteorológicas, imágenes meteorológicas de satélites, etcétera.

Las transmisiones por facsímil (fax) utilizan algunas de las mismas técnicas básicas de rastreo que se utilizan en la televisión comercial. A diferencia de ésta, la transmisión por facsímil no requiere retroceso vertical, y las tolerancias relativas para retroceso horizontal son despreciables. Sin embargo, como resultado de algunas de las características de los sistemas telefónicos, pueden presentarse problemas adicionales.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Con el fin de hacer un buen uso del ancho de banda limitado disponible, las transmisiones por facsímil analógicas suelen ser de amplitud modulada, utilizando una portadora de 2400 Hz y un ancho de banda de modulación de 1600 Hz. Luego se utiliza filtrado de la banda lateral residual alrededor de la portadora de 2400 Hz para restringir el ancho de banda al intervalo en el que la distorsión por retardo es tolerable. La sincronización de línea se envía transmitiendo una portadora de bajo nivel (5% de modulación) y modulando la portadora con una función escalón para aumentar el índice de modulación al 100%. Como resultado de la pérdida de la coherencia de fase, la sincronización de línea detectada puede variar de manera apreciable. Nótese que en televisión comercial la frecuencia portadora es lo bastante alta para que éste no sea un problema importante.

Como resultado de los efectos de la distorsión por retardo, los sistemas de facsímil hacen un uso creciente de métodos de codificación digital y de modulación por conmutación de frecuencia (FSK). Algunas transmisiones de banda angosta (p. ej., las señales EGG) se envían en forma analógica utilizando modulación de frecuencia (FM).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

APÉNDICE

F Algunos sistemas comerciales de preénfasis/deénfasis

La utilización de preénfasis/deénfasis pasivo de alta frecuencia se ha practicado durante años en la grabación de audio y la radiodifusión comercial. Recientemente, algunas técnicas de preénfasis/deénfasis más elaboradas se han aplicado con éxito al campo de la grabación de cintas de audio. Algunas se han propuesto para utilizarse en radiodifusión (el sistema Dolby-B ya se emplea en muchas estaciones FM).

Se describirán en forma breve los tres tipos principales de nuevos sistemas de preénfasis/deénfasis de uso actual. Los tres utilizan una combinación de filtrado y compresión de intervalo dinámico para reducir los efectos del ruido. Como estos efectos son más apreciables cuando el nivel de la señal es bajo, los tres sistemas intentan elevar los niveles de señal bajos.

El sistema Dolby-A (Dolby Labs., Londres) divide el espectro de audio en cuatro bandas de frecuencia y luego aplica una elevación de 10 a 15 dB a las bandas individuales cuando el nivel de la señal de audio cae por debajo de un nivel prefijado. Este nivel se halla alrededor de 45 dB por debajo de una señal de nivel estándar conocida como "nivel Dolby" y se fija con referencia al nivel de flujo en la cinta de grabación. La señal elevada se suma a la señal original y luego se graba. Suponiendo que los niveles de reproducción y de grabación se fijan en forma apropiada, el sistema Dolby-A puede aumentar de 10 a 15 dB la razón señal a ruido (*S/N*) neta sin efectos perceptibles en el material del programa. En las figuras F.1 y F.2 se muestran los diagramas de bloques del sistema Dolby-A. Una desventaja del sistema Dolby es que tiene un intervalo dinámico limitado y no puede manejar picos orquestales grandes sin alguna limitación de amplitud ("recorte"). Es también un tanto caro para utilización extensa en equipo doméstico.

Hay una versión más barata, el sistema Dolby-B, que está diseñado para equipo de grabación de cintas doméstico. Para mantener bajos los costos, reemplaza la división

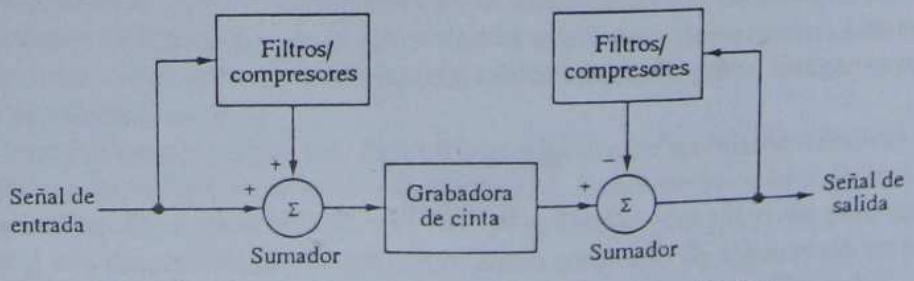


Figura F.1 Diagrama de bloques del sistema Dolby.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

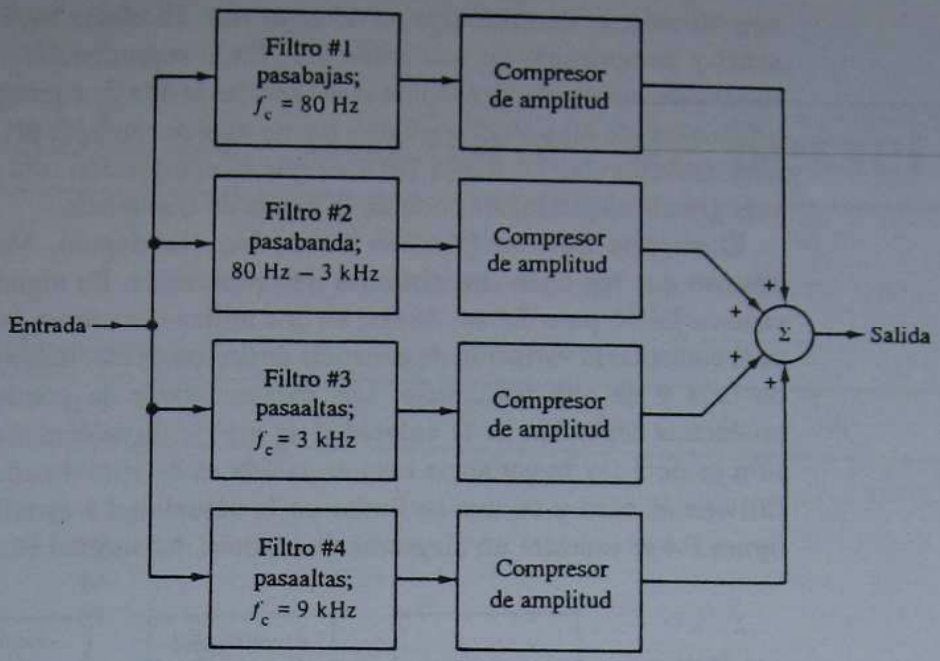


Figura F.2 Filtros/compresores para el sistema Dolby-A.

del espectro de audio en cuatro partes con una banda pasaaltas encima de 600 Hz. En la figura F.3 se muestra una gráfica de la característica de preénfasis de un sistema Dolby-B. Su uso en grabadoras de calidad doméstica se está volviendo muy popular con la disponibilidad de circuitos integrados. También se está utilizando para transmisiones de FM con constantes de tiempo de 25 μs (6.4 kHz), en la banda pasaaltas. Esto permite alguna mejora en la *S/N* y mantiene la compatibilidad con el preénfasis fijo de 75 μs que se utiliza en transmisiones FM.

El sistema DBX (DBX, Inc., Waltham, Mass.) trata al espectro de audio como un todo y utiliza preénfasis de alta frecuencia arriba de 1.6 kHz con una elevación máxima de alta frecuencia de 20 dB. Para amplificar la señal, se utiliza un amplificador controlado por tensión con un amplio intervalo dinámico (130 dB). La ganancia de este

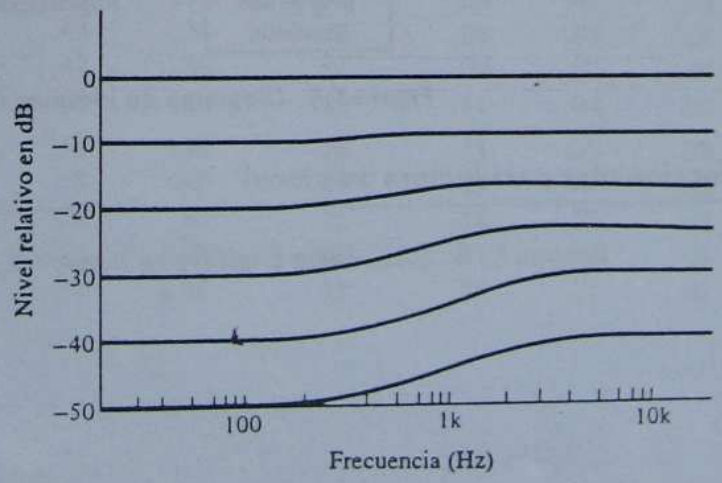


Figura F.3 Característica de preénfasis del sistema Dolby-B.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

amplificador se controla con un detector rms. El efecto total es detectar el nivel de la señal y comprimirla en una razón 2:1. En la reproducción, la señal se expande a su intervalo dinámico y se elimina la elevación de alta frecuencia. El sistema DBX ofrece una mejora de 20 a 30 dB en *S/N* y puede manejar señales pico de 26 dB sin distorsión. Una desventaja del sistema DBX es que la compresión está gobernada por la entrada más grande en cualquier parte de la banda de frecuencia.

El sistema Burwen (Burwen Labs., Inc., Lexington, Mass.) es más elaborado y costoso que los otros dos sistemas descritos antes. En algunos aspectos es similar al sistema DBX, pero difiere de éste en que utiliza detectores de señales pico de precisión para controlar la variación de ganancia de un compresor más amplio y emplea preénfasis de baja y de alta frecuencia. Las características de ponderación de frecuencia en preénfasis dependen de la velocidad de grabación seleccionada. La razón de compresión es de 3:1 y la ganancia neta en la *S/N* es de aproximadamente 50 dB. El sistema Burwen es caro y su uso se limita en la actualidad a estudios de alta calidad. En la figura F.4 se muestra un diagrama de bloques del sistema Burwen.

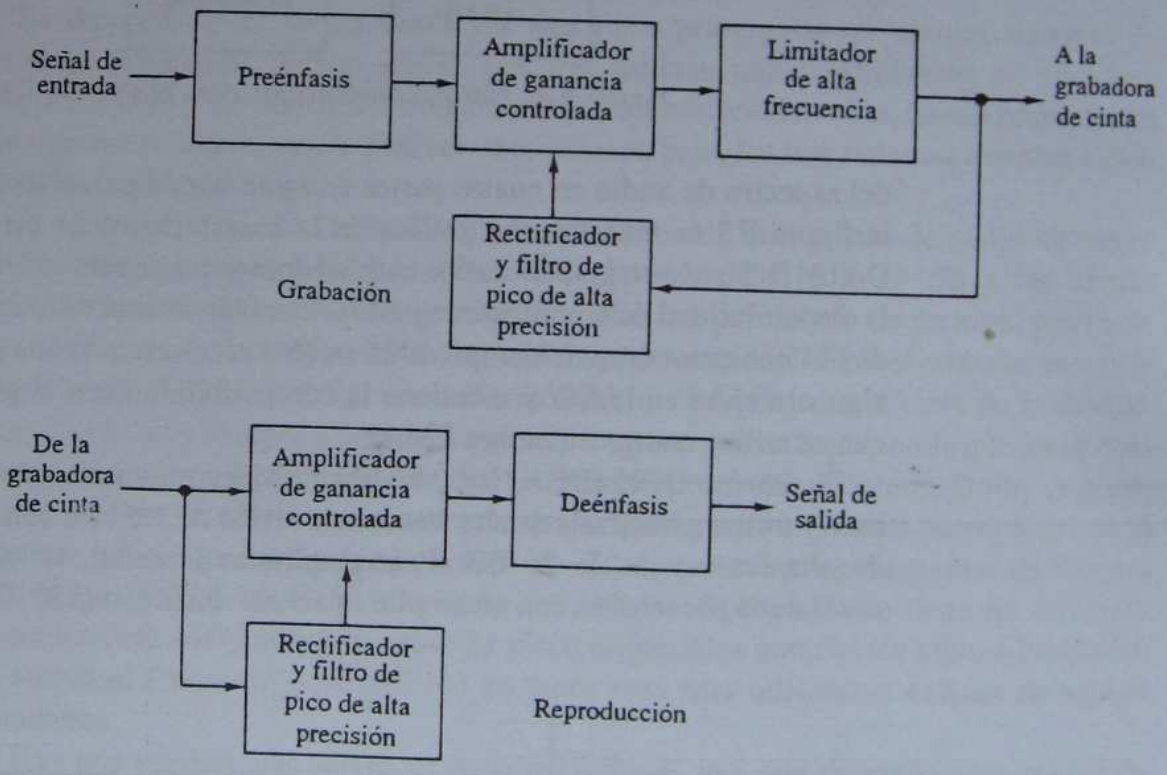


Figura F.4 Diagrama de bloques del sistema Burwen.

Referencias seleccionadas para lectura adicional

Benson, K. B., (ed.), *Audio Engineering Handbook*, Nueva York, McGraw-Hill, 1988.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

APÉNDICE

G Tabla de funciones de Bessel

Funciones de Bessel de primera especie, $J_n(x)$

x	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}
0.0	1.00										
.2	.99	.10									
.4	.96	.20	.02								
.6	.91	.29	.04								
.8	.85	.37	.08	.01							
1.0	.77	.44	.11	.02							
.2	.67	.50	.16	.03	.01⁻						
.4	.57	.54	.21	.05	.01⁻						
.6	.46	.57	.26	.07	.01						
.8	.34	.58	.31	.10	.02						
2.0	.22	.58	.35	.13	.03	.01⁻					
.2	.11	.56	.40	.16	.05	.01					
.4	.00	.52	.43	.20	.06	.02					
.6	−.10	.47	.46	.24	.08	.02	.01⁻				
.8	−.19	.41	.48	.27	.11	.03	.01⁻				
3.0	−.26	.34	.49	.31	.13	.04	.01				
.2	−.32	.26	.48	.34	.16	.06	.02				
.4	−.36	.18	.47	.37	.19	.07	.02	.01⁻			
.6	−.39	.10	.44	.40	.22	.09	.03	.01⁻			
.8	−.40	.01	.41	.42	.25	.11	.04	.01			
4.0	−.40	−.07	.36	.43	.28	.13	.05	.02			
.2	−.38	−.14	.31	.43	.31	.16	.06	.02	.01⁻		
.4	−.34	−.20	.25	.43	.34	.18	.08	.03	.01⁻		
.6	−.30	−.26	.18	.42	.36	.21	.09	.03	.01		
.8	−.24	−.30	.12	.40	.38	.23	.11	.04	.01		
5.0	−.18	−.33	.05	.36	.39	.26	.13	.05	.02	.01⁻	
.2	−.11	−.34	−.02	.33	.40	.29	.15	.07	.02	.01⁻	
.4	−.04	−.35	−.09	.28	.40	.31	.18	.08	.03	.01⁻	
.6	.03	−.33	−.15	.23	.39	.33	.20	.09	.04	.01	
.8	.09	−.31	−.20	.17	.38	.35	.22	.11	.05	.02	.01⁻

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Funciones de Bessel de primera especie, $J_n(x)$

x	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}
6.0	.15	−.28	−.24	.11	.36	.36	.25	.13	.06	.02	.01
.2	.20	−.23	−.28	.05	.33	.37	.27	.15	.07	.03	.01
.4	.24	−.18	−.30	−.01	.29	.37	.29	.17	.08	.03	.01
.6	.27	−.12	−.31	−.06	.25	.37	.31	.19	.10	.04	.01
.8	.29	−.07	−.31	−.12	.21	.36	.33	.21	.11	.05	.02
7.0	.30	−.00	−.30	−.17	.16	.35	.34	.23	.13	.06	.02
.2	.30	.05	−.28	−.21	.11	.33	.35	.25	.15	.07	.03
.4	.28	.11	−.25	−.24	.05	.30	.35	.27	.16	.08	.04
.6	.25	.16	−.21	−.27	−.00	.27	.35	.29	.18	.10	.04
.8	.22	.20	−.16	−.29	−.06	.23	.35	.31	.20	.11	.05
8.0	.17	.23	−.11	−.29	−.11	.19	.34	.32	.22	.13	.06
.2	.12	.26	−.06	−.29	−.15	.14	.32	.33	.24	.14	.07
.4	.07	.27	−.00	−.27	−.19	.09	.30	.34	.26	.16	.08
.6	.01	.27	.05	−.25	−.22	.04	.27	.34	.28	.18	.10
.8	−.04	.26	.10	−.22	−.25	−.01	.24	.34	.29	.20	.11
9.0	−.09	.25	.14	−.18	−.27	−.06	.20	.33	.31	.21	.12
.2	−.14	.22	.18	−.14	−.27	−.10	.16	.31	.31	.23	.14
.4	−.18	.18	.22	−.09	−.27	−.14	.12	.30	.32	.25	.16
.6	−.21	.14	.24	−.04	−.26	−.18	.08	.27	.32	.27	.17
.8	−.23	.09	.25	.01	−.25	−.21	.03	.25	.32	.28	.19
10.0	−.25	.04	.25	.06	−.22	−.23	−.01	.22	.32	.29	.21

Aproximaciones para argumentos pequeños:

$$J_0(x) \approx 1 - \frac{x^2}{4}$$

$$J_1(x) \approx \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{8}\right)$$

$$J_2(x) \approx \frac{x^2}{8}\left(1 - \frac{x^2}{12}\right)$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

APÉNDICE

H AM estéreo†

Durante más de 50 años, en Estados Unidos varios individuos y grupos han expresado su interés en la transmisión estereofónica (estéreo) utilizando la amplitud modulada (AM). Al final de la década de 1950 y principios de la de 1960 varios grupos (Philco, RCA, Westinghouse y Kahn Communications) pidieron, en forma independiente, a la Federal Communications Commission (FCC) que aprobara sus respectivos sistemas de emisiones estéreo en AM. En 1962, la FCC reglamentó contra estos propósitos, y en su lugar instó al desarrollo de las emisiones estéreo usando la frecuencia modulada (FM). Desde esa época, la demanda para emisiones en estéreo se incrementó de manera constante, y recientemente se amplió al mercado automovilístico.

Como resultado del creciente interés en el sistema AM estéreo, en 1975 se fundó el National AM Stereophonic Radio Commitee (NAMSRC), el cual en 1977 rindió un informe a la FCC sobre el tema. La FCC ha conducido las evaluaciones y mantenido las audiciones de cinco sistemas AM estéreo en competencia, sin que hubiera conclusión alguna respecto a las ventajas de seleccionar alguno de estos sistemas. Luego se tomó la decisión de dejar que el mercado decidiera, permitiendo a las emisoras de AM instalar cualquiera de los cinco sistemas aprobados. Esto ha frenado el desarrollo; tanto los fabricantes de receptores como las emisoras han sido renuentes a aventurarse en la utilización de cualquier sistema, porque cada uno de ellos requiere diferentes circuitos de transmisión/recepción. Como al momento de escribir el libro no se han planteado conclusiones en esta materia, este apéndice resume en forma breve las cinco opciones de AM estéreo en competencia.

H.1 AM ESTÉREO CONTRA FM ESTÉREO

Antes de describir los sistemas propuestos para AM estéreo, veremos de manera breve las posibles ventajas que pueda tener este sistema sobre el FM estéreo en ciertos casos. Una ventaja del ancho de banda de los sistemas FM es la de acallar el ruido que se pueda tener en la demodulación, y el problema del incremento de la densidad espectral de la potencia de ruido con la frecuencia en la detección de FM en general se minimiza con

---

† Como el material de este apéndice depende del conocimiento de la modulación tanto de amplitud como de ángulo, se recomienda que el lector cubra los capítulos 5 y 6 antes de leer este apéndice.

Entre las diversas referencias para este apéndice se incluye la siguiente: D. Mennie, "AM Stereo: Five Competing Options", *IEEE Spectrum*, junio de 1978, págs. 24-31; y "Whatever Happened to AM Stereo?", *IEEE Spectrum*, marzo de 1988, pág. 17.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

preénfasis/deénfasis. Sin embargo, en la emisión FM estéreo la información estéreo se preenfatiza antes de la modulación DSB-SC para evitar la sobremodulación del transmisor. Esto produce una degradación *S/N* de 22 dB (Problema 6.10.5) —comparando FM estéreo con FM monaural— que neutraliza parcialmente la ventaja de la eliminación de ruido de FM.

Debido a que en las transmisiones AM la modulación está limitada por los picos negativos en el material de audición (para evitar la sobremodulación), muchas estaciones de AM usan circuitos compresores de audio para comprimir los picos negativos en el material de audición antes de modular el transmisor. De esta manera, la modulación sobre los picos positivos se puede incrementar (hasta un 125%), con el resultado de que la señal detectada de salida en el receptor es más ruidosa en comparación con el nivel de ruido. Esto ayuda a percibir la razón señal a ruido (*S/N*). Sin embargo, esta ganancia comparativa no es definitiva porque algunas estaciones de radio también usan compresión de audio para incrementar efectivamente la sonoridad con la restricción de una desviación de frecuencia pico fija. Las excepciones a este método son aquellas estaciones de radio —muchas de ellas son las que transmiten música clásica—, que consideran que una compresión es una "distorsión" indeseable.

Debido a las altas frecuencias que se usan, el desempeño de los sistemas de FM tiende a verse influido por la propagación en trayectoria múltiple. Esto se nota sobre todo por el desvanecimiento rápido y la variación de la intensidad de las señales de FM en la recepción de los vehículos en movimiento en los alrededores de los grandes edificios y otras estructuras. Esto no es un gran problema en la recepción de AM siempre y cuando el receptor se encuentre en el área donde la señal esté bien definida y sea intensa, además de tener un control de ganancia automático razonablemente bueno. A causa de las frecuencias que se utilizan en FM, su propagación es en línea visual, mientras que la AM tiene un mayor alcance potencial.

Finalmente, existe una pregunta con respecto a la frecuencia de respuesta adecuada. En sistemas AM, la FCC necesita una verificación de la respuesta del transmisor para entradas desde 100 hasta 7500 Hz (aun cuando muchos receptores de AM no tienen buena respuesta más allá de 5 kHz). Algunas estaciones comerciales de AM tienen respuestas uniformes para entradas hasta los 10 kHz, y unas cuantas tienen respuestas buenas de salida a 15 kHz. Los anchos de banda transmitidos se rigen principalmente por la capacidad de transmisión y la posible interferencia de cocanales de una estación a otra en un área geográfica en particular. Con la posibilidad de AM estéreo, hay cierta preocupación por el hecho de que muchas estaciones desearán incrementar el ancho de banda de transmisión para manejar las frecuencias de entrada en el intervalo de 10 a 12 kHz. Así mismo, la mayoría de las opciones AM estéreo o en consideración en este momento usan algún tipo de modulación no lineal que origina componentes de banda lateral extra que pueden caer fuera del ancho de banda asignado. Una complicación mayor es que se está considerando un espacio de 9 kHz en vez del actual de 10 kHz para la asignación de estaciones de AM a fin de permitir más estaciones en la banda de AM. Estos son problemas aún no resueltos.

No obstante, parece ser que la AM estéreo ofrece mejoras para la recepción en las aplicaciones móviles. Se estima que el 80% del mercado para receptores AM estéreo se instalará en automóviles. En este tipo de aplicación puede ser aceptable un intercambio ligeramente inferior en respuesta de frecuencia y *S/N*, en comparación con la FM

http://libreria-universitaria.blogspot.com

estéreo, para lograr un menor desvanecimiento y mayor distancia de recepción. Así mismo, los receptores AM estéreo deberán ser más simples, baratos y estables que los receptores de AM estéreo. Con un incremento en los sistemas AM estéreo en automóviles, ¡quizá ha llegado la época de la AM estéreo!

Los cinco sistemas AM estéreo que han intentado lograr este objetivo han sido presentados por Kahn Communications y Hazeltine Corporation, Belar Electronics, Magnavox Company, Harris Corporation y Motorola. En las descripciones siguientes, cada sistema recibe el nombre de la compañía.

H.2 TRES SISTEMAS AM ESTÉREO (KAHN/HAZELTINE, BELAR, MAGNAVOX)

Las características deseables para sistemas AM estéreo incluyen compatibilidad con los receptores monofónicos, buena separación estéreo, buena fidelidad, degradación mínima (si la hay) en el margen del área de recepción, no aumento del ancho de banda, adaptabilidad para radiodifusoras existentes y facilidades de transmisión, así como bajo costo y poca complejidad. Como veremos después, estas características no son tan fáciles de obtener, como podría parecer a primera vista.

H.2.1 Kahn/Hazeltine

En el sistema Kahn/Hazeltine, las bandas laterales superior e inferior llevan de modo independiente la información a los canales derecho (R) e izquierdo (L) respectivamente. Un receptor monaural sintonizado en el centro de la frecuencia portadora suma las bandas laterales y detecta la envolvente, dando la recepción monofónica compatible (L + R). Dos receptores mono AM detectarán un estéreo —con adecuada pero no buena separación estéreo— sintonizando el receptor de la izquierda levemente antes de la portadora y el derecho después de ella. Se fabricó para este sistema un receptor con una sola frecuencia intermedia (IF), el cual da una mejor recepción estéreo. Éste utiliza la detección de envolvente para la señal L + R y la detección en cuadratura con redes desfasadoras para la señal L - R. Entonces, estas señales se suman y restan (como en matrices) para proporcionar las señales L y R. Al principio de la década de 1970 el sistema Kahn se usó experimentalmente en la estación WFBR de Baltimore, MD, y en la estación XETRA de Tijuana, México. La Hazeltine Corporation se unió con la Kahn en 1977 para apoyar este sistema AM estéreo.

La transmisión en el sistema Kahn/Hazeltine usa el principio de la modulación compatible de banda lateral única (CSSB) para obtener las bandas laterales independientes. La señal L + R modula la amplitud de transmisión, mientras que la señal L - R se desfasa 90° (en la práctica, la señal L + R se desfasa -45° y la L - R, 45°) y entonces se usa para modular la fase del transmisor. Para proporcionar una separación menor en estéreo, se forma una señal de corrección de segundo orden cuadrando las señales L y R y sumando su diferencia a la señal L - R antes de la modulación de fase. Se puede añadir un tono de 15 Hz a la señal L - R, la cual, al detectarse, se usa como indicador luminoso de estéreo. Este sistema tiene el potencial para un buen rendimiento estéreo en condiciones

http://libreria-universitaria.blogspot.com

de propagación variable (aunque a expensas de la separación estéreo en la versión de doble IF) y necesita redes de desfasamiento precisas en la versión de IF única.

H.2.2 Belar

Un segundo sistema AM estéreo es el sistema AM/FM Belar. La propuesta para este tipo de sistema estéreo fue hecha por RCA en 1959 y se probó en la estación WRCA en la ciudad de Nueva York. Ahora conocido como sistema Belar, utiliza una FM de banda angosta para modular la información L - R en la portadora. La desviación de la frecuencia pico es de 1.25 kHz y el preénfasis que se usa tiene una constante de tiempo de 100 μs. La señal L + R se usa para modular la amplitud de la portadora. Se emplea un límite negativo de modulación en amplitud de 95% (portadora residual, 5%) para prevenir el ruido excesivo en la etapa limitadora del receptor. El sistema Belar no contiene facilidades para una señal de identificación de estéreo que active un indicador luminoso en el receptor. Sin embargo, a juzgar por su propia experiencia con FM estéreo, los fabricantes piensan que semejante potencial de usuarios desearía algún tipo de indicador para estaciones estéreo.

H.2.3 Magnavox

Un tercer sistema AM estéreo es el AM/PM propuesto por Magnavox. En este sistema, un oscilador a la frecuencia portadora está modulado en frecuencia con un tono de identificación estéreo de 5 Hz usando una desviación de frecuencia pico de 20 Hz (β = 4). La señal L - R se usa para modular la fase de esta portadora, que usa una desviación de fase pico de un radián (β = 1). La señal L + R se usa para la modulación de amplitud al transmisor. En la figura H.1 se muestra un diagrama de bloques simplificado del sistema Magnavox.

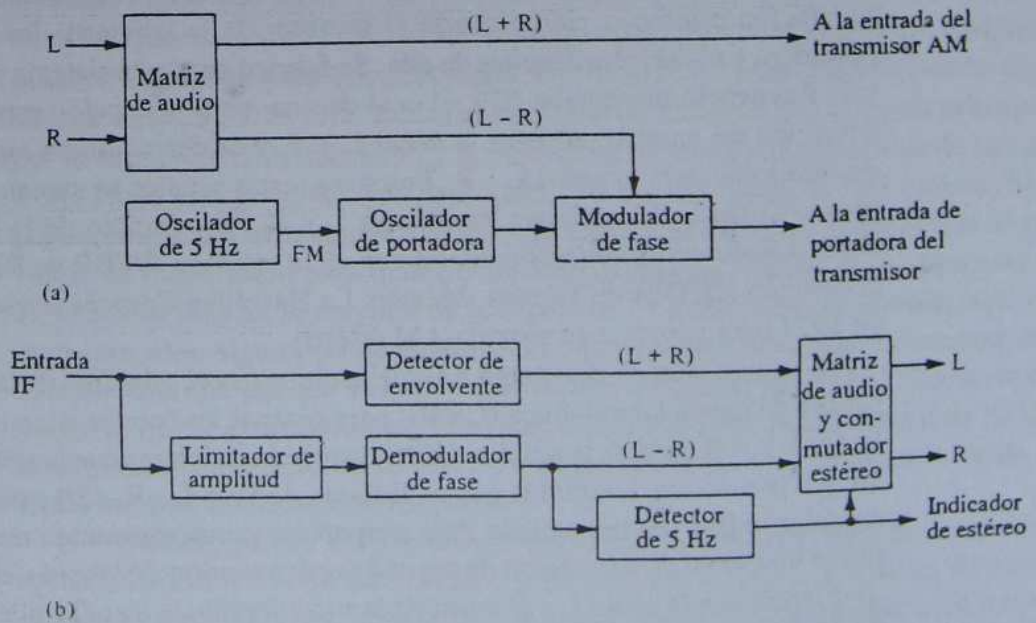


Figura H.1 Diagrama simplificado del procesamiento de la señal en el receptor y el transmisor del sistema AM estéreo de Magnavox.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

La detección de la señal AM/PM Magnavox utiliza un detector de envolvente para obtener la señal L + R, así como un limitador de amplitud y un detector de fase para obtener la señal L - R. Como en el sistema Belar, se emplea un límite negativo de modulación de 95% (portadora residual, 5%) para prevenir el ruido excesivo en la etapa limitadora del receptor. Las señales L + R y L - R se combinan (suman y restan) para obtener las señales L y R. La detección de la modulación de frecuencia de 5 Hz opera la luz del indicador de estéreo. Magnavox sugiere la posibilidad de enviar información digital (identificación de la estación, tiempo, etc.) utilizando también esta capacidad de tono de 5 Hz.

En los primeros años de la década de 1980, el sistema Magnavox tuvo una aceptación preliminar para transmitir AM estéreo en Estados Unidos. Sin embargo, poco después de esa decisión, se solicitó a la FCC reconsiderar su reglamento preliminar y se llevaron a cabo más pruebas, audiencias y estudios.

Belar y Magnavox proponen usar una combinación de AM y modulación de ángulo para transmisiones estéreo. Ambas son relativamente económicas y fáciles de adaptar tanto al receptor como al transmisor, y deben conservar por lo menos un 5% de portadora residual sobre los picos negativos para lograr una demodulación de ángulo aceptable. Así mismo, se debe esperar que la modulación del ángulo detectado sea ruidosa si la amplitud de la señal permanece a este bajo nivel para cualquier intervalo de tiempo aceptable.

H.3 DOS SISTEMAS ADICIONALES (HARRIS Y MOTOROLA)

Los dos sistemas restantes utilizan modificaciones de multiplexión en cuadratura. La modulación de amplitud de cuadratura (QAM, *quadrature amplitude modulation*) ofrece la ventaja de un buen rendimiento en presencia de ruido y de transmisión y detección de dos señales independientes dentro del mismo ancho de banda usando una combinación lineal de ambas señales. Por ejemplo, la QAM se usa con buen resultado en la multiplexión de la información del croma (color) en las emisoras de televisión comercial.

Aun cuando la QAM tiene mucho que ofrecer en la transmisión de señales estéreo, su problema principal es la compatibilidad con la detección de la envolvente. Supongamos que representamos la señal del canal izquierdo como $\ell(t)$ y la del canal derecho como $r(t)$. La componente en fase $x(t)$ que se usa para la modulación en amplitud de la portadora es

$$x(t) = 1 + \ell(t) + r(t) \tag{H.1}$$

y la señal en cuadratura es

$$y(t) = \ell(t) - r(t). \tag{H.2}$$

El diagrama de fasores de este resultado se muestra en la figura H.2. Un detector en fase detectará la señal AM (L + R); y un detector en cuadratura, la señal DSB-SC (L - R). Sin embargo, un detector de envolvente deberá detectar

$$e(t) = \sqrt{[1 + \ell(t) + r(t)]^2 + [\ell(t) - r(t)]^2}. \tag{H.3}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

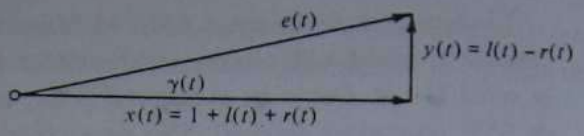


Figura H.2 Diagrama fasorial de las componentes en fase y en cuadratura para la modulación de amplitud en cuadratura de AM estéreo.

La presencia de la componente L – R en la ecuación (H.3) puede producir una distorsión importante en la salida del detector de envolvente si las componentes L – R y L + R son de magnitud comparable y si el índice de modulación es relativamente alto. Debido a que éstas son condiciones reales, se necesitan algunas modificaciones en la multiplexión en cuadratura si se va a conservar la compatibilidad con la detección de la envolvente.

H.3.1 Harris

En el sistema AM estéreo Harris, la señal L se aplica a un mezclador simétrico cuya referencia es un desfasamiento de -15 grados respecto a la portadora. Esto se muestra en la figura H.3(a). De manera semejante, la señal R se aplica a un mezclador simétrico cuya referencia es un desfasamiento de +15 grados con respecto a la portadora. Las salidas de los dos mezcladores se suman con la portadora, como lo indican los diagramas fasoriales de la figura H.3(b).

La señal envolvente resultante del sistema Harris AM estéreo es

$$e(t) = \sqrt{\{1 + [\ell(t) + r(t)] \cos 15°\}^2 + \{[\ell(t) - r(t)] \operatorname{sen} 15°\}^2}. \qquad \text{(H.4)}$$

La reducción en la componente L - R reduce bastante la distorsión de envolvente y el resultado es alguna pérdida en *S/N*. La pérdida de potencia en la señal de la componente en fase es más bien pequeña:

$$10 \log_{10} (\cos 15°)^2 = -0.3 \text{ dB},$$

pero la pérdida de potencia en la componente en cuadratura es apreciable:

$$10 \log_{10} (\operatorname{sen} 15)^2 = -11.7 \text{ dB}.$$

La parte positiva del sistema Harris reside en que es el único de los propuestos que usa métodos de modulación lineal y, por tanto, no es propenso a generar armónicos fuera del ancho de banda bien definido como ocurre con los otros cuatro sistemas anteriores (obsérvese que la segunda sección del diagrama del transmisor de la figura H.3(a) sólo necesita acoplarse a un transmisor ya existente; la señal que parte del adicionador en la primera sección deberá ser difundida como un amplificador de radiofrecuencia lineal con los mismos resultados).

Mientras que un detector de envolvente puede hacer un buen trabajo al demodular la señal monaural del sistema Harris AM estéreo, un receptor estéreo deberá tener un circuito demultiplexor en cuadratura estándar. Una manera común de formar estos circuitos es un lazo de fase cerrada con mezcladores tanto en fase como en cuadratura para demodular las señales L + R y L – R. Esto se muestra en la figura H.3(c). Para la identificación estéreo, el sistema Harris transmite un tono de 20-25 Hz a 9% de modulación sólo en el canal L – R. Esto causa un incremento de distorsión insignifican-

http://libreria-universitaria.blogspot.com

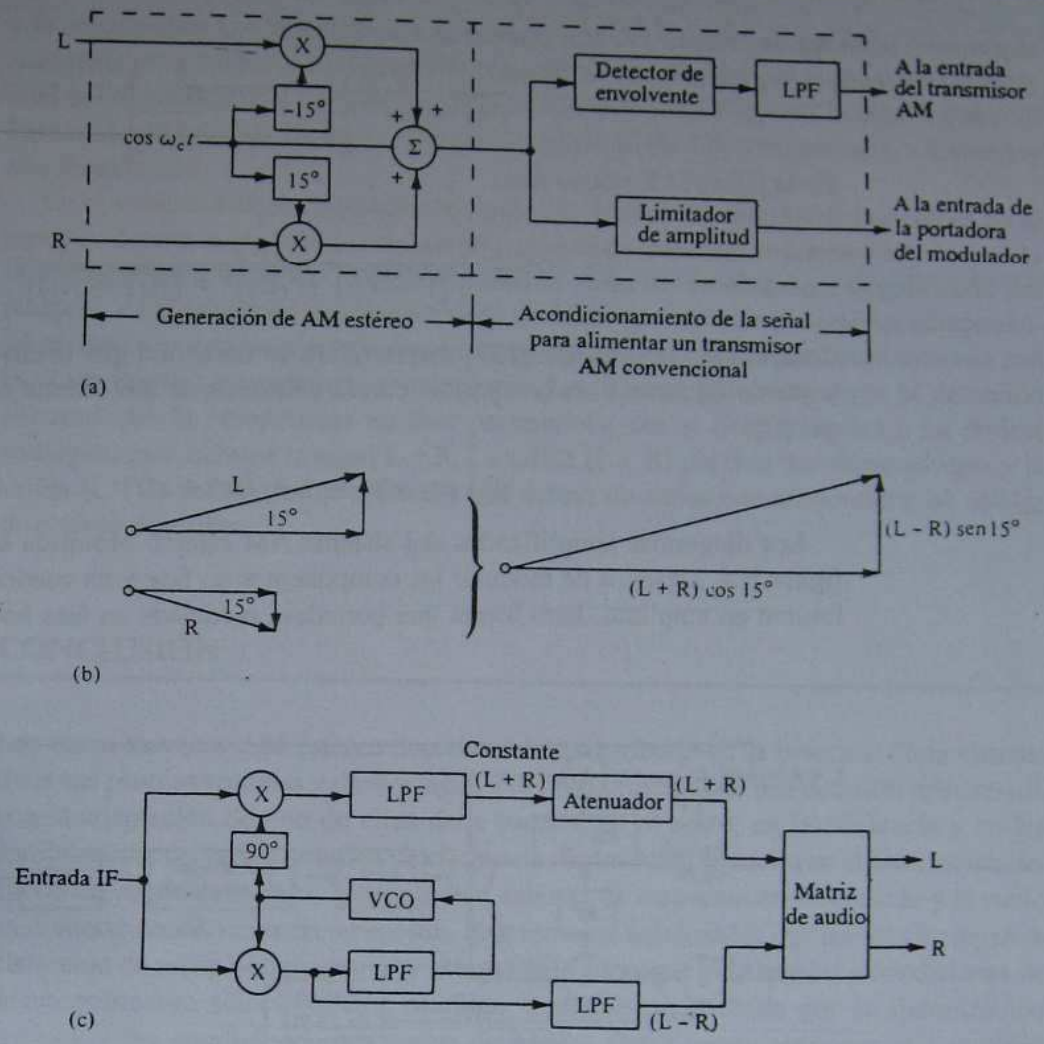


Figura H.3 Diagramas simplificados del procesamiento de señal del transmisor y el receptor para el sistema Harris AM estéreo.

te en el detector de envolvente, y es relativamente fácil de separar por filtrado en el receptor estéreo.

H.3.2 Motorola

El sistema Motorola C-QUAM† también utiliza multiplexor de cuadratura pero mantiene 90° entre las componentes moduladas en fase y en cuadratura. La señal resultante en términos de magnitud y fase es (véase Fig. H.2):

$$\phi(t) = \sqrt{[1 + \ell(t) + r(t)]^2 + [\ell(t) - r(t)]^2}\cos[\omega_c t + \gamma(t)] \qquad \text{(H.5)}$$

† C-QUAM es el acrónimo utilizado por Motorola para modulación de amplitud en cuadratura compatible (*compatible quadrature amplitude modulation*).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

donde

$$\gamma(t) = \tan^{-1}\left[\frac{\ell(t) - r(t)}{1 + \ell(t) + r(t)}\right] \tag{H.6}$$

En la figura H.2, nótese que

$$\cos\gamma(t) = \frac{1 + \ell(t) + r(t)}{\sqrt{[1 + \ell(t) + r(t)]^2 + [\ell(t) - r(t)]^2}}. \tag{H.7}$$

Comparando la ecuación (H.7) con la (H.3), se encuentra que la envolvente resultante puede forzarse a ser compatible con la detección de envolvente multiplicando por cos γ(t),

$$e(t)\cos\gamma(t) = 1 + \ell(t) + r(t). \tag{H.8}$$

Los diagramas simplificados del sistema AM estéreo Motorola se muestran en la figura H.4. Después de modular las componentes en fase y en cuadratura, se suman y limitan en amplitud. Esto forma una portadora modulada en fase hacia el transmisor,

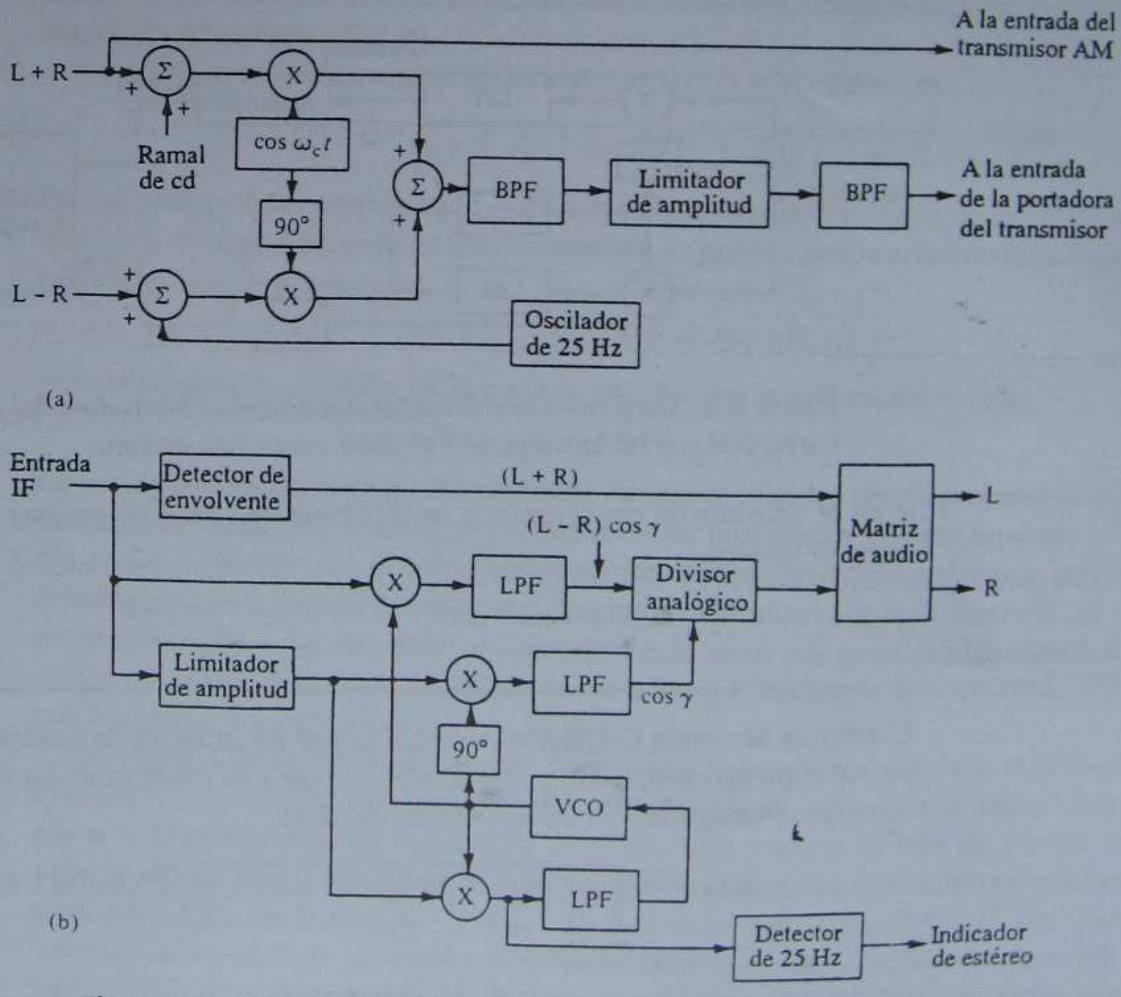


Figura H.4 Diagramas simplificados del procesamiento de la señal en el transmisor y el receptor del sistema AM estéreo de Motorola.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

y la componente L + R se aplica a la entrada AM del transmisor. La señal transmitida resultante es la modulación de amplitud en cuadratura descrita por la ecuación (H.8), la cual es compatible con la detección de la envolvente para recuperar la señal monaural. Para la identificación estéreo, se agrega un tono de 25 Hz a la componente L – R anterior a la modulación.

En el sistema estéreo Motorola, la parte principal de compatibilidad se coloca en el receptor debido a que el término cos $\gamma(t)$ debe detectarse, factorizarse y eliminarse de la componente L – R. En la figura H.4(b) se muestra un diagrama simplificado del receptor. Al limitador de amplitud le sigue un PLL; por tanto, se generan las componentes en fase y en cuadratura de la portadora modulada en fase. La detección síncrona con la componente en cuadratura proporciona (L – R) cos γ, mientras que la detección síncrona con la componente en fase proporciona cos γ. Esto se aplica a un divisor analógico para obtener la señal L – R. La salida (L + R) del detector de envolvente y la salida (L – R) del divisor se aplican a una matriz de audio que proporciona las salidas de estéreo deseadas.

H.4 CONCLUSIÓN

Los cinco sistemas AM estéreo descritos se han probado en la práctica. Cada sistema tiene sus propias ventajas y desventajas, y el peso principal de una decisión relacionada con la adaptación de uno de ellos debe basarse en el costo, en la eficiencia y en los compromisos de varios criterios de eficiencia. Entre éstos se incluyen el incremento del ancho de banda necesario, la separación estéreo, la respuesta en frecuencia y el ruido en diversas condiciones de recepción. Hay factores adicionales que no sólo incluyen la distorsión de recepción monaural y estéreo bajo propagación espacial y condiciones de desvanecimiento selectivo, sino también la distorsión causada por la sintonización errónea y las condiciones del ancho de banda. Otras consideraciones que también pueden ser importantes son la reducción del área de recepción monofónica, planes para el desarrollo de diseños de receptores y transmisores actuales y futuros, y el uso de la indicación de estéreo. Estos compromisos son comunes en el diseño de cualquier nuevo sistema de comunicación.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

APÉNDICE

Tabla de probabilidades gaussianas

La función de densidad de probabilidad gaussiana con media cero y varianza unitaria es

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \tag{I.1}$$

La probabilidad de que la variable aleatoria gaussiana X sea mayor que un valor dado x está dada por la función $Q(x)$, definida por

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-z^2/2}\, dz\,. \tag{I.2}$$

Nótese que $Q(0) = \frac{1}{2}$ y $Q(-\infty) = 1$. Algunos valores tabulados de la ecuación (I.2) se muestran en las tablas I.1 e I.2. Para valores mayores de x, $Q(x)$ se puede aproximar por

$$Q(x) \approx \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \left[1 - \frac{1}{x^2}\right] e^{-x^2/2}. \tag{I.3}$$

El error en esta aproximación es de alrededor de -2% para $x = 3$, -1% para $x = 4$, y la aproximación se vuelve cada vez mejor para valores mayores de x. Para valores grandes de x, una aproximación conveniente es

$$Q(x) \approx \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \tag{I.4}$$

Una aproximación de más exactitud que la ecuación (I.3) es[†]

$$Q(x) \approx \left[\frac{1}{(1-a)x + a\sqrt{x^2 + b}}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \tag{I.5}$$

donde $a = 1/\pi$ y $b = 2\pi$. Esta aproximación está dentro de -1% para $x > 1$, -0.5% para $x > 2$, y se vuelve cada vez mejor para valores mayores de x.

La función de error que se utiliza en estadística generalmente se define como

$$\text{erf}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt\,, \tag{I.6}$$

[†] P. O. Börjesson y C. W. Sundberg, "Simple Approximations of the Error Function $Q(x)$ for Communications Applications", *IEEE Transactions on Communications*, COM-27, marzo de 1979, págs. 639-643.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

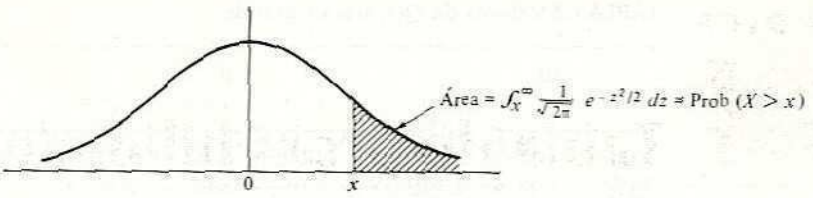


TABLA I.1 Valores de $Q(x)$ contra x[a]

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139

[a] De J. S. Bendat y A. G. Piersol, *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, Nueva York, Wiley-Interscience, 1971, y D. B. Owen, *Handbook of Statistical Tables*, Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing Co., 1962, ambos con autorización; cortesía de U.S. Energy Research and Development Administration.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

TABLA I.2 Valores de $Q(x)$ para x grande

x	10 log x	$Q(x)$	x	10 log x	$Q(x)$	x	10 log x	$Q(x)$
3.00	4.77	1.35E-03	4.00	6.02	3.17E-05	5.00	6.99	2.87E-07
3.05	4.84	1.14E-03	4.05	6.07	2.56E-05	5.05	7.03	2.21E-07
3.10	4.91	9.68E-04	4.10	6.13	2.07E-05	5.10	7.08	1.70E-07
3.15	4.98	8.16E-04	4.15	6.18	1.66E-05	5.15	7.12	1.30E-07
3.20	5.05	6.87E-04	4.20	6.23	1.33E-05	5.20	7.16	9.96E-08
3.25	5.12	5.77E-04	4.25	6.28	1.07E-05	5.25	7.20	7.61E-08
3.30	5.19	4.83E-04	4.30	6.33	8.54E-06	5.30	7.24	5.79E-08
3.35	5.25	4.04E-04	4.35	6.38	6.81E-06	5.35	7.28	4.40E-08
3.40	5.31	3.37E-04	4.40	6.43	5.41E-06	5.40	7.32	3.33E-08
3.45	5.38	2.80E-04	4.45	6.48	4.29E-06	5.45	7.36	2.52E-08
3.50	5.44	2.33E-04	4.50	6.53	3.40E-06	5.50	7.40	1.90E-08
3.55	5.50	1.93E-04	4.55	6.58	2.68E-06	5.55	7.44	1.43E-08
3.60	5.56	1.59E-04	4.60	6.63	2.11E-06	5.60	7.48	1.07E-08
3.65	5.62	1.31E-04	4.65	6.67	1.66E-06	5.65	7.52	8.03E-09
3.70	5.68	1.08E-04	4.70	6.72	1.30E-06	5.70	7.56	6.00E-09
3.75	5.74	8.84E-05	4.75	6.77	1.02E-06	5.75	7.60	4.47E-09
3.80	5.80	7.23E-05	4.80	6.81	7.93E-07	5.80	7.63	3.32E-09
3.85	5.85	5.91E-05	4.85	6.86	6.17E-07	5.85	7.67	2.46E-09
3.90	5.91	4.81E-05	4.90	6.90	4.79E-07	5.90	7.71	1.82E-09
3.95	5.97	3.91E-05	4.95	6.95	3.71E-07	5.95	7.75	1.34E-09

y la función de error complementario correspondiente es

$$\text{erfc}\,(x) = 1 - \text{erf}\,(x). \tag{I.7}$$

Nuestra elección particular de $Q(x)$ es más conveniente para el trabajo en sistemas de comunicación.

Usando un cambio de variables, es fácil ver que las relaciones entre las ecuaciones (I.2), (I.6), (I.7) son

$$Q(x) = \frac{1}{2}\,\text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \tag{I.8}$$

$$\text{erfc}\,(x) = 2Q(\sqrt{2}x). \tag{I.9}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

APÉNDICE

J Abreviaturas y tablas

Abreviaturas en modulación analógica

AM	**Modulación de amplitud:** modulación de señal continua que utiliza variación de la amplitud en proporción a la amplitud de una señal moduladora; en general, se toma como DSB-LC para transmisiones comerciales de radio y como DSB-SC para sistemas de multiplexión.
CW	**Señal Continua:** señal portadora (en general senoidal) que se utiliza para modulación o conmutación.
DSB	**Doble banda lateral (LC o SC):** señal cuyo espectro tiene dos bandas laterales balanceadas en forma simétrica con respecto a la frecuencia portadora.
FM	**Modulación de frecuencia:** modulación de señal continua que utiliza la variación de la frecuencia en proporción a la amplitud de la señal moduladora.
LC	**Gran portadora:** señal en la que una gran parte del espectro está concentrada en la frecuencia portadora (se usa en DSB, SSB, VSB).
NBFM	**Modulación de frecuencia de banda angosta:** conversión de amplitud a frecuencia; este efecto es pequeño comparado con las frecuencias en el espectro de la señal moduladora.
NBPM	**Modulación de fase de banda angosta:** conversión de amplitud a fase; este efecto es pequeño con un radián de desplazamiento de fase.
PAM	**Modulación de amplitud de pulso:** variación de la amplitud de un tren de pulsos de duración constante, en proporción a los valores muestreados de la señal moduladora.
PM	**Modulación de fase:** modulación de señal continua que utiliza variación de la fase en proporción a la amplitud de la señal moduladora.
PPM	**Modulación de posición de pulso:** utiliza pulsos de amplitud y de duración constante cuyos desplazamientos temporales con respecto a un reloj son proporcionales a los valores muestreados de la señal moduladora.
PWM	**Modulación de ancho de pulso:** utiliza un tren de pulsos de amplitud constante cuya duración es proporcional a los valores muestreados de la señal moduladora.
QAM	**AM en cuadratura:** utiliza AM tanto en fase como en cuadratura para proporcionar información.
SC	**Portadora suprimida:** señal en la que una proporción relativamente baja (lo ideal es cero) del espectro está concentrada en la frecuencia portadora (se utiliza en DSB, SSB, VSB).
SSB	**Banda lateral única (LC o SC):** ((+) indica banda lateral superior, (-) banda lateral inferior): señal que tiene una banda lateral espectral que presenta el contenido de frecuencia ya sea positivo (+) o negativo (–) de la señal moduladora.
VSB	**Banda lateral residual (LC o SC):** señal en la que su densidad espectral tiene la mayor parte de una banda lateral y un "residuo" de la segunda banda lateral.
WBFM	**Modulación de frecuencia de banda ancha:** conversión de amplitud a frecuencia; este efecto predomina comparado con las frecuencias en el espectro de la señal moduladora.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

WBPM	**Modulación de fase de banda ancha:** conversión de amplitud a fase; este efecto predomina comparado con un radián de desplazamiento de fase.

Abreviaturas en modulación digital y multiplexión

ASK	**Conmutación de amplitud:** conmutación entre dos amplitudes de una senoidal para representar unos y ceros binarios.
APK	**Conmutación de amplitud y fase:** combinación de ASK y PSK para proporcionar información.
BPSK	**Conmutación de fase binaria:** conmutación entre dos fases de una senoidal para representar unos y ceros binarios.
CPFSK	**FSK de fase continua:** versión de FSK sin discontinuidades de fase en los puntos de conmutación, lo que da lugar a una disminución en la densidad espectral de potencia en las frecuencias eliminadas de la frecuencia portadora.
DM	**Modulación delta:** DPCM que sólo utiliza un bit para codificar las diferencias entre los valores muestreados sucesivos de la señal moduladora.
DPCM	**Modulación de código de pulsos diferencial:** utiliza PCM para enviar sólo las diferencias entre los valores muestreados sucesivos de la señal moduladora.
DPSK	**PSK diferencial:** utiliza PSK sólo para enviar las diferencias entre bits sucesivos.
FDM	**Multiplexión por división de frecuencia:** utiliza desplazamientos en frecuencia para proporcionar varios canales de información independientes.
FSK	**Conmutación de frecuencia:** conmutación de la frecuencia instantánea de una senoidal para representar unos y ceros binarios.
FSK *M*-aria	**FSK de multiestado:** versión de la FSK que utiliza más de dos frecuencias, lo cual proporciona transmisión eficiente de información con restricción de potencia a cambio de ancho de banda.
MSK	**Conmutación de desplazamiento mínimo:** versión común de la CPFSK que utiliza un desplazamiento de frecuencia mínimo para conmutación ortogonal.
MUX	**Multiplexor:** sistema para combinar varios canales de información en una sola señal.
OOK	**Conmutación encendido-apagado:** versión de ASK en la que la señal portadora se transmite en toda su amplitud ("encendido") o con amplitud cero ("apagado") para representar unos y ceros binarios.
OQPSK	**QPSK de conmutación desplazada:** utiliza un retardo en la sincronía de los bits de datos de entrada para disminuir al máximo las transiciones de fase en los puntos de conmutación.
QAM	**Modulación de amplitud en cuadratura:** utiliza ASK en fase y cuadratura para proporcionar información.
QPSK	**PSK en cuadratura:** utiliza PSK tanto en fase como en cuadratura para proporcionar información.
PCM	**Modulación de código de pulsos:** utiliza un código digital para designar el nivel de amplitud de la señal moduladora en cada tiempo de muestra.
PRK	**Conmutación por inversión de fase:** conmutación de $(0, \pi)$ radianes en fase de una senoidal para representar unos y ceros binarios.
PSK	**Conmutación de fase:** conmutación de la fase de una senoidal para representar unos y ceros binarios.
PSK *M*-aria	**PSK de multiestado:** versión de PSK que utiliza más de dos fases, lo cual proporciona transmisión eficiente de información con restricción de ancho de banda a cambio de potencia.
TDM	**Multiplexión por división de tiempo:** inserción secuencial de los valores muestreados de dos o más señales para proporcionar varios canales de información independiente.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

ares transformados de Fourier seleccionados

	$f(t)$	$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$		$f(t)$	$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$
1.	$e^{-at}u(t)$	$1/(a + j\omega)$	11.	$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
2.	$te^{-at}u(t)$	$1/(a + j\omega)^2$	12.	$\operatorname{sen} \omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
3.	$e^{-a\lvert t\rvert}$	$2a/(a^2 + \omega^2)$	13.	$\operatorname{rect}(t/\tau)$	$\tau\,\mathrm{Sa}(\omega\tau/2)$
4.	$e^{-t^2/(2\sigma^2)}$	$\sigma\sqrt{2\pi}\,e^{-\sigma^2\omega^2/2}$	14.	$\frac{W}{2\pi}\mathrm{Sa}(Wt/2)$	$\operatorname{rect}(\omega/W)$
5.	$\operatorname{sgn}(t)$	$2/(j\omega)$	15.	$\frac{W}{\pi}\mathrm{Sa}(Wt)$	$\operatorname{rect}(\omega/2W)$
6.	$j/(\pi t)$	$\operatorname{sgn}(\omega)$	16.	$\Lambda(t/\tau)$	$\tau[\mathrm{Sa}(\omega\tau/2)]^2$
7.	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + 1/(j\omega)$	17.	$\frac{W}{2\pi}[\mathrm{Sa}(Wt/2)]^2$	$\Lambda(\omega/W)$
8.	$\delta(t)$	1	18.	$\cos(\pi t/\tau)\operatorname{rect}(t/\tau)$	$\frac{2\tau}{\pi}\frac{\cos(\omega\tau/2)}{1 - (\omega\tau/\pi)^2}$
9.	1	$2\pi\delta(\omega)$	19.	$\frac{2W}{\pi^2}\frac{\cos(Wt)}{1 - (2Wt/\pi)^2}$	$\cos[\pi\omega/(2W)]\operatorname{rect}[\omega/(2W)]$
10.	$e^{\pm j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega \mp \omega_0)$	20.	$\delta_T(t)$	$\omega_0\delta_{\omega_0}(\omega)$, donde $\omega_0 = 2\pi/T$

Múltiplos y submúltiplos de unidades

Prefijo	*Simbolo*	*Factor*	*Prefijo*	*Simbolo*	*Factor*
milli	m	10^{-3}	kilo	k	10^3
micro	μ	10^{-6}	mega	M	10^6
nano	n	10^{-9}	giga	G	10^9
pico	p	10^{-12}	tera	T	10^{12}
femto	f	10^{-15}	peta	P	10^{15}

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Algunas transformadas de Fourier que corresponden a operaciones matemáticas dadas

Operación	$f(t)$	$\leftrightarrow$	$F(\omega)$
Linealidad (superposición)	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$		$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
Conjugada compleja	$f^*(t)$		$F^*(-\omega)$
Escala	$f(\alpha t)$		$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$
Retardo	$f(t - t_0)$		$e^{-j\omega t_0} F(\omega)$
Traslación en frecuencia	$e^{j\omega_0 t} f(t)$		$F(\omega - \omega_0)$
Modulación de amplitud	$f(t) \cos \omega_0 t$		$\frac{1}{2}F(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0)$
Convolución en el tiempo	$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau)\, d\tau$		$F_1(\omega) F_2(\omega)$
Convolución en la frecuencia	$f_1(t) f_2(t)$		$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) F_2(\omega - u)\, du$
Dualidad: tiempo-frecuencia	$F(t)$		$2\pi f(-\omega)$
Simetría: par-impar	$f_e(t)$		$F_e(\omega)$ [real]
	$f_o(t)$		$F_o(\omega)$ [imaginario]
Derivación en el tiempo	$\frac{d}{dt} f(t)$		$j\omega F(\omega)$
Integración en el tiempo	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, d\tau$		$\frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0)\, \delta(\omega)$, donde $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$

Probabilidad de error gaussiano

$Q(x)$	x
10^{-3}	3.35
10^{-4}	3.72
10^{-5}	4.27
10^{-6}	4.75
10^{-7}	5.20
10^{-8}	5.61

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Índice de materias

actividad de las manchas solares, 527
ACTV-1 (Advanced Compatible TV), 726
adquisición, 630, 657
algoritmo de Cooley y Tukey, 142
algoritmos, 142, 675
alias, 53, 55, 129, 131, 134
almacén elástico, 422
AM (modulación de amplitud), 102, 219, 239
  demodulación de, 232, 247
  estéreo, 737
  generación de, 225, 244
AMI (inversión alternada de marca), 410, 569
amplificador estabilizado por conmutación, 233
analizador de espectro, 49, 157, 238
  de barrido, 49, 157, 238
  multicanal, 166
analizador multicanal, 502
ancho de banda, 2, 4, 118
  anterior a la detección, 616
  del radio de giro, 125
  equivalente del ruido, 195
  posterior a la detección, 616
  3-dB, 119
ángulo crítico, 414
antena, 277
  ganancia y área efectiva de la, 204
  ruido en la, 198, 202
APK (conmutación de amplitud y fase), 663, 667
  demodulación de, 63
  generación de, 663
aproximación
  del vecino más próximo, 689
  por unión de fronteras, 689
armónico(s), 23, 76
  generación de, 42, 81
asignaciones de frecuencias de televisión
  en UHF, 703
  en VHF, 702
  por cable, 704
ASK (conmutación de amplitud), 412, 608, 626, 670
  demodulación de, 610
  generación de, 608
AT&T (American Telephone & Telegraph Company), 408, 729
autosincronía, 392, 448

banda
  de ciudadanos, 705
  de guardia, 326, 367
banda lateral, 221
  en AM, 239
  en FM, 311
  superior, 221
bandas
  de aficionados, 705
  laterales significativas (en FM), 313
barrido entrelazado, 708
baud, 584, 634
BER (tasa de error de bits), 637, 640, 662, 668
BFO (oscilador de frecuencia pulsante), 266
binit, 533
bit(s), 5, 404, 532
  de control, 422
  de inicio y detención, 419, 426
BPF (filtro pasabanda ideal), 120
BPSK (PSK binaria), 620, 636, 666, 670
BRI (interfaz de tasa básica), 430
BRZ (regreso a cero bipolar), 410, 569
búsqueda en serie, 631, 657

cálculo numérico
  de la densidad espectral de potencia, 171, 515
  de la función de densidad de probabilidad, 485, 502
  de la integral de convolución, 114, 137
  de la serie de Fourier, 50, 57
  de la transformada de Fourier, 135, 141
canal(es), 3, 536
  banco de, 409
  capacidad de, 5, 536
  simétrico binario, 536
carácter, 419
características de filtro, 114
  acoplado, 433
  Butterworth, 134, 156, 196, 214, 392
  de banda lateral, 256, 266
  de deénfasis, preénfasis, 356, 368, 732, 738
  de integración y descarga, 436
  ideal, 120
  igualador; *véase* Igualación
  pasaaltas *RC*, 213, 328
  pasabajas *RC*, 39, 79, 115, 124, 194
  prealias, 132
  transversal, 116, 155, 434, 510, 577
CCD (dispositivo de carga acoplada), 117
CCITT (Consultative Committee on International Telegraphy and Telephony), 419, 430

http://libreria-universitaria.blogspot.com

CDMA (acceso múltiple por división codificada), 628
ceros aumentados, 137, 145
circuito
de muestra y retención, 381, 397
de retención, 66, 447
CNR (razón portadora a ruido), 274
Codec, 4
codificación, 3
algebraica, 590
control de error en la, 418
convolucional, 593
correlativa, 572
de Huffman, 598
codificador, 2, 4, 593
de doble pendiente, 405
de rampa, 398, 405
flash (en paralelo), 406, 663
paralelo, 406
retroalimentado, 405
códigos(s)
algebraicos, 590
ASCII, 419
binarios, 403
convolucionales, 593
de Barker, 443, 455
de bloque, 591
de Gray, 588, 635, 660
de Hamming, 591
de longitud máxima, 441
de Miller, 410, 571
de repetición, 418
HDB (bipolares de alta densidad), 452
coeficiente
binomial, 478
de correlación, 494
de determinación, 497
compansión, 544
ley A de, 599
ley μ de, 545, 599
comparación de métodos de modulación
de señal continua (CW), 350
en AM, 281
en FM y PPM, 402
en modulación digital, 666
en modulación digital binaria, 626
comparación de métodos de multiplexión,
asíncronos, síncronos, 419
FDM, TDM, 384
comparador, 397
compleción, 14, 17, 24, 30
componente de ruido en fase, 269
compromisos de ancho de banda contra *S/N*,
en el demodulador ideal, 540, 687
en FM, 347
en FSK *M*-aria, 653, 677
en PCM, 412, 558
en PPM, PWM, 401
comunicación, 1
concentrador, 420
condiciones de Dirichlet, 66, 87
conjunto, 499
conmutación
de mensajes, 430
de paquetes, 430
ortogonal, 611, 642, 651
conmutador, 377, 384, 593
constante de Boltzmann, 190, 204
constante de modulación
en AM, 220 *n*, 241 *n*
en FM, 300, 324, 337
en PM, 299, 320
en PWM, PPM, 392, 395, 401
contracción, 629
convergencia
cuadrática media, 34, 68
en el valor cuadrático medio, 34, 67, 69
conversión A/D (analógica a digital), 405, 563
convertidor
de bajada, 216
paralelo a serie, 405, 636
serie a paralelo, 634, 663, 688
correlación, 495
correlación cruzada
en señales de energía, 187, 435
en señales de potencia, 183, 334, 582
correlacionador, 435, 438, 636
coseno elevado, 140, 387
covarianza, 493
CPFSK (FSK de fase continua), 641, 650, 667
criterio de Paley-Wiener, 121 *n*
criterio Rayleigh, 392 *n*
CSSB (compatible de banda lateral única), 265
cuadratura, 260
comparador de fase en, 337
componente de ruido en, 269
multiplexión en, 224, 714, 741
cuadro, 422, 428, 708
cuantificación, 402, 522, 542, 553
cuasisíncronos, 420

DAC (convertidor digital a analógico), 406, 450
decibel (dB), 178 *n*, 698
decisión binaria, 550, 673
decodificador, 2, 4, 591, 593
deénfasis, 355
demodulación, 3; *véase* modulación
demodulador
de cruces por cero, 331
ideal, 540
densidad espectral, 85, 718
de energía, 164
densidad espectral de potencia, 168, 188, 270, 470, 506, 515, 621
de FSK, 615
de MSK, 647
de PCM, 567
de PSK, 621, 647
de PSK *M*-aria, 659
de QAM, QPSK, 635, 647
DE-PSK (PSK de codificación diferencial), 624
desigualdad
de Chebyshev, 473
de Schwarz, 21, 186, 432, 557
de Tchebycheff, 473 *n*
desvanecimiento, 279
selectivo, 279, 281, 295
desviación
de fase pico, 320
de frecuencia pico, 301, 306, 320, 325
estándar, 472, 501
detección
coherente [síncrona], 223, 272, 435, 612, 615, 626
con filtro acoplado, 554, 609, 611, 619, 650

http://libreria-universitaria.blogspot.com

de envolvente, 247, 273, 290, 610, 613
de pendiente, 329
en ruido, 181, 550, 673
homodina, 223
y correlación, 182, 438, 441, 619
detector
de pendiente, 329, 332
de relación, 330
rectificador, 248
síncrono, 223, 232, 262, 267, 269, 610
DFT (transformada de Fourier discreta), 135, 515
diafonía entre canales, 381, 384, 386, 448
diagrama de Venn, 459, 463
digitalización, 403
diodo láser, 416
diodo varactor, 322, 324, 370
discriminador, 327, 345
de Foster-Seeley, 329
distancia de Hamming, 418, 426, 588
distorsión
armónica, 43
por intermodulación, 227, 285
por retardo, 667, 671, 729
distribución
binomial, 478, 481, 566
de Poisson, 481
gaussiana, 482
gaussiana bivariada, 497
multivariada, 497
Rayleigh, 521
uniforme, 477
distribución de probabilidad
binomial, 478
de Poisson, 481
exponencial, 469
gaussiana, 482
laplaciana, 525
Rayleigh, 521
uniforme, 477
diversidad espacial, 279
DLL (lazo de amarre de retardo), 631
DM (modulación delta), 561
DPCM (PCM diferencial), 560
DPSK (PSK diferencial), 625, 627, 666
DQPSK (QPSK diferencial), 667
DSB-LC (doble banda lateral con gran portadora), 239, 350
demodulación de, 247
generación de, 244
DSB-SC (doble banda lateral con portadora suprimida), 221, 231
demodulación de, 232
generación de, 225
duobinario modificado, 575, 665
duplexor, 565
duración temporal, 124

efecto de umbral, 351, 354, 395, 401, 539
efectos de propagación, 277
eficiencia
de la razón del código, 417, 589
de transmisión (en AM), 243
del desempeño, 426
eficiencia del ancho de banda, 411, 668
de ASK, 610
de FSK, 616
de FSK *M*-aria, 655
de MSK, 646
de PSK, 621
de PSK *M*-aria, 659
de QAM, QPSK, 640
EIRP (potencia efectiva isotrópica radiada), 205
energía, 88, 164
enlace de comunicación, 204
entropía, 532, 534, 536
envolvente, 220, 240
detección de, 240, 247, 264, 273, 610, 613
distorsión por retardo de, 730
Erf (función de error), 746
error cuadrático
integral, 19, 669
medio, 74, 581
error de bit, 660
contra error de símbolo, 587
espacio (en señalización), 410, 608
espacio vectorial, 14, 669
espectro, 44
acumulativo, 170
blanco, 89
continuo, 83
de amplitud, 45, 48
de Fourier, 44
espectro de línea, 45, 77, 82
de potencia, 172
expresado como impulsos, 86
espectro de potencia, 37, 170
acumulativo, 170
integrado, 170
numérico, 515
espectro expandido
de salto pequeño, 656
de salto rápido, 657
por DS (secuencia directa), 629
por FH (salto de frecuencia), 655
estéreo
AM, 737
FM, 235, 286, 316, 338, 369, 737
TV, 724
estimación, 476, 516
de un enlace de potencia, 416
estimador consistente, 476, 516
insesgado, 475, 516
estrategia de adquisición acampar y esperar, 657
eventos
igualmente probables, 460
mutuamente excluyentes, 459, 463
exponencial de valor complejo, 23-29, 38

factor
de atenuación, 388
de forma, 122
de ruido, 199
fase
ángulo de, 298, 303
comparador de, 334, 344
desplazamiento de, 40, 120, 258
diagrama reticular, 643, 646
distorsión de, 264, 664
errores de, 223, 263, 340, 622
espectro de, 45
modulación de, 220, 299, 319
nulos, 335
respuesta de, 115
fasores, 27, 29, 34, 44, 84, 298, 717
AM, 275, 303
APK, 664
FM, 298, 303, 346, 351

http://libreria-universitaria.blogspot.com

PSK, 620
PSK *M*-aria, 660
QAM, QPSK, 635, 638, 742
ruido pasabanda, 269
FCC (Federal Communications Commission), 289 *n*, 315, 356 *n*, 701, 714, 724, 737
FDM (multiplexión por división de frecuencia), 249, 384, 627
FDMA (acceso múltiple por división de frecuencia), 691
fdp
exponencial, 469
gaussiana normalizada, 483, 746
laplaciana, 525
marginal, 491
fenómeno de Gibbs, 68
FFT (transformada de Fourier rápida), 141
fibra óptica, 413
de índice escalonado, 414
de índice graduado, 415 *n*
filtrado
por mínimos cuadrados, 528
posterior a la modulación, 635
filtro
acoplado, 433, 437
Butterworth, 134, 156, 196, 214, 392
de banda lateral, 256, 266
de integración y descarga, 436, 629, 639
ideal, 120
pasaaltas *RC*, 213, 328
pasabajas *RC*, 39, 79, 115, 124, 194
pasabajas *RL*, 22, 195
prealias, 132
SAW (onda acústica de superficie), 118
transversal, 116, 434, 510, 570
fluctuación, 424, 624, 671
FM (modulación de frecuencia), 300, 350, 701, 738
de banda ancha, 306
de banda angosta (NBFM), 301
demodulación de, 327
directa, 323, 327
estéreo, 235, 286, 316, 737
generación de, 321
indirecta, 321
multiplexión en, 326
ruido en, 345
FMFB (FM con retroalimentación), 333, 354
fotodetector, 416
frecuencia(s), 9, 23
convertidor de, 227, 322
de barrido horizontal en TV,
de ocurrencia, 457, 485
designaciones de, 700
discriminador de, 327, 345
diversidad de, 279
dominio de la, 23
errores de, 223, 263
función de transferencia en, 38, 114, 164, 175
imagen, 252, 254, 292
instantánea, 299
mezclador de, 227
modulación de, *véase* FM
multiplicador de, 42, 321
negativa, 29, 58, 220, 255
portadora 220, 251, 315
resolución en, 139
sintetizador de, 237, 286, 655
FSK (conmutación de frecuencia), 412, 610, 626, 666, 670
demodulación de, 613
generación de, 617
FSK no coherente, 613, 626
función
de correlación, 179-187
de densidad de probabilidad (fdp), 467, 486, 501; *véase también* fdp
de distribución acumulativa, 464, 501
de muestra, 499, 515
de transferencia, 38 *n; véase también* frecuencia, función de transferencia en
delta, 59
delta de Dirac, 59
escalón, 62, 92
peine, 94
rectangular (rect), 86
Sa(·) (seno sobre argumento), 35*n*, 47, 64, 91, 95, 98, 567, 98, 567
signo (sgn), 90
sinc(·), 47 *n*
ventana Parzen, 160
función compuerta (rect)
aperiódica, 86
periódica, 35, 46, 58
función de autocorrelación
en señales de energía, 187, 435, 609
en señales de potencia, 180, 505, 509
función triangular
aperiódica, 91, 95, 104, 112
periódica, 35, 181
funciones
base, 16
de Bessel, 310, 735
generalizadas, 63
pares, 32, 97
singulares, 59
Walsh, 22, 72 *n*
funciones ventana, 139, 516
coseno elevado, 140, 387
Hamming, 160
Hann, 140
Parzen, 160

ganancia de procesamiento, 633, 656
generación; *véase* modulación
generador de barrido, 40

HDS-NA (Sistema de alta definición para Norteamérica), 726
HDTV (televisión de alta definición), 725
heterodino, 227
receptor, 251
histograma, 485, 488
HPF (filtro pasaaltas ideal), 120

identidades de Euler, 27
IDFT (transformada de Fourier inversa discreta), 136
IDTV (TV de definición mejorada), 712
IF (frecuencia intermedia), 251, 331, 657
igualación, 120, 281, 376, 548, 564, 577
adaptable, 580, 664

http://libreria-universitaria.blogspot.com

forzada a cero, 578
prefijada, 580
igualador
adaptable, 580, 664
forzado a cero, 578
prefijado, 580
transversal, 577
impulso,
función, 59, 79
muestreado, 374
respuesta al, 65, 110, 114
independencia estadística, 462, 492, 498, 505, 533
índice
de discriminación, 442
de dispersión, 307
de refracción, 279, 414
índice de modulación
en AM, 242, 288
en BPSK, 620
en FM, 302, 321
información, 531
promedio, 532
integral de convolución, 80, 106, 109, 526
con escalón unitario, 110
en frecuencia, 107
gráfica, 111
numérica, 114
periódica [circular], 137
propiedades de la, 109-114
integridad de bit, 424
interferencia entre símbolos; *véase* ISI
inversión de espectro, 264
ionosfera, 278
ISDN (red digital de servicios integrados), 429
ISI (interferencia entre símbolos), 386, 555, 559, 577, 584, 667

lazo
de Costas, 624, 639, 666
de elevación al cuadrado, 623, 685
de fase cerrada; *véase* PLL
LED (diodo emisor de luz), 416
ley de Snell, 414
ley μ de compansión, 545 *n*, 599
limitador, 330, 345
línea de retardo con derivaciones, 116, 434, 561
líneas de teléfono condicionadas, 729
LO (oscilador local), 252, 332
lóbulos laterales, 139
longitud de restricción [espacio acotado], 510, 593
LPF (filtro pasabajas ideal), 120
LRT (prueba de razón de similitud), 675

magnitud, 298
respuesta en, 40, 115
espectro de, 45
marca, 410, 608
marcador, 425
matiz, 713
matriz de verificación de paridad, 417, 427, 591, 605
media de la muestra, 476, 677
mediana [estadística], 471
medio de transmisión; *véase* canal
memoria de paso, 422
método
de FM de Armstrong, 322
de precodificación Lender, 574
métodos de acceso múltiple
por división de código (CDMA), 628
por división de frecuencia (FDMA), 691
por división de tiempo (TDMA), 421
mezclador, 293, 443, 628
de frecuencia, 227
de voz, 293
MFM (FM modificada), 451
moda [estadística], 471
modelo ocular, 559, 585
modem, 4, 617
modo de rastreo, 630, 657
modulación, 3, 219
AM en cuadratura (QAM), 634, 667, 727, 741
compuesta, 326, 383
con portadora suprimida (SC), 220
de amplitud (AM), 102, 219, 239, 701
de ángulo, 298
de banda lateral residual (VSB), 266, 350, 627, 667, 710, 731
de banda lateral simple compatible (CSSB), 265
de banda lateral única (SSB), 255, 705, 730
de doble banda lateral (DSB), 221, 239
de fase (PM), 299, 319, 350
de frecuencia (FM), 300, 350, 701, 738
de gran portadora (LC), 239, 264, 350
de pulso, 371
de pulso analógica, 399
de retardo, 410, 571
delta (DM), 561
expansora, 629
FM de banda ancha, 306
FM de banda angosta (NBFM), 302, 304
FSK de fase continua (CPFSK), 641, 650, 667
lineal, 300
M-aria; *véase* modulación *M*-aria
no lineal, 310, 392
por amplitud de pulso (PAM), 372, 380, 399
por código de pulsos (PCM), 402, 411, 438, 450, 558
por conmutación de amplitud (ASK), 412, 608, 626, 670
por conmutación de amplitud y fase (APK), 663, 667
por conmutación de desplazamiento mímino (MSK), 642, 647, 666, 671
por conmutación de fase (PSK), 320, 412, 618, 626, 670
por conmutación de frecuencia (FSK), 412, 610, 626, 666, 670
PSK en cuadratura (QPSK), 634, 638, 647, 667, 671
PSK diferencial (DPSK), 625, 627, 666
modulación *M*-aria, 553, 584, 634
APK, 665, 667, 671
DPSK, 662
FSK, 651, 654

http://libreria-universitaria.blogspot.com

PAM, 404
PCM, 402
PSK, 659, 665, 667, 671
modulación SSB (banda lateral única), 256, 350, 705, 730
demodulación de la, 262, 266
generación de, 256, 305
modulador, 2
APK, 664
balanceado, 229, 231-232, 304
de anillo, 229
de anillo de doble balance, 229
de conmutación, 228, 245
FM, PM, 304, 323
MSK, 648, 649
por conmutación, 228, 245
por ley de potencias, 231, 246
PSK *M*-ario, 688
rectificador, 245
módulo *N*, 136 *n*, 440
momento conjunto, 505
momentos [estadísticos], 472, 504
MSK (comutación de desplazamiento mínimo), 642, 666, 671
demodulación de, 685
generación de, 648, 649
MSK en serie, 648, 686
muestra [estadística], 475
muestreo natural, 373
multicuadro, 422
multiplexión
de señales PCM, 419
en cuadratura, 224, 634, 645, 714, 741
FM, 326
FM estéreo, 235, 286, 316, 369, 737
por demanda, 427
por división de frecuencia (FDM), 249
por división de tiempo (TDM), 377
por intercalación de bits, 421
por intercalación de caracteres, 426
multiplexor Bell System M12, 423
MUX (multiplexor), 409, 419
sistema Bell M12, 423

NAMSR (National AM Stereophonic Radio Committee), 737
NBFM (FM de banda angosta), 302, 348
norma, 16, 669
NRZ (no regreso a cero), 410, 567, 623
NTSC (National Television Systems Committee), 714
Nyquist
ancho de banda de, 622, 665
intervalo de, 129
tasa de muestreo de, 129
señales de, 387, 556

onda
celeste, 278
terrestre, 278
OOK (conmutación encendido-apagado), 547, 552, 555, 608, 626, 667, 670, 673
OQPSK (QPSK de conmutación desplazada), 638, 644, 647, 666, 671
ortogonalidad, 15, 24, 651

palabra de código, 437, 590
PAM (modulación de amplitud de pulso), 372, 381, 391, 399
paridad, 417
impar, 417
par, 417
PCM (modulación de código de pulsos), 402, 409, 558
codificador, 405, 563
decodificador, 407, 438, 450
sistema telefónico, 407
PDM (modulación de duración de pulso), 391 *n*
PEP (potencia pico de la envolvente), 288, 292
pérdida de trayectoria, 204, 206
en el espacio libre, 206
pérdidas de atenuación, 204, 206
periodo, 11
periodograma, 515
perturbaciones, 632, 656
pixeles, 725

PLL (lazo de fase cerrada), 236, 333, 354, 424, 442, 612, 621, 658
de primer orden, 340
de segundo orden, 342
PM (modulación de fase), 299
demodulación de, 350
generación de, 304
PMT (tubo fotomultiplicador), 599, 607
población [estadística], 475
polarización, 277
polinomios de Legendre, 22, 72
portadora piloto, 233, 316
potencia, 11, 36, 168
disponible, 197
en AM, 242
en FM, 317
potencia de la banda lateral
en AM, 242
en FM, 317
en PSK, 621
PPM (modulación de posición de pulso), 391, 396, 524
precodificación, 574, 576
predicción lineal, 561
preénfasis, deénfasis, 355, 368, 732
PRI (interfaz de tasa primaria), 430
PRK (conmutación por inversión de fase), 619
demodulación de la, 623
generación de la, 619
probabilidad, 457, 486
condicional, 461, 490
conjunta, 461, 490
probabilidad de error, 549, 552, 670, 674
de APK, QPR, 665, 689
de ASK, 610
de comparaciones, 626, 666
de DPSK, 625
de FSK, 615
de QAM, QPSK, 637, 665
de PSK, 620, 665
de señalización *M*-aria, 586, 652, 660, 665
probabilidades gaussianas, 483, 746
proceso(s)
aleatorio, 499
aleatorio estacionario, 500, 504

http://libreria-universitaria.blogspot.com

aleatorio estacionario de amplio sentido, 505
ergódicos, 500, 506
producto
interno, 16, 669
tiempo por ancho de banda, 124
promedios
del conjunto, 499
en el tiempo, 177, 500
estadísticos, 471
protocolo, 428
prueba de muestreo, 446
PSK (conmutación de fase), 320, 412, 626, 665, 670
demodulación de, 619
generación de, 623
pulso
exponencial, 11, 64, 84, 95
formación de, 387
gaussiano, 11, 64, 95, 126, 148
modulación de, 371
rectangular, 11, 35, 64, 87, 91, 95
regulación de, 390, 395, 400
(sen x)/x, 35, 47, 64, 91, 95
(sen x)^2/x^2, 64, 91, 95, 567
triangular, 64, 91, 95, 104
PWM (modulación de ancho de pulso), 391, 398

$Q(\cdot)$ (función de probabilidad gaussiana), 484, 551, 746
QAM (AM en cuadratura), 634, 667, 727, 741
véase también QPSK
QPSK (PSK cuaternaria), 635, 647, 660, 664, 667, 670
demodulación de, 636
generación de, 635
QPSK desbalanceada, 636 *n*
QPSK retrasada, 638 *n*

radar, 155, 254, 308 *n*, 396, 443 *n*, 658, 700
radio del horizonte, 279
radiodifusión de AM, 251, 701
radiómetro de microondas por rastreo, 218
raíz cuadrática media (rms), 177, 471, 500
razón
de aspecto, 709
de similitud, 675
receptor, 3
con portadora inyectada, 248
de conversión doble, 252 *n*, 254
dirigido por decisiones, 583, 639
factor de mérito del, 206
heterodino, 251
modelo equivalente de ruido, 198
TRF (RF sintonizado), 251
superheterodino, 251-252
recuperación de portadora, 623, 639, 685
redundancia, 404, 417
registro de desplazamiento, 440, 572, 593
regla
de Carson, 313
de decisión, 549, 676
de decisión mayoritaria, 417, 424
regresión lineal, 496
relleno
de bits, 420, 422
de palabras, 426
repetidor analógico, 564
repetidores, 375, 564
representación binaria, 143, 410
de Manchester, 410, 568
por división de fase, 410, 568
RB (regreso a la polaridad), 409, 571
RZ (regreso a cero), 403, 409, 568
resistor, 190, 197
resolución
en el tiempo, 392, 395
en la frecuencia, 139, 171
respuesta, 8
al impulso, 65
de estado estacionario, 23, 40
de fase, 115
escalón, 110, 122
magnitud de la, 40, 115
retardo, 120, 523
RF (radiofrecuencia), 253, 332
ruido, 3, 176
atmosférico, 203
blanco, 188, 507
"click", 353
cósmico; *véase* ruido galáctico
de antena [del cielo], 198, 202
de banda limitada, 189
de cuantificación, 541, 543, 558, 563
de descarga, 207
de espiga (en FM), 352
de partición, 208
galáctico [cósmico], 203
pasabanda, 269
térmico, 190, 197, 206, 558
vano, 562

SAP (segundo programa de audio), 724
satélite Nimbus F, 530, 682
satélites geoestacionarios, 297, 607, 622
saturación, 713
SCA (Subsidiary Communications Authorization), 236, 316
SC-HDTV (Spectrum Compatible HDTV), 726
secuencias
PN (seudorruido), 441, 583, 629, 656
seudoaleatorias, 486; *véase también* secuencias PN
selectividad del receptor, 251
señal
binaria aleatoria, 508, 512
binaria polar, 547, 552, 555
compresión de, 544, 733
constelación de, 659, 663, 689
cuadrada, 18, 35, 41, 93
de cromancia en TV, 713
de luminancia en TV, 713
de potencia, 11
determinista, 12, 457
espacio de, 16, 668
I (en fase), 269, 635, 645, 663, 671, 715, 718
periódica, 11, 33, 82, 91
polar ternaria, 553
portadora, 220
Q (cuadratura), 635, 645, 663, 671, 715, 718
rectificada de media onda, 35, 489
rectificada de onda completa, 35, 211, 488

http://libreria-universitaria.blogspot.com

VIR (referencia del intervalo vertical), 712
señal a ruido (*S/N*), 4, 178
comparación de sistemas, 350, 668
contra compromisos con el ancho de banda, 4, 402, 541
degradación, 276
en AM, 271, 273
en DM, 563
en FM, 345, 353
en FSK, 617, 653
en PAM, 399
en PCM, 558
en PPM, PWM, 401
en PSK, 622, 661
estimación, 204
señales, 8, 14
aleatorias, 12, 457
analíticas, 259
antípodas, 619, 670
aperiódicas, 11, 82
CW (de onda continua), 219, 350, 371
de energía, potencia, 10, 14
de valor complejo, 8, 26, 130
ortogonales, 16, 24, 650, 670
ortonormales, 16, 19, 668
periódicas, 11, 33, 83
portadora, 220
senoidales, 9
señalización
de respuesta parcial, 572, 576, 665
duobinaria, 572, 665
QPR (respuesta parcial en cuadratura), 665
serie de Fourier, 18
cálculo numérico de la, 50
coeficientes de la, tabla de, 35
exponencial, 25, 82
series binomiales, 694
series de Fourier trigonométricas, 30
señal cuadrada, 19, 35
señal en diente de sierra, 33
señal triangular, 33
Sgn(·) (función signo), 90
Si(·) (seno integral), 122, 696
silenciamiento del ruido, 347
símbolo(s)
error de, 587, 660
recuperación de sincronía de, 623
tasa de, 5, 535, 584, 634
simetría
impar, 32, 97, 108, 139
par, 32, 108, 139
uso de la, 32, 139
sincronización
con secuencias PN, 439, 442
de filtro acoplado, 438
de PAM, 381
de PCM, 407
de PPM, PWM, 398
de PSK, 623, 625, 639
del espectro expandido, 630, 657
del multiplexor, 421, 425
en televisión, 711, 727
síndrome, 591
sintetizador, 162, 237, 287, 655
sistema, 8, 12
AM estéreo Belar, 740
AM estéreo Harris, 742
AM estéreo Kahn/Hazeltine, 739
AM estéreo Magnavox, 740
AM estéreo Motorola, 743
causal [realizable], 13, 109, 433
de compresión Burwen, 734
de compresión DBX, 724, 733
de compresión Dolby, 356 *n*, 732
de diferenciación de retardo, 111
de satélites de comunicación Intelsat, 691
de televisión PAL, 723
de televisión SECAM, 723
invariable en el tiempo, 13, 105
MTS (sonido multicanal para televisión), 724
MUSE (Multiple Sub-Nyquist Encoding), 727
realizable (causal), 13, 433
SPADE, 691
TASI (asignación de tiempo en interpolación de voz), 427 *n*
telefónico de portadora T, 408, 423
TV estéreo Zenith, 724
sistemas
de comunicación, 2, 531
de comunicación por fibra óptica, 413
de conmutación, 430
lineales, 12, 22, 106, 227
lineales invariables en el tiempo, 13, 38, 109
no lineales, 12, 42, 231, 246, 321, 623
óptimos, 433, 437, 557, 652, 673
sistemas telefónicos, 539, 598
límites de parámetros, 729
multiplexores, 408, 423
sobrecarga de la pendiente, 562
subportadoras, 249, 326, 718, 724
supercuadro; *véase* multicuadro
supresión de señal pequeña, 354

tasa
de chip, 630, 655
de bits, 584
de reloj del conmutador, 384
TASO (Television Allocation Study Organization), 368
TDM (multiplexión por división de tiempo), 377, 384, 408, 628
asíncrona, 419, 426
cuasisíncrona, 420
TDMA (acceso múltiple por división de tiempo), 421
telemetría, 327, 355, 396
televisión; *véase* TV
televisión en color, 714
temperatura de ruido, 197
del espacio, 202
equivalente, 197
estándar, 198, 200
teorema
de Bayes, 461
de Hartley-Shannon, 5, 537, 654, 687
de Plancherel, 88 *n*
de Rayleigh, 88 *n*
de Shannon, 5, 536, 651
de Woodward, 307 *n*
del muestreo, 14, 53, 127, 372, 379
teorema de Parseval, 18
serie exponencial de Fourier, 36, 171
serie trigonométrica de Fourier, 74

http://libreria-universitaria.blogspot.com

transformada de Fourier, 88, 125, 149, 163, 618
THD (distorsión armónica total), 43
tiempo
de elevación, 123, 523
de guardia, 391, 395
dominio del, 23
medio antes de una falla (MTBF), 469
promedios de, 177, 499
resolución en el, 392, 395
trama [televisión], 709
transformación de variables aleatorias, 487
transformada de Fourier, 84, 135, 141
cálculo de la, utilizando impulsos, 105
cálculo numérico de la, 135, 144
de funciones periódicas, 92
de funciones singulares, 89
de senoidales, 90
gráficas de transformadas, 91
inversa, 84
propiedades de la, 96-109
transformada de Hilbert, 260
transmisión
asíncrona, 419
cuaternaria en banda base, 584
de información, 1-2, 5, 531, 535
de ruido a través de los sistemas, 189
dúplex completa, 4
en banda base, 547
FDX (dúplex completa), 4, 617
HDX (semidúplex), 4, 617
por facsímil, 539, 730
semidúplex, 3
símplex (SX), 3
sin distorsión, 119
síncrona, 419, 426
transmisor, 3, 705, 710
trayectoria múltiple, 155, 279, 604, 664, 738
triángulo de Pascal, 479
TV (televisión), 268, 291, 317, 538, 701, 708, 714
valor
cuadrático medio, 168, 177, 184, 270, 471, 500
esperado, 471
medio, 177, 471, 500
promedio, 177, 471
variables aleatorias, 464
correlación entre, 494
transformaciones de, 487
variación de tiempo, 624
variada, 497; *véase también* variables aleatorias
varianza, 472, 501
VCO (oscilador controlado por tensión), 40, 236, 324, 336, 613, 617, 631, 658
ventana
Hamming, 160
Hann, 140
video (TV), 268, 709
VITS (señal de prueba del intervalo vertical), 712